

# 幾何的 計劃法에 의한 鋼材트러스構造物의 最適設計에 관한 研究

The Optimal Design of Steel Truss by Geometric  
Programming Method

鄭	海	駿*
Jung,	Hae	Joon
李	奎	遠**
Lee,	Gyu	Won

## Abstract

This paper applies an optimization algorithm for the elastic truss structures. The acceleration technique utilized in this study is the geometric programming method developed by the Operation Research or the applied mathematics.

The applicability and the efficiency of the algorithm applied in this study are tested for four different trusses. Test results show that the optimum solutions are obtained after only one or seven iterations which is very small compared with other techniques and no oscillation is needed for the convergency. Test results also show that the Geometric Programming Method is also effective algorithm for the convergency of the Optimum Solution in case of only being compared with the number of iteration.

## 要 旨

本研究에서는 OR 이나 應用數學分野에서 開發된 幾何的 計劃法을 彈性理論에 依한 트러스構造物의 最適化에 導入하여 最適化 알고리즘으로 適用하였다. 最適化 問題形成에서 目的函數는 重量函數, 制約條件式으로는 軸應力, 挫攔應力, 變位, 設計變數 限界制約條件式을 取하였다.

트러스構造物의 最適設計에 이 알고리즘을 適用할 수 있는지의 適用可能性과 그 效率性を 檢討하기 위하여 節點數, 部材數, 載荷條件數, 設計變數의 初期值를 달리한 4 種類의 트러스構造物의 最適設計를 實施하고 그 結果를 分析하였다.

研究結果 最適設計過程의 反復回數를 中心으로 分析할 때 本研究의 알고리즘은 1~7 回 反復過程만으로 Oscillation 現象없이 安定性있게 最適解에 收斂하고 있어 本研究의 方法도 反復回數만을 比較할 경우 효율적이라는 結論을 얻었다.

## 1. 序 論

Maxwell<sup>(1)</sup>의 基本定理 및 Sahmit<sup>(2)</sup>의 文獻이

\* 正會員 · 忠南大學校 工業教育大學 土木工學科 教授

\*\* 正會員 · 全北大學校 工科大學 土木工學科 副教授

發表되면서 構造物의 最適化는 많은 學者들에게 關心의 對象이 되었다. 그러나 構造物의 設計過程이 複雜하고 解析에 많은 時間이 所要되므로 엄밀한 最適設計는 거의 不可能하였으나 Comp-

uter의 出現으로 어느 정도 構造物의 最適設計에 關한 研究를 試圖할 수 있게 되었다.

構造物의 最適化 技法은 數學的 計劃(mathematical programming), 最適化 基準法(Optimality Criteria Approach)로 分類되며 初期에는 最適設計의 大部分은 數學的 最適化 技法을 構造分野에 應用한 것이었으나 構造剛性 行列(Structural Stiffness matrix)의 取扱이 어렵기 때문에 小規模 構造의 最適化에 局限되었다.

'60年代 中반까지의 最適設計 理論의 發展內容은 Watrotyski의 文獻<sup>(3)</sup>과 Shew Prager의 文獻<sup>(4)</sup>에 詳細히 收錄되어 있다.

1963年 Schmit L.A., Kicher T.P., Morrow W.H.<sup>(5)</sup>등은 처음으로 Steepest-descent 法을, Best<sup>(6)</sup>는 gradient projection 法을 非線型計劃의 構造最適化의 Algorithm으로 使用한 이래 非線型 構造最適化에 關한 研究가 많은 學者들에 의해 進行되어 왔다.

1964年 Moses<sup>(7)</sup>는 彈性理論에 의한 트러스構造物의 非線型 制約條件式을 Taylor 級數展開의 一次項으로 代置함으로써 얻어지는 逐次線型 計劃法을 처음으로 最適設計에 導入하였고 Dorn, Gomory, Greenberg<sup>(8)</sup>등이 트러스構造物의 幾何學的 形狀最適化에 關한 着想을 發表한 이래 이分野에 대한 研究가 進行되고 있으나 아직도 發展段階에 있다.

1966年 Gellatly, Gallagher<sup>(9)</sup>는 Schmit L.A. 등이 提案하고 있는 Steepest descent 法에 의한 構造最適의 體系를 수립한 후, 1967年 Ridha, Wright<sup>(10)</sup>와 1968年 Felton, Hofmeister<sup>(11)</sup>는 制約條件을 滿足하면서 目的函數의 負 gradient 方向으로 設計點이 進行하여 目的函數值를 改善하는 Steepest descent Algorithm을 構造最適化에 適用하였다.

1968年 Romstad, Wang Cohn<sup>(12)</sup>등에 의해 Moses가 提案한 S.L.P 法에 의한 트러스 및 뼈대構造物의 最適化에 關한 研究가 發展되었다. 또한 Pope<sup>(13)</sup>가 制約條件을 滿足하면서 目的函數와 制約條件式의 gradient가 이루는 方向內로 最適解에 收斂시키는 Zoutendijk의 usable-feasible direction 技法을 構造最適化에 導入한 후 1969年 Moses, Omoda<sup>(14)</sup>, 1970年 Fox Kapo-

or<sup>(15)</sup>는 Zoutendijk의 技法이 構造最適化에 效率的이라는 結論을 얻어냈다.

1969年 Johnson<sup>(16)</sup>은 LP 法에 의한 不靜定 트러스의 最適化를 試圖하였다. 應力制約만 考慮한 트러스構造最適化의 構造解析은 Force Method가 變位法보다 長點이 있다고 指摘하고 있으나 變位制約을 考慮할 경우에는 變位法이 效率的인 것으로 생각된다. 또한 Venkayya et al<sup>(17)</sup>은 變形 Energy의 分配를 考慮하여 3段階에서는 應力制約, 두번째 段階에서는 變位制約을 滿足시키는 2段階의 트러스構造物 最適化에 成功을 거두었다.

1971年 Moe<sup>(18)</sup>는 SUMT 法 中 Interior penalty 法을 뼈대構造物 最適化에 처음으로 導入하였고 Lapay, Goble<sup>(19)</sup>은 LP 法 및 SUMT 法에 의한 트러스構造物의 最適化를 試圖하여 SUMT 法이 效率的임을 立證하였고 Brown Ang<sup>(20)</sup>, Seaburg Salmon<sup>(21)</sup>등은 Gradient projection 法에 의한 構造最適化에 成功을 거두었다.

1973年 Templeman,<sup>(22)</sup> Morris<sup>(23)</sup>는 主函數(Primal function)를 近似化한 幾何的 計劃法에 의해서 트러스構造物의 最適化를 試圖하고 幾何的 計劃法에 의한 最適化에 關해 관심을 끌게 되었다.

