

港内の 長週期波 解析을 위한 二次元 不定流의 數學的 模型

A Mathematical Modeling of Two-Dimensional Unsteady
Flow for Long Waves in a Harbor

| | | |
|------|------|------|
| 李 | 鍾 | 泰* |
| Lee, | Jong | Tae |
| 李 | 元 | 煥** |
| Lee, | Won | Hwan |

Abstract

A mathematical model for the two-dimensional unsteady flow was developed by introducing Abbott's implicit finite difference operator and double sweep algorithm, which could be applied to simulate the response of a harbor against the intrusion of long waves through the entrance connected to open sea.

In order to improve its accuracy corresponding to the field phenomena, bottom resistance, Coriolis force, wind effect terms were included and wave direction and radiating effect was considered.

The result of seiche test was always stable and the amplitude was accurate. Some phase shift was occurred, but it could be reduced by using small values of Courant number and many points per a wave length as well.

A comparison with the Ippen and Goda's theoretical and hydraulic experimental works was fulfilled.

要 旨

長週期波에 의한 港内の 反應을 豫測하기 위하여 非線型 偏微分方程式으로 表現되는 2次元 不定流의 運動方程式과 連續方程式을 確定하고, 이 式들에 Abbott의 Implicit型 差分型을 適用하여 有限 差分方程式의 形態로 誘導한 後, double sweep 알고리즘에 의하여 解析하는 數學的 模型을 開發하였다.

本 模型은 任意의 波形, 風速과 水深, 緯度 等を 入力資料로 하여 任意의 地形을 가진 港内に 서의 反應을 解析할 수 있도록 設計되었다. 特히 波向, 移送項, 港入口로 되돌아 나오는 에너지의 放射現象 等を 數值解析의 으로 處理하는 手法의 開發에 關하여 研究하였다.

本 模型에 의한 解析結果値는 1次元 및 2次元 靜振動(seiche) 數值實驗을 通하여 檢定하였으며, Ippen과 Goda의 理論解析値 및 實驗結果値와 比較하였다.

* 正會員 · 釜山水產大學 海洋工學科 助教授

** 正會員 · 延世大學校 工科大學 土木工學科 教授

1. 序 論

水工學의 여러 問題들을 數值模型에 의하여 解決하고자 하는 努力은 คอมพิวเตอร์의 活用이 本格化되는 1960年代부터 활발히 始作되었다. 이때부터 自由水面을 갖는 流體의 運動에 대한 數值模型實驗이 關心을 끌게 되었고, 水理模型實驗을 數值模型實驗으로 補完하거나 또는 代置하려는 研究가 進行되었다.

Preissmann⁽¹⁾과 Cunge⁽²⁾ 등은 河川에서의 不定流 흐름을 Double Sweep 알고리즘^(3,4)에 의한 Implicit 型 有限差分法으로 解析하였다.

2次元 不定流에 관한 Explicit 型 差分解析은 Reid⁽⁵⁾, Heaps⁽⁶⁾, Loomis⁽⁷⁾ 등에 의하여 開發되어 實用性있는 數值模型의 하나로 자리잡게 되었다.

Leendertse⁽⁸⁾는 Multi-Operation 法에 의하여 長週期波의 數值模型을 開發하였으며 差分化로 인한 精度問題, 실제의 濫用 등에 관하여 상세히 記述하므로써 2次元 不定流解析을 위한 Implicit 型 有限差分解析法을 確立하였다. Abbott^(9,10)는 Leendertse의 것보다 더욱 簡素화된 能率的인 差分型式을 開發하였으며, Kuipers⁽¹¹⁾ 등은 河川에서의 2次元 不定流 解析을 다루었다.

이와 관련하여 國內에서 發表된 文獻으로서는 金治弘⁽¹²⁾, 崔秉昊⁽¹³⁾ 등에 의하여 風波의 移動과 豫測 및 潮汐運動의 解析을 위하여 2次元 不定流의 基本式에 의한 Explicit 型的 有限差分解析模型이 紹介된바 있으며, 尹泰熙⁽¹⁴⁾에 의하여 有限要素法에 의한 數值模型의 研究가 있었다.

바람직한 數值模型을 開發하기 위해서는 복잡한 自然現象의 그 主된 運動特性을 살피고 동시에 單純化시키고, 數值解析的 處理가 可能한 狀態로 變形시키면서도 그 精度와 實用性을 잃지 않아야 됨에 그 어려움이 있으며 이를 어떻게 극복해 나가느냐 하는 것이 그 主된 課題이다.

本 研究는 長週期波로 인한 港內 水面運動의 反應을 豫測하기 위하여 Implicit 型 有限差分法을 活用한 數學的 模型을 開發하고자 함에 그 目的이 있다.

2. 基本 方程式

本 數值模型에 使用된 基本理論式은 非壓縮性 流體에서의 摩擦을 고려한 Euler의 運動方程式과 連續方程式으로 構成되며 다음과 같이 表現된다^(15,16).

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \Omega - \frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{F} \quad (1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (2)$$

여기서 \mathbf{v} 는 流體의 x, y, z 軸의 空間座標에서의 各 方向別 速度成分으로 構成된 速度벡터이며, $-\nabla \Omega$ 는 各 方向의 body force로 構成되었다. P 는 壓力, \mathbf{F} 는 바람 또는 底面摩擦에 의한 에너지의 變化를 나타내며 ρ 는 密度이다.

Hansen⁽¹⁷⁾은 流速의 鉛直方向(z 軸) 分布를 均一하다고 보아 x, y 各 方向에 대한 平均流速 u, v 를 갖는 2次元 흐름으로 表現하였다.

x, y 方向別 body force X, Y 는 地球의 自轉에 의한 Coriolis 힘과 起潮力을 들 수 있겠으나 起潮力의 경우는 일반적으로 除外된다^(18,19). Coriolis 힘은 $X=fv, Y=-fu$ 등의 式으로 表示되며 f 는 緯度の 函數이다^(20,21). z 方向의 body force는 重力으로 나타나며 流體運動에 의한 鉛直方向의 加速度를 無視하므로써 水壓은 靜水壓의 分布가 된다.

또한 底面摩擦의 影響을 Dronkers⁽²⁰⁾는 식 (3)으로 表現하였다.

$$\tau_w = \rho g c^{-2} u |u| \quad (3)$$

여기서 c 는 Chezy 係數이다.

바람의 水面에 作用하는 힘 τ_w 는 식 (4)로 表現할 수 있다.

$$\tau_w = \rho K W |W| \quad (4)$$

여기서 K 는 바람에 의한 에너지 傳達係數, W 는 風速이다.

이상의 記述內容으로부터 2次元 흐름의 運動方程式과 連續方程式은 다음과 같이 表現된다.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{h+\zeta} \right) + G \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{h+\zeta} \right)$$

$$-fq + g(h+\zeta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + g \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{p}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{(h+\zeta)^2}$$

$$-K'W_x|W|=0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q}{h+\zeta} \right) + q \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{h+\zeta} \right) + fp + g(h+\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} + g \frac{q \sqrt{p^2 + q^2}}{c^2(h+\zeta)^2} - KW_y|W|=0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

여기서 $p[u=h+\zeta]$, $q[v=h+\zeta]$ 는 x, y 軸 方向의 線流量이며, W_x, W_y 는 風速의 x, y 方向의 速度成分이다. ζ 는 平均水面으로부터의 水位 變化值이며 h 는 平均水面으로부터 海底까지의 水深이다.