'70年代부터 最近까지 發表된 論文을 調査해 보면 지금까지 開發되어 있는 數學的 計劃法을 利用하여 最適設計理論을 適用할 수 있는 構造 모델을 찾거나 大規模 最適化에 關한 研究에 集中되고 있다.

國內에서는 1973年 뼈대構造物의 離散型 最適設計에 關한 研究<sup>(24)</sup>를 필두로 1976年 SLP 法에 의한 철근 concrete 뼈대構造物의 最適化를 위한 最適設計에 關한 研究<sup>(25)</sup>, 1977年 幾何的 計劃法에 의한 構造시스템의 最適配置에 關한 研究<sup>(26)</sup>, 1980年 SUMT 法에 의한 鋼材트러스의 最適設計에 關한 研究<sup>(27)</sup>, 平面트러스構造物의 形狀最適化에 關한 研究<sup>(28)</sup> 등이 發表되었다.

實際 文獻調查 結果 發表된 幾何的 計劃法에 의한 構造物 最適化에 대한 文獻은 극히 소수에 지나지 않으며 그나마도 모두가 '70年代에 들어와 發表된 것으로 보아 幾何的 計劃法에 의한 構造物 最適化는 아직 發展段階에 있는 것 같다.

幾何的 計劃法은 目的函數 및 制約條件式의 非線型度가 높은 最適化問題를 二元問題(dual problem)로 變換하면 線型制約 條件式을 갖는 最適化問題가 形成되어 數值計算이 용이하고 效率的인 最適化 技法으로 알려져 있다. 文獻<sup>(22)</sup> 文獻<sup>(23)</sup>에서는 포지노미알(posynomial) 函數를 近似化하고 있으나 本研究에서는 이와 달리 文獻<sup>(31)</sup>에 詳細히 收錄된 Blau의 幾何的 計劃法을 適用한 트리스構造物의 最適化의 Algorithm을 簡略히 제시하고 이것에 의해 몇개의 數值例를 통하여 그 效率性, 適用性, 安全性을 分析하고 또한 最適技法으로는 SLP法을 適用한 文獻<sup>(29)</sup>, Feasible Direction法을 適用한 文獻<sup>(30)</sup>의 研究와도 比較 分析하므로써 幾何的 計劃法에 依해서 트리스構造物의 最適設計를 試圖할 경우 幾何的 計劃法의 效率性, 適用性, 安全性을 認識시키고자 한다.

## 2. 非線型 計劃問題의 構造最適化 問題形成

### 2.1 目的函數

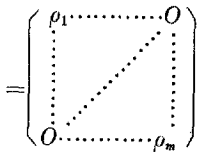
$m$  個의 部材로 이루어진 構造物의 重量을 最小化하기 위한 目的函數는 다음과 같다.

$$M = \{A\}^T \{\rho\} \{L\} \quad (2-1)$$

여기서  $M$  = 目的函數

$\{A\}$  = 部材의 斷面積 matrix =  $(A_1, \dots, A_m)^T$

$\{\rho\}$  = 單位重量 Matrix



$\{L\}$  = 部材의 길이 Matrix =  $(L_1, \dots, L_m)^T$

### 2.2 構造解析方程式

部材의 數가  $m$  이고 自由度의 數가  $n$  인 構造物의 構造解析方程式은 變位法에 의하여 다음과 같이 誘導된다. 各 部材의 變形은 各 部材 兩端의 變位와 같아야 하므로 適合條件式은 다음과 같다.

$$\{u\} = [\beta] \{q\} \quad (2-2)$$

構造物이 平衡狀態를 유지하기 위해서는 各 節點에서의 各 部材力의 合이 各 部材에 加해진 節點荷重과 같아야 하므로 平衡條件式은

$$\{Q\}^{NL} = [\beta]^T \{F\}, \quad NL=1, \dots, L \quad (2-3)$$

여기서  $NL$ : 荷重條件의 數  
變形과 部材力 關係式은 다음과 같이 表示된다.

$$\{F\} = [K] \{u\} \quad (2-4)$$

式(2-1) 및 式(2-3)을 式(2-2)에 代入하면

$$\{Q\}^{NL} = [\beta]^T [\bar{K}] [\beta] \{q\} = [K] \{q\} \quad (2-5)$$

여기서

$\{u\}$  = 部材變位の column matrix =  $(u_1, \dots, u_m)^T$

$[\beta]$  = 位相連結 matrix (Topological incidence Matrix)

$\{q\}$  = 節點變位の column matrix =  $(q_1, \dots, q_n)^T$

$\{Q\}$  = 節點荷重의 column matrix =  $(Q_1, \dots, Q_n)^T$

$\{F\}$  = 部材力의 column matrix =  $(F_1, \dots, F_m)^T$

$[\bar{K}]$  = 部材剛性對角 matrix =  $\begin{pmatrix} \bar{K}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{K}_m \end{pmatrix}$

$$\text{但 } \bar{K}_i = \frac{E_i A_i}{L_i} \quad (2-6)$$

$[K]$  = 剛性 matrix (stiffness matrix)

$$= [\beta]^T [\bar{K}] [\beta]$$

### 3) 制約條件式

#### (1) 應力制約條件式 (Stress Constraints)

應力制約條件式은 上記의 式(2-5) 및 式(2-2)을 結合하여 表示하면 다음과 같다.

$$\{\sigma_a\} - [B] [\bar{K}] [\beta] [K]^{-1} \{Q\}^{NL} \geq 0 \quad (2-7)$$

여기서

$$[B] = \begin{pmatrix} 1/A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/A_m \end{pmatrix}$$

但  $A_i = i$  部材의 斷面積

$\{\sigma_a\}$  = 許容應力 matrix =  $(\sigma_{a1}, \dots, \sigma_{am})$

#### (2) 挫掘應力制約條件式 (Buckling Constraints)

壓縮力을 받는 truss 部材의 挫掘應力의 制約條件式을 表示하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma_B\} \\ (f \times 1) \end{Bmatrix} - [C] \begin{Bmatrix} \{\theta\} \\ (f \times f) \end{Bmatrix} \geq 0 \quad (2-8)$$

여기서

$\{\sigma_B\}$  = 許容挫掘應力 matrix =  $(\sigma_{B1}, \dots, \sigma_{Bf})^T$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1/A_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ & & & 1/A_f \end{bmatrix}$$

$$\{\theta\} = (\theta_1, \dots, \theta_f)^T$$

$$\text{但 } \theta_i = \frac{\pi^2 E \alpha_i A_i}{L_i^2}$$

$\alpha_i$  =  $i$  部材斷面の 形狀에 關係되는 常數

### (3) 變位制約條件式(Displacement Constraints)

어떤 構造物을 設置할 경우 變位에 制約을 두는 경우가 있으므로 이 變位制約條件式을 고려하여야 한다. 變位制約條件式을 表示하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \{q_a\} \\ (n \times 1) \end{Bmatrix} - [K]^{-1} \begin{Bmatrix} \{Q\} \\ (n \times n) \end{Bmatrix} \geq 0 \quad (2-9)$$

여기서

$\{q_a\}$  = 許容變位 matrix =  $(q_1, \dots, q_n)^T$

### (4) 設計變數限界制約條件式(Side Limit Constraints)

構造物 設計時 設計變數의 上·下限界를 定할 경우가 생기게 되며, 最適設計時 斷面積이 (-)가 되는 등의 不合理한 解가 나오지 않도록 하기 위해서 algorithm 에 上·下限界値가 必要하다. 이 制約條件式을 表示하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{array}{l} \{X_u\} - \{X\} \geq 0 \\ \{X\} - \{X_L\} \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2-10)$$

여기서

$\{X\} = (A_1, \dots, A_m, X_1, \dots, X_f)^T$

$X_1, \dots, X_f$  는 挫掘에 關係되는 設計變數인

$\{X_u\} = (X_{1u}, \dots, X_{mu})^T$  : 上限値

$\{X_L\} = (X_{1L}, \dots, X_{mL})^T$  : 下限値

앞에서 誘導한 制約條件式을 目的函數와 함께 非線形問題로 綜合하면 다음과 같다.

Minimize :  $\{A\}^T \{L\}$

Subject to :  $\{\sigma_a\}^{NL} - [B][K]^{-1}[\beta]$

$$[K]^{-1} \{Q\}^{NL} \geq 0$$

$$\{\sigma_B\} - [C] \{\theta\} \geq 0$$

$$\{q_a\}^{NL} - [K]^{-1} \{Q\}^{NL} \geq 0 \quad (2-11)$$

$$\{X_u\} - \{X\} \geq 0$$

$$\{X\} - \{X_L\} \geq 0$$

여기서  $NL$  = 載荷條件數

## 3. 幾何的 計劃法에 依한 最適化

### 3.1 一般의인 幾何的 計劃法

幾何的 計劃問題의 一般의인 形態는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimize : } y_0(\vec{x}) = \sum_{t=0}^{T_0} C_{0t} \prod_{n=1}^N x_n^{a_{0t}n} \\ \text{Subject to; } y_m(\vec{x}) \leq 1 \end{array} \right\} \quad (3-1)$$

여기서

$$y_m(\vec{x}) = \sum_{t=1}^{T_m} C_{mt} \prod_{n=1}^N x_n^{a_{mt}n} \quad (3-2)$$

$$m = 1, \dots, M$$

위와 같은 函數  $y_m(\vec{x})$  를 포지노미알(Posynomial) 函數라고 하며,  $m=0$  이면

$$y_0(\vec{x}) = \sum_{t=1}^{T_0} C_{0t} \prod_{n=1}^N x_n^{a_{0t}n} = \sum_{t=1}^{T_0} C_{0t} P_t(\vec{x})$$

가 되어 이것이 目的函數가 된다.

$m = 1, \dots, M$  인 경우에는

$$y_m(\vec{x}) = \sum_{t=1}^{T_m} C_{mt} \prod_{n=1}^N x_n^{a_{mt}n} = \sum_{t=1}^{T_m} C_{mt} Q_{mt}(\vec{x})$$

가 되며 이는  $M$  項의 制約條件式이다.

여기서

$$P_t(\vec{x}) = \prod_{n=1}^N x_n^{a_{0t}n}, \quad t = 1, \dots, T_0$$

$$Q_{mt}(\vec{x}) = \prod_{n=1}^N x_n^{a_{mt}n} \quad \left( \begin{array}{l} t = 1, \dots, T_m \\ m = 1, \dots, M \end{array} \right)$$

$T_0$  = 目的函數項의 數

$T_m = i_m$  번째 制約條件式의 項의 數

$M$  = 制約條件式의 數

$N$  = 設計變數의 數

式 (3-1)과 같은 最適化 問題에서 目的函數와 制約條件이 포지노미알 函數로 된 特殊한 形態의 數學的 計劃問題를 幾何的 計劃法이라고 한다. 따라서 幾何的 計劃問題를 포지노미알項  $P_t$  및  $Q_{mt}$ 을 使用하여 다시 表現해 보면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \text{Minimize; } y_0(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^{T_0} C_{0i} \cdot P_i(\vec{x}) \\ \text{Subject to; } y_m(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^{T_m} C_{mi} Q_{mi}(\vec{x}) \leq 1 \\ m &= 1, \dots, M \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

式 (3-3)과 같은 最適化 型式을 二元函數로 代置하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \text{Maximize; } V(\vec{\delta}) &= \prod_{j=0}^M \left\{ \lambda_j^{T_j} \prod_{i=1}^{T_j} \left( \frac{C_{ji}}{\delta_{ji}} \right)^{\delta_{ji}} \right\} \\ \text{Subject to; } \lambda_j &= \sum_{i=1}^{T_j} \delta_{ji}, \quad j=1, \dots, M \\ \sum_{i=0}^{T_0} \delta_{0i} &= 1 \\ \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^{T_j} a_{ji} \delta_{ji} &= 0, \quad j=1, \dots, N \\ \delta_{ji} &\geq 0 \quad (\text{모든 } j, i \text{ 에 대해}) \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

여기서

$\delta_{ji}$ ; 二元變數(dual variable)

### 3.2 幾何的 計劃法에 依한 트러스構造物의 最適化

트러스構造物의 最適化를 위해 式 (2-11)에서 誘導된 非線型 計劃問題中 應力制約을 考慮한 幾何的 計劃問題의 二元函數를 求하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \text{Maximize; } V(\vec{\delta}) &= \prod_{i=1}^m \lambda_i^{L_i} \prod_{t=1}^{T_i} \left( \frac{L_i}{\delta_{it}} \right)^{\delta_{it}} \left( \frac{z_i}{\delta_{it}} \right)^{\delta_{it}} \\ \text{Subject to; } [A_p] [A] &= [G] \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