위의 식 (5)~(7)은 非線型 偏微分方程式으로 解析의 方法으로는 그 解를 구할 수 없으므로 數值解析의 方法을 使用하게 된다.

3. 有限差分法の適用

一般的으로 Implicit 法은 Explicit 法에 비해 精度가 높고 CFL 安定條件⁽²²⁾에 拘束됨이 없이 항상 安定性을 유지하나 컴퓨터 使用時間이 많이 所要되며 格子網을 部分的으로 細分化하는 問題, 境界條件의 導入問題 等에 있어서 어려움이 있다 그러나 컴퓨터의 大型, 迅速化와 數值解析 結果值의 精度를 높여 나가는 努力의 추세에 비추어 Implicit 法은 이에 符合되는 한 方法임에 틀림 없다.

3.1 基本項과 格子網의 構成

移送項, Coriolis 項, 摩擦項 等を 생략하고 線型化된 鉛直方向 積分型의 2次元 不定流의 基本方程式은 다음과 같이 表現될 수 있다⁽¹⁰⁾.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (10)$$

여기서 h_0 는 平均水深이다.

위의 식들은 差分解析하기 위하여 Abbott^(10, 22)는 다음 4개의 差分方程式을 構成하였으며 이를 本模型에서의 基本項에 대한 差分型式으로 應

用하였다.

$$\frac{u^{n+1}_{j,k} - u^n_{j,k}}{\Delta t} + g \frac{\zeta^{n+1/2}_{j+1,k} - \zeta^{n+1/2}_{j-1,k}}{2\Delta x} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\zeta^{n+1/2}_{j,k} - \zeta^n_{j,k}}{1/2 \cdot \Delta t} + h_0 \left(\frac{u^{n+1}_{j+1,k} - u^{n+1}_{j-1,k}}{4\Delta x} + \frac{v^{n+1}_{j,k+1} - v^{n+1}_{j,k-1}}{2\Delta y} \right) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{v^{n+1}_{j,k} - v^n_{j,k}}{\Delta x} + g \left(\frac{\zeta^{n+1}_{j,k+1} - \zeta^{n+1}_{j,k-1}}{4\Delta y} + \frac{\zeta^n_{j,k+1} - \zeta^n_{j,k-1}}{4\Delta y} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\zeta^{n+1}_{j,k} - \zeta^{n+1/2}_{j,k}}{1/2 \cdot \Delta t} + h_0 \left(\frac{u^{n+1}_{j+1,k} - u^{n+1}_{j-1,k}}{4\Delta x} + \frac{v^{n+1}_{j,k+1} - v^{n+1}_{j,k-1}}{2\Delta y} \right) = 0 \quad (14)$$

여기서 n 은 時間스텝數이며 j, k 는 各各 x, y 軸 方向에서의 格點番號이다.

線流量 p, q 를 使用한 本模型에서의 格子網은 그림 1과 같다.

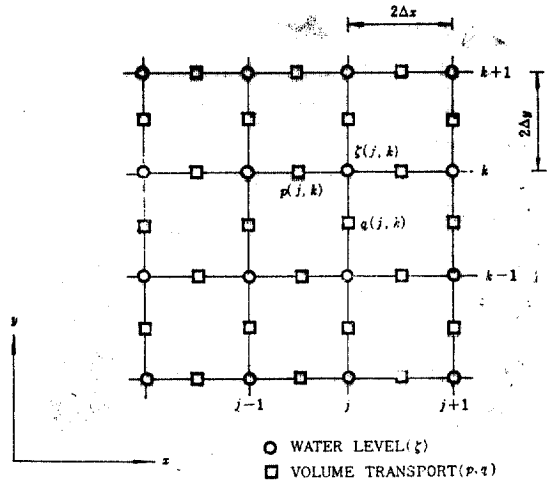


그림 1. 本模型에서 使用한 格點網의 배치도

3.2 摩擦損失項

x, y 方向에서의 Chezy 摩擦係數를 使用한 底面 摩擦損失項을 다음 식 (15), (16)과 같이 差分化하였다. 이 때 水位變化量 ζ 가 平均水面으로부터의 水深 h 에 비해 충분히 작은 경우에 $h_{j,k}$ 는 h 의 값을 使用하여도 무방하나 ζ 의 값이 상당

한 크기를 가질 경우에는 $h_{j,k} = h + \zeta$ 의 關係를 사용한다.

$$\frac{gp\sqrt{p^2+q^2}}{c^2(h+\zeta)^2} \approx \frac{gp^{n+1}_{j,k} \{ (p^{n,j,k})^2 + [(q_{j,k+1} + q_{j-1,k+1} + q_{j-1,k+1} + q_{j-1,k})^n / 4]^2 \}^{1/2}}{(c_{j,k} \cdot h_{j,k})^2} \quad (15)$$

$$\frac{gp\sqrt{p^2+q^2}}{c^2(h+\zeta)^2} \approx \frac{gp^{n+1}_{j,k} \{ [p_{j+1,k} + p_{j,k} + p_{j,k-1} + p_{j+1,k-1}]^n / 4 + (q^{n,j,k})^2 \}^{1/2}}{(c_{j,k} \cdot h_{j,k})^2} \quad (16)$$

3.3 바람項

바람에 의해 水面에 傳達되는 에너지의 程度를 알기 위하여 Van Dorn⁽²⁴⁾은 K 를 다음과 같이 결정하였다. 即

$$K = K_1, \quad (W \leq W_c \text{ 일 때}) \quad (17)$$

$$K = K_1 + K_2 \left(1 - \frac{W_c}{W} \right)^2, \quad (W \geq W_c \text{ 일 때}) \quad (18)$$

여기서 상수 K_1 과 K_2 는 각각 1.1×10^{-6} , 2.5×10^{-6} 의 값을 취하였고 限界風速 W_c 는 7m/sec이다. 風速이 매우 커지게 되면 K 의 限界値는 3.6×10^{-6} 에 이르며 이 때 空氣의 물에 대한 密度의 比率는 1.2×10^{-3} 이다.

風向과 風速이 時間에 따라 變化할 경우에는 이를 豫報하는 시스템에 連結시켜 情報를 供給시키거나, 既存資料 또는 設計 風向, 風速을 入力資料로 한다.

本項의 差分型은 다음과 같이 表現하였다.

$$KW_x | W | \approx K^{n+1}_{j,k} W_x^{n+1}_{j,k} | W^n_{j,k} | \quad (19)$$

$$KW_y | W | \approx K^{n+1}_{j,k} W_y^{n+1}_{j,k} | W^n_{j,k} | \quad (20)$$

만일 檢對對象 海域이 매우 넓지 않고 風速의 變化幅이 크지 않을 경우에는 $K^{n+1}_{j,k} \approx K$, $W^n_{j,k} \approx W$ 등의 一定値를 取할 수 있다.