여기서

$L_i = i$  번째 部材의 길이

$$\{z\} = [D][H][\tilde{K}][\beta]([\beta^T][\tilde{K}][\beta])^{-1}$$

$z_i = \{z\}$ 의  $i$  번째 成分

$$[H] = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \sigma_{a1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ & & & \sigma_{an} \end{pmatrix}$$

$$[A_p] = \begin{pmatrix} 1, 1, 1, \dots, 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1, 0, 0, \dots, 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0, 1, 0, \dots, 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m+1 & 0, 0, 0, \dots, 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 \\ m+2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{A\}^T = (\delta_{01}, \dots, \delta_{0m}, \delta_{11}, \dots, \delta_{m1})^T$$

$$\{G\}^T = (1, \dots, 0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$$

트러스構造物의 最適化를 위한 式 (2-11)에서 誘導된 非線型 計劃問題中 變位制約을 考慮한 幾何的 計劃問題의 二元函數를 求하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \text{Maximize; } V(\vec{\delta}) &= \prod_{i=1}^m \prod_{t=1}^{T_i} \left( \frac{L_i}{\delta_{it}} \right)^{\delta_{it}} \left( \frac{F_{it}}{\delta_{it}} \right)^{\delta_{it}} \\ \text{Subject to; } [A_p'] [A'] &= \{G'\} \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

여기서

$$\{F_{it}\} = | [H^T] ([\beta]^T [\tilde{K}] [\beta])^{-1} [Q]^{NL} |$$

$F_{it}$ ;  $\{F_{it}\}$ 의  $i$  번째의 成分

$$[H^T] = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ q_{a1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & q_{af} \end{pmatrix}$$

$$[A_p'] = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1, 0, \dots, 0 & -1 & \dots & -1, & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ (f+1) & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0, & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ (f+2) & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ (2f+1) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & \dots & -1 \\ \{G'\} & = (\delta_{01}, \dots, \delta_{0m}, \delta_{1m}, \dots, \delta_{mf}, \lambda_1, \dots, \lambda_f) \end{pmatrix}$$

### 4. 最適化 Algorithm

本 研究에서 使用된 알고리즘은 다음과 같이 要約할 수 있다.

- (1) 初期值 附與

(2) 目的函數, 制約條件式의 直交條件 및 初期乘, 初期重量의 決定

(3) 첫번째의 反復試行이면 다음 段階로 進行한다. 그렇지 않은 경우에는 目的 函數, 制約條件의 새로운 直交條件 및 乘數를 決定한다.

(4) 다음의 設計點  $\bar{X}^{n+1}$  및 二元函數의 값  $V^{n+1}$

은 다음과 같이 求해진다.

$$\bar{X}^{n+1} = \bar{X}^n \exp(\Delta I_n \bar{X}^n)$$

$$V^{n+1} = V^n \exp(\Delta I_n V^n)$$

(5) 앞의 過程에서 許容值에 收斂하거나 許容 反復回數에 到達하면 정지하거나 그렇지 않으면 (3)의 段階로 進行한다. 이상의 過程에 關한 Flow Chart는 그림 1과 같다.

### 5. 數值例 및 結果分析

앞에서 論議한 幾何的 計劃法의 Algorithm 妥當性, 效率性 및 收斂性을 分析하기 위하여 그림 2~그림 11과 같은 트러스構造物의 節點數, 部材數, 初期 設計點을 變化시키고 最適化를 試圖한다. 또한 結果의 效率性和 妥當性, 安定性을 比較하기 위하여 그림 2 및 그림 5의 構造物에 對해서 本 研究의 設計結果와 文獻<sup>(29)</sup>, 文獻<sup>(30)</sup>의 設計結果와를 比較한다.

#### 5.1 7 部材의 트러스

本 研究의 Algorithm 이 適用될 7部材 트러스의 載荷條件 및 制約條件은 표 1, 初期值와 最適解 및 各 部材의 應力은 표 2, 各 節點의 變位는 표 3에, 應力制約條件인 경우의 反復回數에 對한 目的函數의 값은 그림 2와 같고 反復回數에 對한 各 部材의 斷面積 값은 그림 3과 같다. 또한 처짐制約인 경우의 初期值와 最適解 및 各 部材의 應力은 표 4, 各 節點의 變位는 표 5에, 反復回數에 對한 目的函數值는 그림 2와 같고, 反復回數에 對한 各 部材의 斷面積 값은 그림 4와 같다.

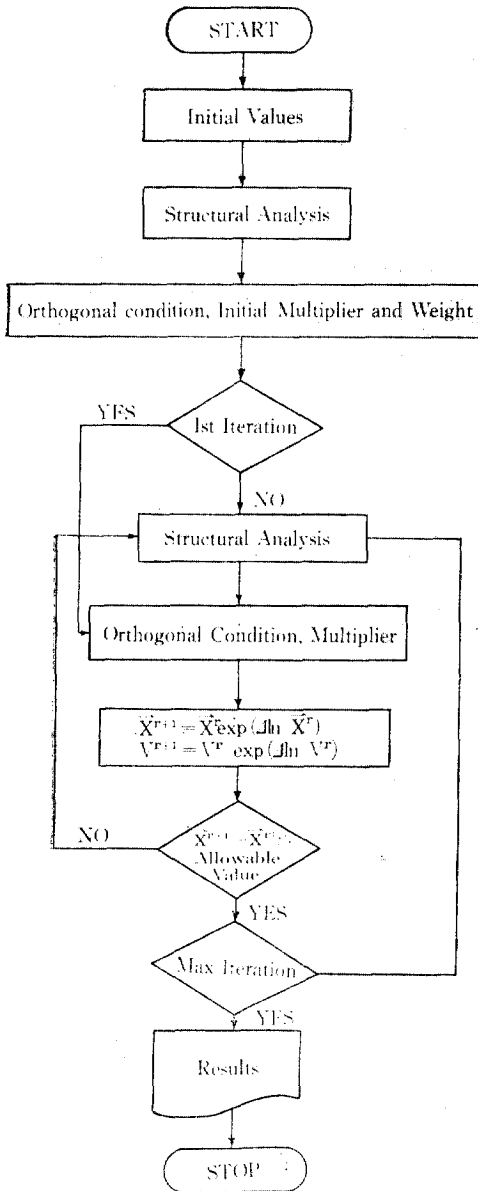


그림 1. 幾何的 計劃法의 flow chart

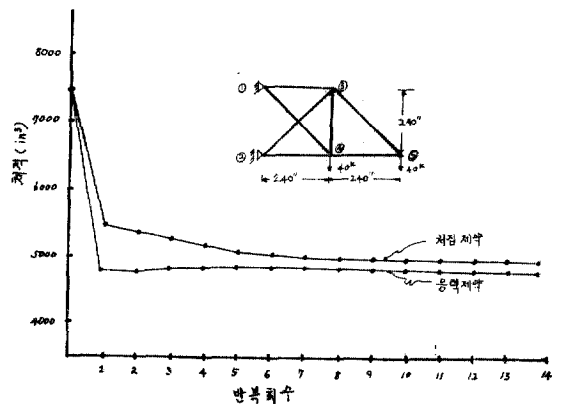


그림 2. 반복회수에 대한 목적함수치

표 1. 재하조건 및 제약조건

조건의 종류		절	점	x방향의 하중	y방향의 하중
재하조건	제 1 재 하		4	0	40 K
	제 2 재 하		5	0	40 K
제약조건	응력제약(ksi)	$-15 \leq \sigma_x \leq 20$			
	변위제약(inch)	$-30'' < \delta_x < 30''$			
단 성 계 수 (kips)		1000			