3.4 Coriolis 項

흐름이 一定한 速度로 거의 直線에 가까운 運動을 할 때 地球의 自轉으로 인하여 물의 單位 體積當에 가해지는 x 및 y 方向의 Coriolis 힘 X ,

Y 를 差分化하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} -fq &= -2\omega \sin \phi \cdot q \\ &\approx -2\omega \sin \phi (q_{j,k} + q_{j,k+1} + q_{j-1,k} \\ &\quad + q_{j-1,k+1})^n / 4 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} fp &= 2\omega \sin \phi \cdot p \\ &\approx 2\omega \sin \phi (p_{j,k} + p_{j,k-1} + p_{j+1,k} + \\ &\quad p_{j+1,k-1})^n / 4 \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 ω 는 地球自轉의 角速度 ($= 0.729 \times 10^{-4}$ /s), ϕ 는 緯度이다.

3.5 移送項(convective term)

移送項들을 積分型의 概念으로 表現하기 위해 서 다음과 같은 變換作業을 實施한다⁽²⁵⁾. 즉,

$$f(x, y, t_2) = f \left(x - \int_{t_1}^{t_2} u dt, y - \int_{t_1}^{t_2} v dt, t_1 \right) \quad (23)$$

$\Delta t (= t_2 - t_1)$ 時間의 平均 流速 \bar{u}, \bar{v} 를 다음과 같다.

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} u dt \quad (24)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} v dt \quad (25)$$

따라서,

$$\int_{t_1}^{t_2} u dt = \bar{u} \cdot \Delta t \quad (26)$$

$$= \alpha \cdot (2\Delta x) \quad (26 a)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v dt = \bar{v} \cdot \Delta t \quad (27)$$

$$= \beta \cdot (2\Delta y) \quad (27 a)$$

여기서 $\alpha = \frac{\bar{u} \cdot \Delta t}{2\Delta x}$, $\beta = \frac{\bar{v} \cdot \Delta t}{2\Delta y}$ 이다.

이 關係를 格子網의 體系에 導入하면,

$$u^{n+1}_{j,k} = u^{n}_{j-\alpha, k-\beta} \quad (28)$$

$$v^{n+1}_{j,k} = v^{n}_{j-\alpha, k-\beta} \quad (29)$$

따라서 移送項들의 影響을 고려한 線流量 $\bar{p}_{j,k}$, $\bar{q}_{j,k}$ 및 $\zeta_{j,k}$ 는 α, β 를 利用한 格子網에서의 補間式으로 表現된다.

3.6 有限差分方程式

지금까지 설명한 내용으로부터 식 (5)~(7)과 식 (8)~(22)을 고려하면 다음 4개의 有限差分方程式들을 얻는다. 여기서 移送項들은 별도의 方法으로 처리되므로 이 式들에서 除外되었다. 即

$$\frac{(p^{n+1}+p^n)_{j,k}}{\Delta t} + gh_{j,k} \frac{(\zeta_j - \zeta_{j-1})^{n+1/2}_k}{2\Delta x} - f(q_{j,k+1} - q_{j,k} + q_{j-1,k+1} + q_{j-1,k})^n / 4 + \frac{gp^{n+1}_{j,k} \{ (p^n_{j,k})^2 + [(q_{j,k+1} + q_{j,k} + q_{j-1,k+1} + q_{j-1,k})^n / 4]^2 \}^{1/2}}{c^2_{j,k} \cdot h^2_{j,k}} - KW_x^{n+1}_{j,k} |W^n_{j,k}| = 0 \quad (30)$$

$$\frac{(\zeta^{n+1} + \zeta^{n+1/2})_{j,k}}{1/2 \Delta t} + \frac{(p_{j+1} - p_j)^{n+1}_k + (p_{j+1} - p_j)^n_k}{4\Delta x} + \frac{(q_{k+1} - q_k)^n_j}{2\Delta y} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{(q^{n+1} - q^n)_{j,k}}{\Delta t} + gh_{j,k} \left[\frac{(\zeta_k - \zeta_{k-1})^{n+1}_j + (\zeta_k - \zeta_{k-1})^n_j}{4\Delta y} \right] + f(p_{j+1,k} + p_{j,k} + p_{j,k-1} + p_{j+1,k-1})^n / 4 + \frac{gq^{n+1}_{j,k} \{ (q^n_{j,k})^2 + [(p_{j+1,k} + p_{j,k} + p_{j,k-1} + p_{j+1,k-1})^n / 4]^2 \}^{1/2}}{c^2_{j,k} \cdot h^2_{j,k}} - KW_x^{n+1}_{j,k} |W^n_{j,k}| = 0 \quad (32)$$

$$\frac{(\zeta^{n+1} - \zeta^{n+1/2})_{j,k}}{1/2 \Delta t} + \frac{(p_{j+1} - p_j)^{n+1}_k + (p_{j+1} - p_j)^n_k}{4\Delta x} + \frac{(q_{k+1} - q_k)^{n+1}_j}{2\Delta y} = 0 \quad (33)$$

4. Double Sweep 알고리즘의 適用

식 (30)~(33)의 差分式들을 整理하면 다음과 같이 표현된다. 즉, x 方向에 관한 運動 및 連續 差分式은 식 (30)(31)로부터 $A1_j, B1_j \dots C2_j, D2_j$ 등의 값이 결정되며 식 (34), (35)의 聯立方程式가 얻어진다.

$$A1_j \zeta^{n+1/2}_{j-1} + B1_j p_j^{n+1} + C1_j \zeta^{n+1/2}_j = D1_j \quad (34)$$

$$A2_j p^{n+1}_j + B2_j \zeta^{n+1/2}_j + C2_j p^{j+1}_{n+1} = D2_j \quad (35)$$

이 식들과 補助關係式(recurrence relations) 식 (36), (37)으로부터 식 (38), (39)을 얻는다.

$$\zeta^{n+1/2}_j = E_j p_j^{n+1} + F_j \quad (36)$$

$$p^{n+1}_{j+1} = E_j^* \zeta_j^{n+1/2} + F_j^* \quad (37)$$

$$p_j^{n+1} = E_{j-1}^* \zeta^{n+1/2}_{j-1} + F_{j-1}^* \quad (38)$$

$$\zeta_j^{n+1/2} = E_j p_j^{n+1} + F_j \quad (39)$$

여기서,

$$E_{j-1}^* = -A1_j / (B1_j + C1_j E_j)$$

$$F_{j-1}^* = (-C1_j F_j + D1_j) / (B1_j + C1_j E_j)$$

$$E_j = -A2_j / (B2_j + C2_j E_j^*)$$

$$F_j = (-C2_j F_j^* + D2_j) / (B2_j + C2_j E_j^*)$$

마찬가지로 y 축 방향에 대한 連續 및 運動差分式은

$$A3_k q_k^{n+1} + B3_k \zeta_k^{n+1} + C3_k q_{k+1}^{n+1} = D3_k \quad (40)$$

$$A4_k \zeta_{k-1}^{n+1} + B4_k q_k^{n+1} + C4_k \zeta_k^{n+1} = D4_k \quad (41)$$

이 식들과 보조관계식 (42), (43)을 사용하여 식 (44), (45)를 얻는다.

$$q_{k+1}^{n+1} = E_k^* \zeta_k^{n+1} + F_k^* \quad (42)$$

$$\zeta_k^{n+1} = E_k q_k^{n+1} + F_k \quad (43)$$

$$\zeta_k^{n+1} = E_k q_k^{n+1} + F_k \quad (44)$$

$$q_k^{n+1} = E_{k-1}^* \zeta_{k-1}^{n+1} + F_{k-1}^* \quad (45)$$

여기서,

$$E_k = -A3_k / (B3_k + C3_k \cdot E_k^*)$$

$$F_k = (-C3_k \cdot F_k^* + D_k) / (B3_k + C3_k E_k^*)$$

$$E_{k-1}^* = -A4_k / (B4_k + C4_k \cdot E_k)$$

$$F_{k-1}^* = (-C4_k \cdot F_k + D4_k) / (B4_k + C4_k E_k)$$

따라서 식 (38), (39)에서 $\zeta_j^{n+1/2}, p_j^{n+1}$ 을 Double Sweep에 의해 구한후 마찬가지로 y 方向에 대하여 식 (44), (45)로부터 Double Sweep을 實施한다^(23, 26).

5. 境界條件

5.1 閉鎖端

一般的으로 自然海岸이나 護岸, 防波堤 등의 境界面에서는 그 法線方向의 流速이 충분히 작다고 보아 0의 값을 사용하나 捨石防波堤와 같이 그 透水性이 크고 그로 인한 영향이 상당하다고豫想되는 경우에는 透水率을 고려한 별도의 算出方法이 講究되어야 할 것이다.

5.2 開放端

開方端으로부터 과급되는 에너지의 變動을 實際의 現象과 符合되게 適用시키는 것은 매우 重要하다. 本模型에서는 水位 ζ 의 格點과 p 또는

q의 격점이 交代(staggered grid system)로 配列되었으므로 開方端에서는 ζ의 格點을 取하는 것이 一般的이다.

만약 境界面 ζ에서의 流速이 매우 큰 境遇에는 이를 速度水頭로 換算하여 ζ의 값에 合算한 energy의 水頭를 使用한다.

5.3 入射波向

灣으로 接近해오는 波의 方向에 따라서 灣內의 反應은 相異하므로 入射波向의 影響을 고려한 境界條件으로서의 波高를 算出하여 공급하여야 한다. 入射角을 φ로 나타낼 때 灣入에서 이웃하고 있는 두 格點間의 傳達波의 時間差 Δt_φ는

$$\Delta t_{\phi} = \sin \phi \cdot \Delta y / c \quad (46)$$

여기서 $c = \sqrt{gh_{i,s}}$ 이다.

따라서 位相(phase)의 差 Δε(radian)은

$$\Delta \epsilon = \Delta t_{\phi} \cdot 2\pi / T \quad (47)$$

가 된다.

5.4 反射波와 放射現象(radiation)

長波의 경우에는 閉鎖 境界面에서의 進行波에 대한 反射는 全反射된다고 보며 따라서 反射率은 1.0이다. 反射波는 進行波의 反對方向으로 傳播되면서 合成波를 이루게 되어 波高는 增大되거나 減小된다.

水理模型實驗의 경우에 있어 造波機의 前面에 發生하는 實際의 波는 反射波의 影響을 含有하는 一種의 合成波이다. 따라서 水理模型實驗과 같은 條件下에서 數值實驗을 실시하기 위해서는 每 時間段階마다 境界值인 入射波高에 反射波의 影響을 導入해야 하며, 이 때 흐름의 特性線(characteristic line)理論을 活用하는 等の 對策을 강구하게 된다(그림 2). 即,

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^{n+1} + \zeta_r^n \quad (48)$$

여기서 ζ_i^{n+1} 는 (n+1)Δt일 때의 理論式에 의한 算出波高이며 ζ_r^n 은 nΔt時間段階로부터의 反射波高이다.

6. 數值模型의 檢定

本 數值模型의 基本的 機能을 確認하기 위하여

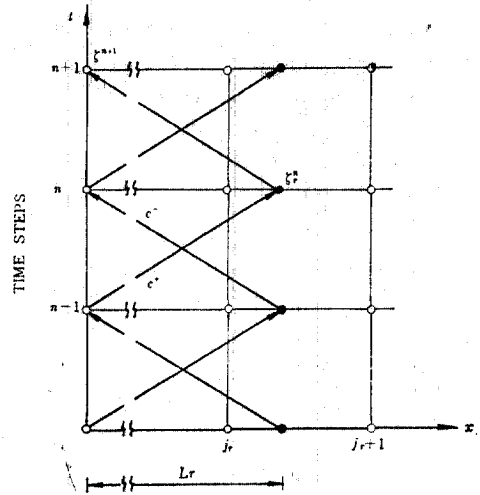


그림 2. 방사현상을 고려한 경우 개방 境界面에서의 入사파고

靜的 및 動的檢定實驗을 통한 安定性과 精成에 대한 分析을 實施하였다.

靜的檢定을 위하여는 初期值를 全部 0으로 하고 境界面에서 에너지를 완전히 遮斷한 상태에서 遂行하였고 安定된 結果를 얻었다.

動的檢定을 위하여서는 직사각형 灣에서의 1次元 靜振動(seiche)實驗과 2次元 靜振動實驗을 sine 波形을 대상으로 實施하였다.

6.1 安定性과 精度

式 (11)~(14)의 解를 Fourier 級數로 表現하면 式 (49)과 같다⁽¹⁰⁾.

$$\bar{A} = \sum_m A_m^* e^{i m s} \quad (49)$$

여기서 \bar{A} 는 (u, v, ζ)^T로서 解析的 解이며 A_m^* 는 (u_m^{*}, v_m^{*}, ζ_m^{*})^T, m번째 成分의 振幅, κ_m는 m번째 成分의 wave number, s는 波의 進行軸 方向距離이다.

線系에서 중첩의 원리가 적용 가능함을 이용하여 Δs의 간격으로 형성된 직사각형 格子網에서 다음 식으로 된다.

$$\bar{A}^{n+1} = G \cdot \bar{A}^n \quad (50)$$

여기서 G는 振幅을 나타내는 matrix이며 Abbott⁽⁹⁾에 의하면 그 固有值 λ는

$$|\lambda| \leq 1 \quad (51)$$

이 되어 Van Neuman⁽²⁷⁾의 安定條件을 滿足한다.

Leendertse는 理論波長 L 을 傳播한 後 數值 解析值의 理論解析值에 對한 比의 값으로 複素 數 傳播係數 T 를 使用하였다. 이 時 波의 振幅 誤差는 T 의 modulus 이고 位相(phase)誤差는 T 의 argument 이다.

Sobey⁽¹⁰⁾에 의하면

$$|T|=1 \quad (52)$$

로써 振幅의 誤差는 없다.

Abbott⁽²⁵⁾는 位相誤差를 식 (53)의 波速比 Q 로써 表現하였다.

$$Q = \frac{\arctan\left(\frac{2A}{1-A^2}\right)}{\frac{2\pi C_r}{N_x}} \quad (53)$$

여기서 A 는 波가 x 方向으로 進行할 時

$A = \frac{C_r}{2} \sin \frac{2\pi}{N_x}$ 로써 表現되며, C_r 은 Courant 數 로서 $C_r = \frac{c \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta X}$ 이다. N_x 는 單位波長(L)當의 格點數이다.

식 (53)로부터 C_r 數가 작을수록 N_x 가 많아질 수록 波速比는 1.0에 接近해 감을 알 수 있다. 따라서 C_r 數가 큰 경우에는 N_x 를 增加시켜야되며 Abbott⁽²³⁾는 比較的 큰 C_r 數에서 N_x 는 20~100點이 必要하다고 하였다.