표 2. 부재트러스의 설계변수의 초기치와 최적해 및 각부재응력

부	재	1	2	3	4	5	6	7	목적함수
초	기	치	3.846	3.846	3.846	3.846	3.846	3.846	7608.2881
최	적	치	3.454	1.473	2.658	3.409	0.958	2.669	4879.2666
응	력	재 하 조건 1	-6.03	20.0	-10.2	5.623	20.0	0.0	0.0
	재 하 조건 2	-15.0	11.34	-15.0	20.0	-12.32	-15.0	20	

표 3. 각 절점의 변위

절	점	1	2	3	4	5
재하조건 1	X	0.0	0.0	-1.35	1.45	1.45
	Y	0.0	0.0	6.25	11.05	9.04
재하조건 2	X	0.0	0.0	-4.80	3.60	7.20
	Y	0.0	0.0	12.00	9.04	33.60

표 4. 초기치와 최적해 및 각 부재응력

부	재	1	2	3	4	5	6	7	목적함수	
초	기	치	3.846	3.846	3.846	3.846	3.846	3.846	7608.2881	
최	적	치	2.5614	0.0017	3.6189	5.1190	0.0012	2.5602	3.6206	4915.7793
응	력	재 하 조건 1	-5.21	11034.5	-10.42	5.208	22048.2	0.00		
	재 하 조건 2	-15.62	10.42	-15.63	15.63	-10.42	-15.62	15.62		

표 5. 각 절점의 변위

절	점	1	2	3	4	5
재하조건 1	X	0.00	0.00	-1.25	1.25	1.25
	Y	0.00	0.00	6.25	5.30	5.30
재하조건 2	X	0.00	0.00	-3.75	3.75	7.50
	Y	0.00	0.00	11.25	8.75	30

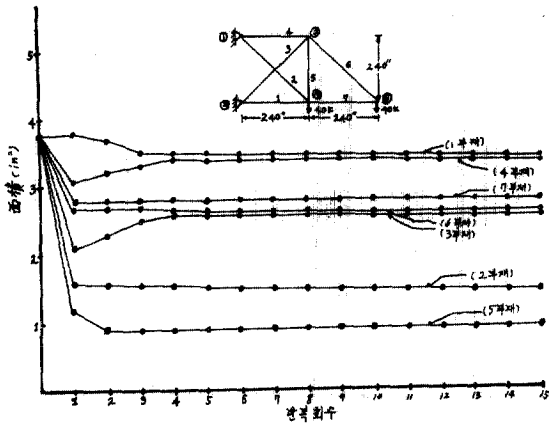


그림 3. 반복회수에 대한 각 부재 단면적 수렴도

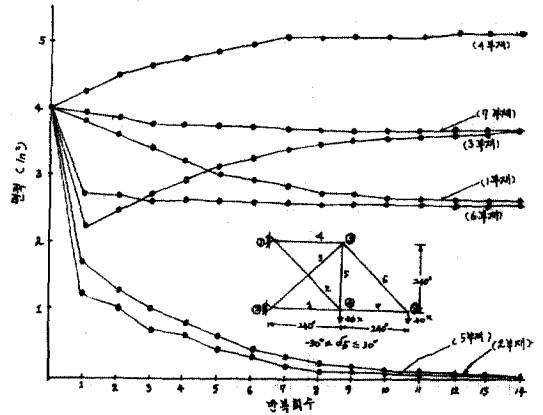


그림 4. 반복회수에 대한 각 부재 단면적 수렴도

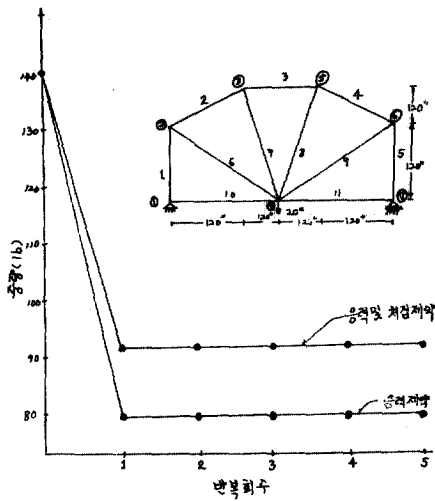


그림 5. 반복 회수에 대한 목적함수치

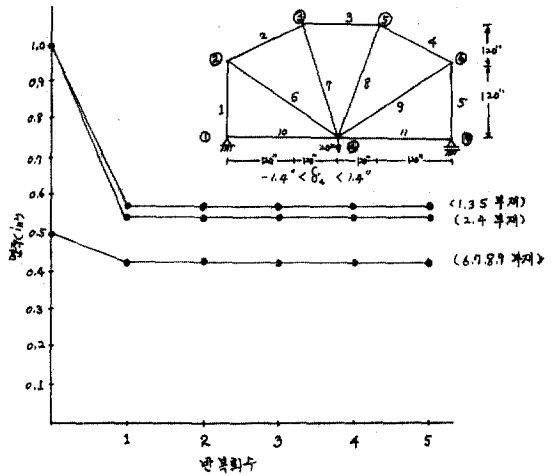


그림 6. 반복회수에 대한 각 부재 단면적 수렴도

표 6. 재하조건 및 제약조건

조건의 종류		절	X방향 하중	Y방향 하중
재하조건	단일재하	4	0	20000 lb
제약조건	응력제약 (psi)		$-20000 \leq \sigma_n \leq 20000$	
	변위제약 (psi)		$-1.4'' \leq \delta_n \leq 1.4''$	
탄성계수 (psi)			$1 \times 10^7$	

### 5.2 11 部材 트러스

本 研究의 Algorithm 이 適用될 11 部材 트러스의 載荷條件 및 制約條件은 표 6, 應力制約인 경우의 初期値와 最適解 및 各 部材의 應力은 표 7, 各 節點의 變位는 표 8에, 反復回數에 對

한 各 部材斷面積 값은 그림 6과 같다. 또한 應力 및 처짐制約인 경우의 初期値와 最適解 및 應力은 표 9, 各 節點의 變位는 표 10, 反復回數에 對한 目的函數値는 그림 4와 같고 反復回數에 對한 各 部材斷面積 값은 그림 7과 같다.