6.2 靜振動 數值實驗

本 實驗은 1次元 및 2次元의 靜振動에 對하여 各 各 實시되었는데 먼저 에너지의 損失 및 流入이 없는 狀態에서 完全한 振動이 繼續되는지의 여부를 檢定하였으며, C_r 數, N_x 數, 摩擦抵抗, 移送項 등이 振動에 미치는 영향을 檢토했다.

1次元 靜振動 實驗은 직사각형 灣에서 灣入口를 마디(node)로하여 sine 波의 形態로 水面이 上昇된 狀態를 初期水面條件으로 하여 實시되었다. 灣의 크기는 길이 및 幅을 各 各 3km, 1.2km로 하였고 水深은 10m의 均一한 값을 취하였다.

2次元 靜振動 實驗을 위하여 길이, 幅, 水深을 各 各 2.2km, 4.4km, 10m로하고 初期條件으로서의 水面은 sine 波形으로 構成하였다(그림 3).

振幅比 R 은 當初의 水位를 基準으로한 水位變化의 比이며, 마디를 除外한 各格點에서의 값은 같은 結果를 보였다.

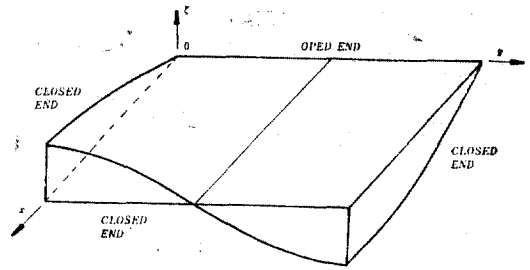


그림 3. 2次元 靜진동 實驗을 위한 초기수면

(1) Courant 數의 影響

그림 4는 1次元 振動實驗에서 C_r 의 영향을 檢討한 것이다. 여기서 에너지의 損失 및 流入項과 移送項을 排除하였고 一定 水深의 條件에서 實施하였으므로 식 (11)~(14)에 근거한 Q 의 算出式과 比較可能하였다. 即 $C_r=1$, $N_x=28$ 일 때 4 주기 동안의 位相移動은 거의 無視할 수 있었으며 이 때 Q 의 計算値는 0.988이었다. 또한 같은 條件下에서 $C_r=2.5$ 로 하였을 때 位相은 4週 期 동안 約 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 移動되었으며 이 結果는 식 (53)에 의한 $Q=0.966$ 을 使用한 位相移動 豫測值과 거의 一致함을 보여 주었다.

그림 5는 2次元 振動實驗에서 C_r 을 0.49, 0.97, 1.94 등으로 變化시켜 본 結果이다. 이 때 $N_x=24$ 이었으며 C_r 이 커짐에 따라 位相誤差가 增加함을 알 수 있다. 位相誤差를 줄이기 위하여서는 두가지 方法을 생각할 수 있는데 그 첫 째로는 格點間隔을 좁힘으로써 N_x 를 증가시키는 方法이며 또 다른 方法으로는 Δt 를 조절하여 C_r 값을 줄이는 것이다. 그림 6은 $C_r=2.5$ 의 값에도 불구하고 $N_x=62$ 의 큰 값일 때에는 位相誤差가 매우 적음을 보여 주며 또한 $N_x=30$ 이 되면서 位相誤差가 增加함을 볼 수 있다.

N_x, C_r 의 값을 선택함에 있어서는 對象 模型實驗에서의 波浪條件, 要求되는 精度, 컴퓨터의 使用時間등을 고려하게 된다.

(2) 底面摩擦의 影響

底面의 摩擦抵抗은 에너지의 감소현상에 크게 기여하며 적절하게 底面의 摩擦係數를 調節해줌으로써 實제의 流體運動과 近似한 結果를 얻을 수 있다.

그림 7은 $C=2,000\text{m}^{1/2}/\text{sec}$ 인 경우와 $C=50\text{m}$

$1^2/\text{sec}$ 인 경우에서의 振動實驗 結果이다. 여기서 $C=2,000^{1/2}/\text{sec}$ 이라함은 底面摩擦의 영향을 무시한 경우를 의미한다. $C=50\text{m}^{1/2}/\text{sec}$ 일 때 5週期 후의 振幅은 約 15%의 減少를 보였는 바 C의 값은 波高의 減衰現象(damping)에 큰 要因이 됨을 알 수 있다.

(3) 바람의 影響

一定한 方向과 크기로 持續的으로 부는 灣內의 水面에 에너지를 傳達시키면서 흐름을 發生시켜 프리즘모양으로 水面을 上昇시킨다. 數值實驗의 結果⁽²⁸⁾에 의하면 定常狀態일 때의 上昇水面을 中心으로 共振週期에 따라 上昇高를 振幅으로 하는 自由振動이 發生되며 底面 摩擦抵抗의 影響으로 서서히 定常狀態의 上昇水面으로 減衰해가는 現象을 보인다. 여기서 定常狀態의 水面이란 wind stress의 傳達로 인하여 새롭게 形成되는 相對平衡狀態의 水面이며, 그 傾斜度는 직사각형 開放灣의 경우에 다음의 近似式으로 推算될 수 있다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} \sim \frac{KW|W|}{g(h+C)} \quad (54)$$

(4) Coriolis 項의 影響

灣內 또는 灣의 크기가 수십 km에 不過한 좁은 海域에서 本項의 영향은 無視할 수 있을 程度로 작으나 廣範圍한 海域에서의 흐름을 解釋하는 境遇에는 流動의 主된 要因의 하나가 된다. 數值實驗의 結果⁽²⁸⁾에 의하면 Coriolis 힘의 영향으로 水面이 흐름의 進行方向으로부터 오른쪽으로 上昇하는 現象을 볼 수 있다.

(5) 移送項의 影響

移送項은 그림 8, 表 1,2에서와 같이 全體의 灣內의 波高를 多少 낮게하는 傾向을 보이니 그 영향은 無視하고 計算할 수도 있다. 그러나 週期가 충분히 긴 경우에 境界條件에 따라서는 상당한 영향을 흐름에 미칠수 있으며 渦流(eddy)를 形成시키는 데 기여하기도 한다.

(6) 波向의 영향

灣入口에 直角($\psi=0^\circ$)으로 波가 作用하는 직사각형의 開放灣內에서는 오직 灣의 길이方向으로 直進 및 反射運動을 하는 1次元 흐름이지만 數值實驗結果⁽²⁸⁾에서와 같이 入射角 ψ 가 增加됨에 따라 灣內에서의 反應은 完全히 달라진다.

(7) 反射波와 放射現象의 影響

長期間波의 경우 閉鎖端에서의 反射率 r 은 1.0으로 하였으나 境界面에서의 透水性이 매우 크거나 週期가 작아지게 되면 境界面에서의 傾斜度, 表面狀態에 따른 에너지 損失을 고려하게 되며 反射率 $r < 1.0$ 이 된다. 이러한 경우 적절한 r 을 導入하는 問題는 앞으로의 課題이다.

放射現象을 고려함으로써 灣內에서의 波高는 本項을 고려하지 않은 경우와 差異를 보였다. 특히 兩 防波堤로 保護된 灣의 境遇(表 2)에서 볼 수 있는 바와 같이 대체로 放射現象을 고려한 경우가 Ippen의 理論 및 實驗結果值⁽²⁹⁾에 보다 가까워짐을 알 수 있었다.

6.3 Ippen-Goda의 理論 및 實驗結果와의 比較

그림 9는 完全 開放 직사각형 港과 兩 防波堤를 가진 직사각형 港에 本 模型을 適用하여 그 結果를 Ippen과 Goda의 理論 및 實驗結果值와 比較한 것이다. 本 數值實驗에서 사용한 入力資料는 無次元 變數 κl ($\kappa = \frac{2\pi}{L}$), b/l , $2d/b$ 등의 값을 Ippen 등이 使用한 값과 一致시켰으며 入口에서 波高는 $\zeta = \frac{H}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$ 로 하였다.

본 그림에서 點線은 b/l 이 0.194인 完全開放 灣內(A點)에서의 入射波長의 變化에 따른 振幅比(R)를 Ippen 등⁽²⁹⁾의 解析的 理論(式 (55))에 의하여 計算한 값이며 이 경우에 反射率은 1.0으로 하였다.

$$R = \frac{1}{\sqrt{(\cos \kappa l + \eta_2 \sin \kappa l)^2 + \eta_1^2 \sin^2 \kappa l}} \quad (55)$$

여기서 η_1, η_2 는 κd 의 函數(Ippen-Goda의 radiation functions)

이 경우 Ippen 등의 解釋値는 단지 港의 길이 開口部の 幅과 入射波長만을 變數로 하여 計算된 값이므로 水深, 底面摩擦 등에 따라 多樣하게 變化되는 自然現象을 伸縮性있게 表現하기에는 무리한 점이 없지 않다. Ippen 등은 한 波浪條件 κl 에 대하여 하나의 振幅比를 算出하였으나 本 模型은 C 값에 따라 큰 變化幅을 보여주고 있음을 알 수 있다.

그림 9에서 底面摩擦係數를 一般 自然狀態($C=50\sim 60\text{m}^{1/2}/\text{sec}$)보다 훨씬 작게 한 $C=10\text{m}^{1/2}/\text{sec}$

○—○ : $Cr=1.0, T/\Delta t=30$ } $C=2,000m^2/s$
 ●—● : $Cr=2.5, T/\Delta t=12$ }

그림 4. Courant 수의 영향(1차원 정진동 수치실험)

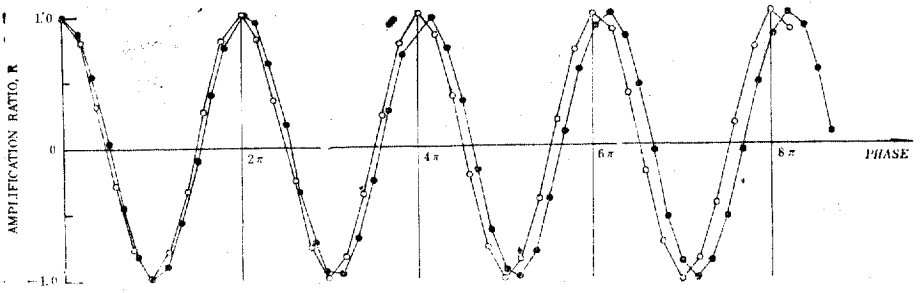


그림 5. Courant 수의 영향(2차원 정진동 수치실험)

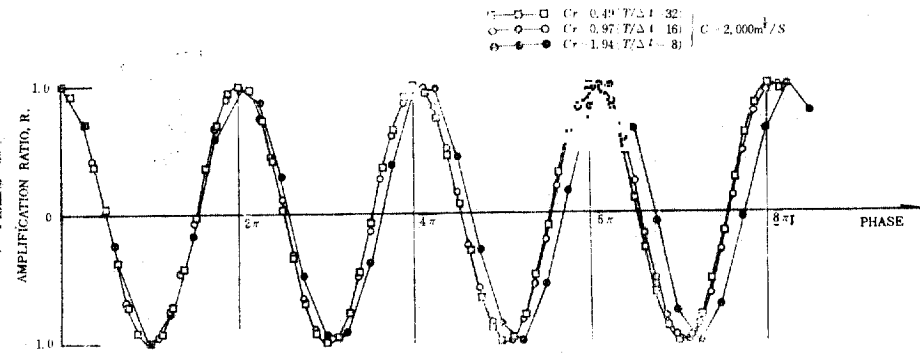


그림 6. 과장당 격점수(N_x)의 영향(1차원 정진동 수치실험)

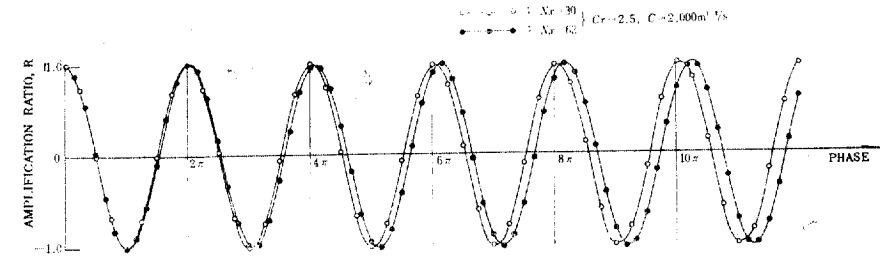


그림 7. 마찰계수 C의 영향(1차원 정진동 수치실험)

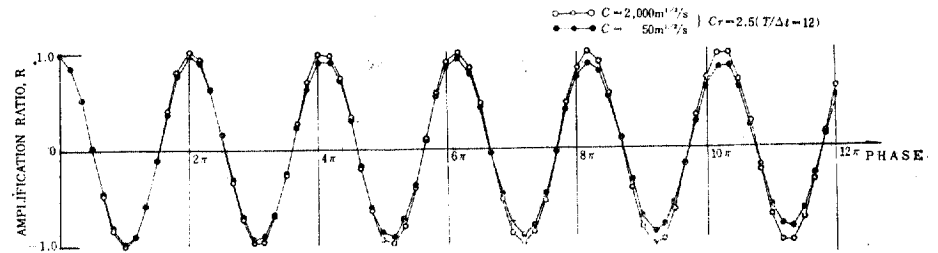
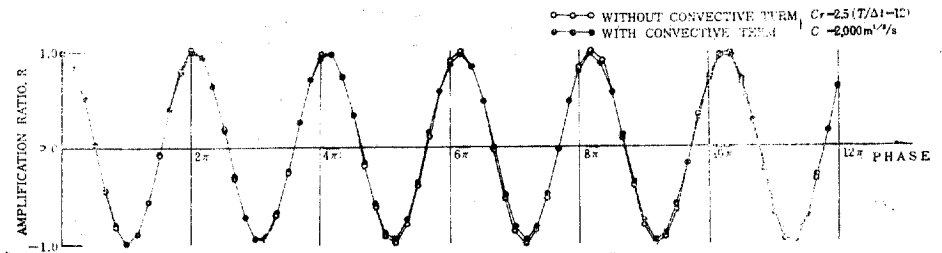


그림 8. 이류 항의 영향(1차원 정진동 수치실험)



일 때 Ippen 等의 實驗結果에 接近하는 것은 Ippen 等의 水理實驗이 폭 2.38 inch, 길이 12.25 inch의 매우 작은 縮尺에서 實施되었으므로 바닥 및 벽면에서의 摩擦抵抗이 실제 (prototype)보다 크게 작용되었기 때문인 것으로 判斷된다.