표 7. 11부재 트러스의 초기치와 최적해 및 각 부재응력

부재	1 및 2	2 및 4	3	6 및 9	7 및 8	10	11	목적함수
초기치	1.0	1.0	1.0	0.5	0.5	0.1	0.1	140.40676
최적치	0.500	0.471	0.500	0.373	0.373	0.0	0.0	80.00000
응력(단일재하)	-20.000	-20.000	-20.000	20.000	20.000	-0.0137	0.0137	

표 8. 11부재 트러스의 결점의 변위

결점	1	2	3	4	5	6	7	
재하조건	X	0.00	-0.08	-0.24	$3.28 \times 10^{-7}$	0.24	0.08	0.00
(단일재하)	Y	0.00	0.24	0.88	1.60	0.88	0.24	0.00

표 9. 11부재 트러스의 초기치와 최적해 및 각 부재응력

부재	1 및 5	2 및 4	3	6 및 9	7 및 8	10 및 11	목적함수
초기치	1.0	1.0	1.0	0.5	0.5	0.1	1404.0676
최적치	0.571	0.539	0.571	0.426	0.426	0.426	914.2855
응력(단일재하)	-17500	-17500	-17500	17500	17500	$1.18 \times 10^{-2}$ $-1.18 \times 10^{-2}$	

표 10. 11부재 트러스의 각 부재의 변위

결점	1	2	3	4	5	6	7	
재하조건	X	0.00	$-7.0 \times 10^{-2}$	$-2.1 \times 10^{-2}$	0.00	$2.1 \times 10^{-1}$	$7.0 \times 10^{-2}$	0.00
(단일하중)	Y	0.00	$2.1 \times 10^{-1}$	$7.7 \times 10^{-1}$	1.40	$7.7 \times 10^{-1}$	$2.1 \times 10^{-1}$	0.00

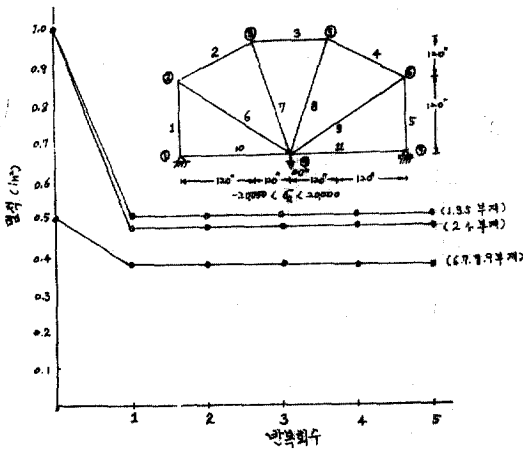


그림 7. 반복회수에 대한 각 부재 단면적 수렴도

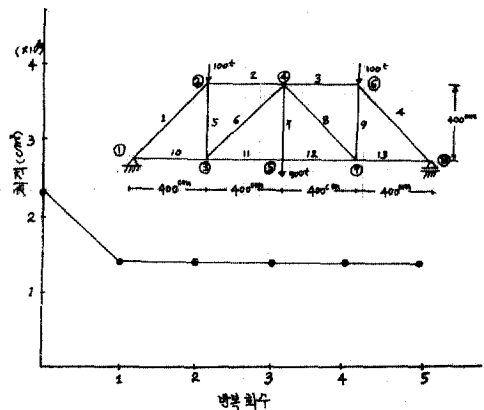


그림 8. 반복회수에 대한 목적함수치

표 11. 재하조건 및 제약조건

조건의 종류		절점	X방향하중	Y방향하중
재하조건	제 1 재하 (t)	5	0	700
	제 2 재하 (t)	2	0	100
		6	0	100
제약조건	응력 제약 (kg/cm <sup>2</sup> )	$-2000 \leq \sigma_a \leq 2000$		
	변위 제약 (cm)	-		
탄성계수 (kg/cm <sup>2</sup> )		$2.1 \times 10^7$		

표 12. 13부재 트러스의 초기치와 최적해 및 각 부재응력

부재	재	1 및 4	2 및 3	5 및 9	6 및 8	7	10 및 13	11 및 12	목적함수
초기치		400	400	400	400	400	400	400	2345097.0
최적치		247.49	175.00	175.00	247.49	350.00	175.00	350.00	1400000.5
응력	제 1 재하	-2000	-2000	-2000	-2000	2000	2000	2000	
	제 2 재하	-571.4	-571.4	571.4	$-5.05 \times 10^{-4}$	0.0	571.4	285.7	

5.3 13부재 트러스

本研究의 Algorithm이 適用될 11部材 트러스의 載荷條件 및 制約條件은 표 11, 初期値와 最適解 및 各部材應力은 표 12에, 反復回數에 對한 目的函數 값은 그림 8과 같고 反復回數에 對한 各部材斷面積 값은 그림 9와 같다.

5.4 20부재 트러스

20部材 트러스의 載荷條件 및 制約條件은 표 13, 初期値와 最適解는 표 14에, 反復回數에 對한 目的函數 값은 그림 10과 같고 反復回數에 對한 各部材斷面積 값은 그림 11과 같다.

표 13. 재하조건 및 제약조건

조건의 종류	절점	X방향하중	Y방향하중
재하조건 (단일재하) (t)	3, 4, 5, 6, 7, 8	$\pm 50$	0
	9, 10	$\pm 50$	400
제약	응력 제약 (kg/cm <sup>2</sup> )	$-2000 \leq \sigma_a \leq 2000$	
조건	변위 제약 (cm)	-	
탄성계수 (kg/cm <sup>2</sup> )		$2.1 \times 10^7$	

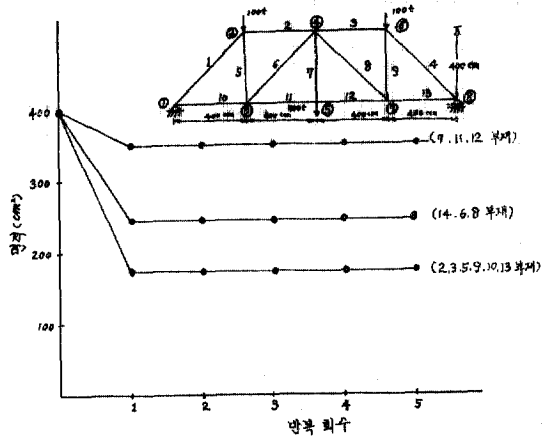


그림 9. 반복회수에 대한 각 부재 수렴도

5.5 本研究와 文獻(29) 및 文獻(30)과의 比較

本研究에서의 設計結果와 文獻(29) 및 文獻(30)의 研究結果와를 比較하고자 本研究에서도 文獻(29) 및 文獻(30)과 同一한 設計條件을 채택하였다(표 1 참조).