兩 防波堤로 保護된 港(그림 10)의 경우에는 完全開放된 港의 경우에 비하여 C값의 선택에 따른 振幅比의 變動幅이 작았으며 全體的으로 보아 Ippen-Goda의 理論値와 比較的 가까운 값을 얻었다.

表 1과 表 2는 數值實驗條件을 (a), (b), (c) 등의 3種類로 하여 實施한 本 模型의 實驗 結果値와 Ippen-Goda의 研究結果를 比較한 것이다. 條件 (a)의 경우에는 放射現象을 고려하고 移送項을 무시한 경우이고 條件(b)는 放射現象과 移送項을 同時에 고려한 경우이며 移送項의 영향은 매우 작음을 알 수 있다. 條件(c)는 放射現象을 고려하지 않은 경우이며 (a)의 경우와 비교함으로써 放射現象의 영향을 檢討하였다. 即 兩 防波堤로 保護된 港의 경우에는 放射現象을 고려함으로써 Ippen-Goda의 理論値에 더욱 가까와

짐을 알 수 있었으며, 完全開放의 경우에는 그 差異點을 區分하기가 곤란하였다. 이러한 現象은 本 模型에서 提案한 防射現象의 처리手法이 더욱 補完되고 開發되어야 할 것임을 意味한다.

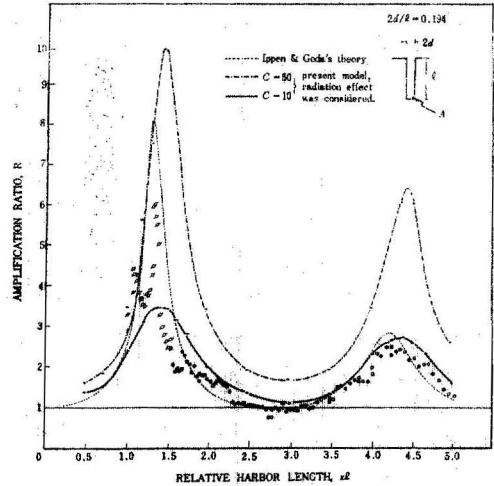


그림 9. 입사파의 변화에 따른 완전개방 직사각형 항내의 반응

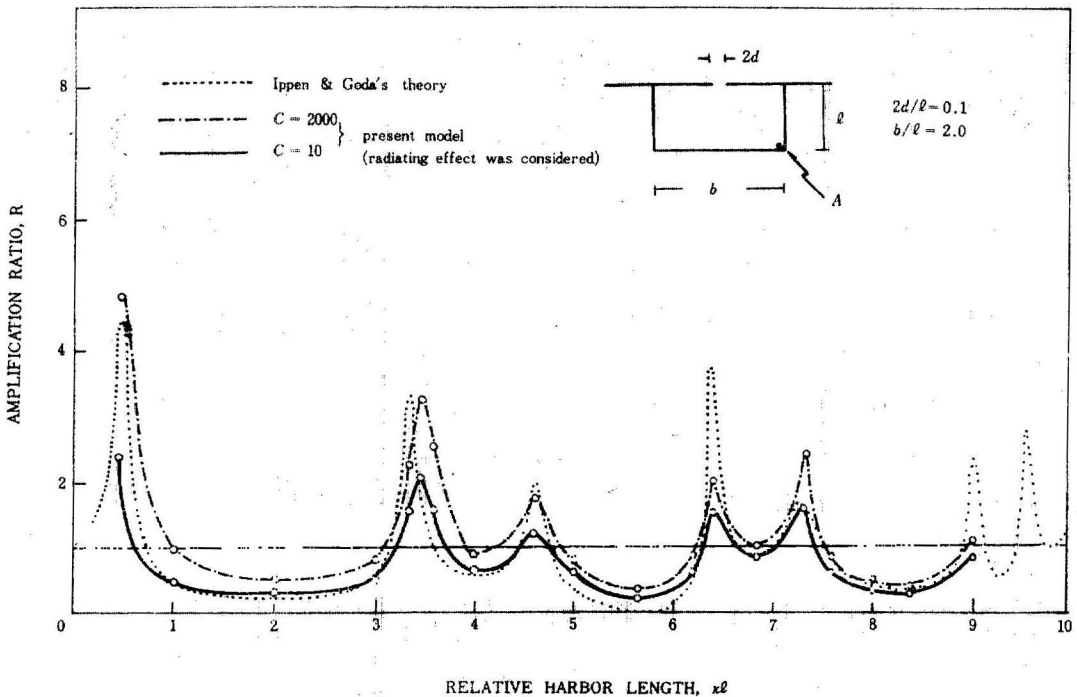


그림 10. 입사파의 변화에 따른 양 방파제로 보호된 직사각형 항내의 반응

표 1. 완전 개방 직사각형 항에서의 수치실험 결과 비교(그림 7)
 (a): 방사현상 고려, 이류항 무시
 (b): 방사현상과 이류항 무시
 (c): 방사현상과 이류항 무시

| kl | R(IPPEN & GODA) | | R(본 모형) | | |
|-----|-----------------|---------|---------|------|------|
| | 이론치 | 실험치 | 실험조건 | C=50 | C=10 |
| 1.3 | 8.1 | 3.8~6.1 | (a) | 7.5 | 3.3 |
| | | | (b) | 7.5 | 3.3 |
| | | | (c) | 6.5 | 3.1 |
| 3.0 | 0.9 | 0.9 | (a) | 1.7 | 1.1 |
| | | | (b) | 1.7 | 1.1 |
| | | | (c) | 1.9 | 1.1 |
| 4.2 | 2.8 | 2.2~2.5 | (a) | 5.3 | 2.6 |
| | | | (b) | 5.1 | 2.5 |
| | | | (c) | 4.2 | 2.3 |
| 6.0 | 0.7 | — | (a) | 1.4 | 1.1 |
| | | | (b) | 1.4 | 1.1 |
| | | | (c) | 2.1 | 1.1 |

표 2. 양 방파제로 보호된 직사각형 항에서의 수치 실험 결과 비교(그림 8)
 (a): 방사현상 고려, 이류항 무시
 (b): 방사현상과 이류항 고려
 (c): 방사현상과 이류항 무시

| kl | R(IPPEN & GODA) | | R(본 모형) | | |
|-----|-----------------|-----|---------|--------|------|
| | 이론치 | 실험치 | 실험조건 | C=2000 | C=10 |
| 0.5 | 4.4 | — | (a) | 4.6 | 2.3 |
| | | | (b) | 5.0 | 2.5 |
| | | | (c) | 4.0 | 2.0 |
| 2.0 | 0.2 | — | (a) | 0.5 | 0.3 |
| | | | (b) | 0.5 | 0.4 |
| | | | (c) | 0.6 | 0.4 |
| 3.3 | 3.2 | — | (a) | 2.2 | 1.5 |
| | | | (b) | 2.2 | 1.5 |
| | | | (c) | 2.5 | 1.7 |
| 4.0 | 0.6 | — | (a) | 0.9 | 0.7 |
| | | | (b) | 0.9 | 0.7 |
| | | | (c) | 1.4 | 1.1 |
| 5.7 | 0.0 | — | (a) | 0.3 | 0.2 |
| | | | (b) | 0.3 | 0.2 |
| | | | (c) | 0.6 | 0.4 |
| 6.4 | 3.8 | — | (a) | 2.0 | 1.5 |
| | | | (b) | 1.9 | 1.3 |
| | | | (c) | 3.0 | 2.0 |

| | | | | | |
|-----|-----|---|-----|-----|-----|
| 7.3 | 1.7 | — | (a) | 2.3 | 1.6 |
| | | | (b) | 2.0 | 1.4 |
| | | | (c) | 4.2 | 2.4 |
| 8.3 | 0.3 | — | (a) | 0.4 | 0.3 |
| | | | (b) | 0.4 | 0.3 |
| | | | (c) | 1.0 | 0.8 |

7. 結 論

長週期波에 의한 港內의 反應을 豫測하기 위하여 非線型 偏微分方程式으로 表現되는 2次元 不定流의 運動方程式과 連續方程式을 確定하고 Abbott의 Implicit型 演算子를 基本으로 한 有限差分方程式을 誘導한 후, Double Sweep 알고리즘에 의하여 解析하는 數學的 模型을 開發하였다.

本 模型은 임의의 波形, 波向, 風向, 風速, 水深, 緯度 등을 入力資料로 하여 임의의 地形을 가진 港內에서의 波高, 流速 등을 解析할 수 있도록 設計되었다. 特히 波向, 移送項, 港入口로 되돌아 나오는 에너지의 放射現象을 數值解析의 으로 처리하는 手法에 관하여 研究하였다.

(1) 靜振動 數值實驗 結果 計算値는 恒常 安定하였고, 에너지의 流入과 損失이 없는 경우에 振幅은 一定하였고, 位相誤差가 다소 發生하였으나 Courant數 (C)수가 작고 單位波長當의 格點數(N_s)가 많으면 이 誤差는 줄일 수 있다.

(2) 數值解釋 結果에 크게 영향을 미치는 因子로서는 港의 形態, 入射波, 底面摩擦係數, 波向, 風速 등이며 특히 chezy係數 C값의 적절한 選定이 매우 重要하다.

(3) 移送項은 波高에 큰 영향을 미치지 않았다.

(4) 長週期波로 인한 港內水面의 共振現象과 관련된 Ippen 등의 理論 및 實驗値와 比較의 一致하였다.

參 考 文 獻

1. Preissmann, A., "Propagation des Intumescences dans les Canaux et Rivières," 1st *Congres de l'Assoc. Francise de Calcut*, Grenoble, pp. 433~442, 1961.

2. Preissmann, A., and Cunge, J.A., "Calcul des Intumescences sur Machines Electroniques," IX Meeting of the IAHR, Dubrovnik, 1961.
3. Richtmyer, R.D., *Difference Methods for Initial Value Problems*, Interscience Publishers, 1957.
4. Abramov, A.A., and Andriyev, V.B., "Application of the Double-Sweep method...", *Jour of Applied Math. and Math. phys.*, Vol. 3, No. 2, 1963.
5. Reid, R.O. and Bodine, B.R., "Numerical for Storm Surges in Galveston Bay," *Proceedings, American Society of Civil Engineers, Waterways Divison*, Vol. 94, No. WWI, pp. 33~57, 1968.
6. Heaps, N.S., "A Two-Dimensional Numerical Sea Model," *Philosophical Transactions*, Royal Society, London, Series A, Vol. 265, No. 1160, pp. 93~137, 1969.
7. Loomis, H.S., *A Package Program for Time-Stepping Long Waves into Coastal Regions with Application to Haleiwa Harbor, Oahu*, HIC-72-21, Technical Report, Hawaii Institute of Geophysics, University of Hawaii, 1972.
8. Leendertse, J.J., *Aspects of a Computational Model for Long-Period Water Wave Propagation*, Rand Corporation, Santa Monica, California, Memorandum RM-5294-PR, May 1997.
9. Abbott, M.B. and Ionescu, F., "On the numerical computation of nearly horizontal flows," *J. Hyd. Res.*, 5, pp. 97~117, 1967.
10. Sobey, R.J., *Finite-Difference Schemes Compared for Wave-Deformation Characteristics in Mathematical Modeling of Two-Dimensional Long-Wave Propagation*, Technical Memorandum No. 32, U.S. Army, Corps of Engineers, CERC., 1970.
11. Kuipers, J. and C.B. Vreugdenhil, "Calculations of Two-Dimensional Horizontal Flow," *Delft Hydraulics Laboratory Report S.163, Part 1*, 1973.
12. 김치홍, "전자계산기에 의한 해일을 예측하는 수치계산 program 개발에 관한 연구(2)", 한국수문학회, Vol. 13-3, pp. 63~70, 1980.
13. Choi, B.H., *A Tidal Model of the Yellow Sea and the Eastern China Sea*, Technical Report, KORDI 80~02, 1980.
14. Yoon, T.H., and Yoon, S.B., "Mathematical Simulation Model of Flow Induced circulation in a harbor," *Proc. of Int. conf. at 3rd Cong. of the APD-IAHR*, Bandung, 1982.
15. Streeter, V.L., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1971.
16. Lee, T.T. and sklarz M.A., "Numerical Prediction of Harbor Responses," *Symposium on Modeling Techniques*, ASCE, 1975.
17. Hansen, W., "Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen," *Tellus*, Vol. 8, No. 3, August 1956.
18. Welander, p., "Numerical Prediction of Storm Surges," *Advances in Geophysics*, Vol. 8, H.E. Landsbery and J. Von Mieghe(m eds.), Academic Press, New York, 1961.
19. Isozaki, I., and S. Unoki, "The Numerical Computation of the Tsunami in Tokyo Bay Caused by the Chilean Earthquake in May 1960," *Studies on Oceanography*, University of Washington, Seattle, 1965.
20. Dronkers, J.J., *Tidal Computations in Rivers and Coastal Waters*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.
21. Proudman, J., *Dynamical Oceanography*, John Wiley & Sone, Inc., New York, 1953.
22. Courant, R., Friedrichs., and Lewy, H., "Über did Partieller Differenzen-Gleichungen der Mathematischen Physik," *Math. Ann.* 100, pp. 32~74, 1928.
23. Abbott, M.B., *Computational Hydraulics: Elements of the Theory of Free Surface Flows*, Pitman, London., 1980.
24. Van Dorn, W., "Wind Stress on an Artificial Pond," *Journal of Marine Research*, Vol. 12, No. 3, pp. 249~267, 1953.
25. Abbott, M.B., *Numerical Modelling of Free-Surface Flows that are Two-Dimensional in Plan*. International Symposium on Predictive Abilities of Surface Water Flow and Transport Berkeley, California, 1980.
26. Abbott, M.B., *Numerical methods*, THE, Delft, 1977.
27. Richtmyer, R.D. and Morton, K.W., *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2nd Edition, New York, Interscience., 1967.
28. 이종태, 항내의 장주기과 해석을 위한 2차원 부정류의 수학적 모형개발에 관한 연구, 박사학위 청구 논문, 연세대학교, 1982.
29. Ippen, A.T. and Goda, *Wave Induced Oscillations in Harbors: The Solution for a Rectangular Harbor Connected to the Open Sea*. Report No. 59, Hydrodynamics Lab., M.I.T., 1963.

(接受 : 1982. 11. 19)