표 2의 結果와 文獻(29)의 結果를 表示하면 표

표 14. 20부재 트러스의 초기치와 최적해

부재	1및 4	2및 3	5	6및 9	7및 8	10	11및 14	12및 13	15	16및 19	17및 18	20	목적함수
초기치	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300	699411.25
최적치	198.04	2.77	27.09	199.87	0.11	25.23	199.89	0.01	25.18	199.92	0.01	25.07	170588.44

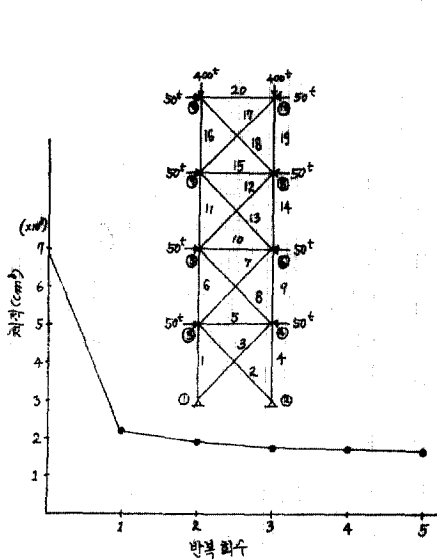


그림 10. 반복회수에 대한 목적함수치

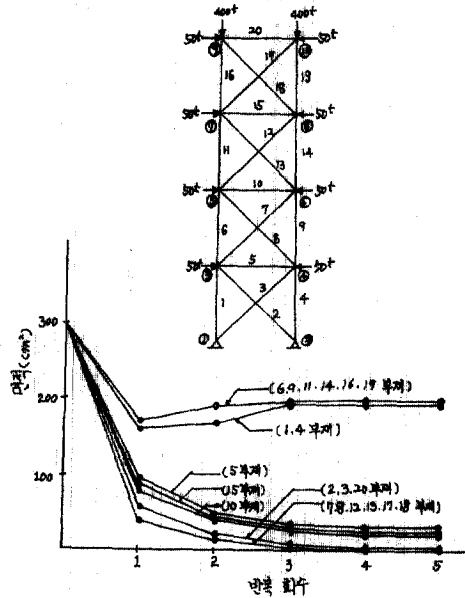


그림 11. 반복회수에 대한 각 부재 수렴도

15와 같고, 표 7의 결과와 문헌<sup>(30)</sup>의 결과를 표시하면 표 16과 같다.

本研究에서의 수렴속도(反復回數)와 문헌<sup>(29)</sup>, 문헌<sup>(30)</sup>에서의 수렴속도의 비교는 표 17과 같다.

7. 結果分析

위와 같은 4개의 트러스構造物에 幾何的計劃

표 15. 본 연구와 문헌<sup>(29)</sup>와의 비교표

단면적 (m <sup>2</sup> )	부재							반복회수(회)
	1	2	3	4	5	6	7	
목적함수								
초기치	7608.288	3.846	3.846	3.846	3.846	3.846	3.846	3.846
본 연구 결과	4878.2666	3.454	1.473	2.658	3.409	0.958	2.669	2.828
문헌 <sup>(29)</sup> 의 결과	4879.23	3.454	1.473	2.658	3.410	0.959	2.667	2.828

표 16. 본 연구와 문헌<sup>(30)</sup>과의 비교표

단면적 (m <sup>2</sup> )	부재							반복회수(회)
	1.5	2.4	3	6.9	7.8	10	11	
목적함수								
초기치	140.40676	1.0	1.0	1.0	0.5	0.5	0.1	0.1
본 연구 결과	80.0	0.5	0.471	0.500	0.373	0.373	0	0
문헌 <sup>(30)</sup> 의 결과	80.0	알 수 없음						

표 17. 수렴속도의 비교표

구조모형	제약조건	부개수	절점수	수렴속도(반복 회수의 수)			비 고
				기하적계획법	문 헌 <sup>(29)</sup>	문 헌 <sup>(30)</sup>	
case 1	응 력 제 약 변 위 계 약	7	5	7	7	—	그 립 2
case 2	응 력 제 약 변 위 계 약	11	7	1	—	알수없음	
case 3	응 력 계 약	13	8	1	—	—	그 립 8
case 4	응 력 계 약	20	10	4	—	—	그 립 11

法을 適用한 경우, 初期 設計值의 變化에 따르는 設計結果를 표 2, 표 4, 표 7, 표 9, 표 12, 표 14에 表示하였다. 이들을 중심으로 例題의 結果를 分析하면 다음과 같다,

① 그림 5, 그림 8로부터 相異한 初期設計點에 對해 1회 反復試行으로 Oscillation 現象없이 最適解에 收斂하였다.

② 그림 2로부터 7회 反復試行으로, 그림 10으로부터 4회 反復試行으로 Oscillation 現象없이 最適解에 收斂하고 있다.

③ 本 研究의 妥當性을 檢討하기 위하여 文獻<sup>(29)</sup>의 構造模型에 載荷條件과 應力制約, 初期假定值를 同一하게 取하였을 때 本 研究의 結果와 文獻<sup>(29)</sup>의 結果와는 同一한 反復試行으로 同一한 最適解를 얻었다(표 15 참조). 또한 文獻<sup>(30)</sup>의 構造模型에 載荷條件과 應力制約을 同一하게 取했을 때 本 研究의 結果와 文獻<sup>(30)</sup>의 結果는 同一하였으며, 本 研究에서는 1회만의 反復試行으로 最適解에 收斂하고 있다(표 16 참조).

同一 條件下에서 最適解를 얻는데 所要되는 計算時間은 比較할 수 없으므로 計算의 反復回數만으로 볼 때 幾何的 計算法도 트러스構造物의 最適化 Algorithm으로써 效率的이라는 結論을 얻었다.

④ 표 17의 比較表에서 結果를 綜合해 보면 全般的으로 最適解에 到達하는 收斂速度는 節點數, 部材斷面의 group의 數 및 初期假定值에 別影響없이 1~7회 反復試行에서 最適化가 可能하다는 事實을 發見하였다.

⑤ 그림 6, 그림 7, 그림 9로부터 相異한 初期設計點에 對해 1회 反復試行으로 Oscillation 現象없이 各 部材의 斷面積이 收斂하고 있다.

⑥ 그림 3, 그림 11로부터 應力制約인 경우는 4회 反復試行으로 Oscillation 現象없이 各 部材의 斷面積이 收斂하고 있으나 그림 4로부터 처짐制約을 考慮할 경우 各 部材의 斷面積은 Oscillation 現象은 없으나 反復回數는 9회로 增加된다는 事實을 發見하였다.

### 8. 結 論

本 研究에서는 幾何的 計算法에 依하여 鋼材 平面트러스의 最適設計를 研究한 것으로 이에 適用된 Algorithm에 依한 最適解를 얻기 위하여 이 Algorithm의 收斂性, 安定性, 適用性, 效率性을 數值中心으로 分析하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

① 最適解를 求하기 위한 最適化의 反復試行過程에서 Oscillation 現象에 依하여 發散하지 않는다는 事實을 알았다.

② 各種 構造模型에 本 研究의 Algorithm을 適用한 結果, 그 構造의 節點數, 部材數, 載荷條件을 變化시켜도 다른 方法(文獻<sup>(29)</sup>)과 比較(最適解 設計過程의 反復回數를 中心으로) 分析할 때 最適解를 얻는 速度가 同一하고 大體로 1~7회의 反復試行만으로 最適解를 얻을 수 있다는 事實을 알았다.

③ 各 部材別 收斂 反復回數는 1~7회가 되나 大體로 應力制約인 경우보다 變位制約의 경우가 反復回數가 增加한다고 判斷된다.

本 研究를 通하여 幾何的 計算法도 트러스構造物最適設計에 適用 可能한 Algorithm이라고 判斷되며 앞으로 트러스의 形狀最適化에 擴張 研究하고자 한다.

### 參 考 文 獻

1. Maxwell, *Scientific Papers*, 1869, Reprinted by Dover Publications, New York, 1952.
2. Schmit, L.A. Structural Design by Systematic Synthesis, *2nd. Nat. Conf. on Electronic Computation*, ASCE 1960, pp.105-132.
3. Wasiutynski Zbigniew and Brandt, Andrezi, The Present of Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 16, No. 5, May, 1963.
4. Shew C.Y. and Prager W. Recent Development in Optimal Structural Design, *Applied Mechanics Reviews*. Vol. 21, No. 10, October 1968, pp. 985, 992.
5. Schmit L.A. Kicher, T.P. and Morrow W.M. "Structural Synthesis Capability for Integrally Stiffened Waffle Plates," *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 12, December, 1963, p.2820.
6. Best, G., A Method of Structural Weight Minimization Suitable for High Speed Digital Computers, *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 2, February, 1963, pp.478-479.
7. Moses, F., Optimum Structural Design Using Linear Programming, *Journal of the structural Division, Proc. ASCE Vol. 90, No. ST6*, December, 1964, pp.89-104.
8. Dorn W.S. Gomory, R.E. and Greenberg, H.J. Automatic Design of Optimal Structures, *Journal de Mecanique*, Vol. 3, No. 1, March, 1964, pp.25-53.
9. Gellatly, R.A. and Gallagher, R.H., A Procedure for Automated Minimum Weight Structural Design, Part I: Theoretical Basis; Part II: Applications, *Aeronautical Quarterly*, Vol. 17, 1966, pp.216-230, and pp.332-342.
10. Ridha R.A. and Wright, R.N., Minimum Cost Design of Frames, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 93, No. ST4*, August, 1967, pp.165-183.
11. Felton H.P. and Hofmeister L.D., Optimized Components in Truss Synthesis, *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 12, December, 1968, pp. 2434-2436.
12. Romstad, K.M. and Wang, C.K., Optimum Design of Framed Structures, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 94, No. ST 12*, December, 1968, pp.2817-1845.
13. Pope, G.G., The Design of Optimum Structures of Specified Basic Configuration, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 10, October, 1968, pp.251-263.
14. Moses, F. and Onoda, S. Minimum Weight Design of Structures with Application to Elastic Grillages, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vo. 1, No. 4, 1969, pp.311-331.
15. Fox. R.L. and Kapoor, M.P., Structural Optimization in Dynamics Response Regime: A Computational Approach, *AIAA Journal*, Vol. 8, No. 10, October, 1970, pp.1798-1804.
16. Johnson, D. and Brotton, D.M., Optimum Elastic Design of Redundant Trusses, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 95, No. ST12*, December, 1969, p p.1589-1610.
17. Venkayya, V.B., Khot, N.S. and Reddy, V.S., Energy Distribution in an Optimum Structural Design, *Technical Report AFFDLTR-68-158*, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 45433, March, 1969.
18. Kavlie, D. and Moe, J., Automated Design of Frame Structures, *Journal of Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 97, No. ST1*, January, 1971, pp.33-62.
19. Lapay, W.S. and Goble, G.G., Optimum Design of Trusses for Ultimate Loads, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 97, ST1*, January, 1971, pp.157-174.
20. Brown, D.M. and Ang, A.H.S., Structural Optimization by Nonlinear Programming, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 92, No. ST6*, December, 1966, pp.319-340 and Vol. 93, No. ST5, October, 1967, pp.618-619.
21. Seaburg, P.A. and Salmon, C.G., Minimum Weight Design of Light Gage Steel Members, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 97, No. ST1*, January, 1971, pp.203-222.
22. Templeman, A.B., Optimization in Structural Design, *Iutam Symposium Warsaw/Poland*, 1973, pp.327-349.

23. Morris, A.J., The Optimization of statically Indeterminate Structures by Means of Approximate Geometric Programming, *NATO/AGARD symp. on Structural Optimization*, Milano 1973, AGA-RDCP, 123.
24. 趙孝男, 卍대構造物의 離散型 最適設計에 關한 研究, 大韓土木學會誌, 第21卷, 第3號, 1973, pp. 107-120.
25. 邊根周, 黃鶴周, 鐵筋콘크리트 卍대構造物의 最適化를 위한 最適斷面決定에 關한 研究, 大韓土木學會誌, 第24卷, 第3號, 1976, pp.105-116.
26. 趙孝男, 構造시스템의 最適配置에 關한 研究, 大韓土木學會誌, 第25卷, 第3號, 1977, 9, pp.91~99.
27. 李奎遠, 邊根周, 黃鶴周, "SUMT 法에 依한 鋼材 truss 의 最適設計에 關한 研究, 大韓土木學會誌, 第28卷, 第4號, 1980.8. pp.119-130.
28. 李奎遠, "平面 truss 構造物의 形狀最適化에 關한 研究", 延世大學校 大學院(博士學位論文), 1980.
29. Kenneth F. Reinschmidt Alan D. Russell, "Linear Methods in Structural Optimization," *Research Report R70-41*, The Departments of Civil Engineering Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts, July 1970.
30. Vanderplaats. GN., and Moses, F., "Automatic design of elastic trusses for Optimum Geometry." *ph Dissertation* 1971, Case Western Reserve University.
31. Jamesl, Kuester and Joeh, Mize, "*Optimization Techniques with Fortran*", McGraw-Hill Book company, 1973, pp.135-154.

(接受 : 1983. 1. 31)