

斜面の 三次元 破壊確率에 關한 研究(II)

金泳壽* · 車弘濬** · 鄭聖寬***

A Three Dimensional Study on the Probability of Slope Failure(II)

Young-Su Kim* · Hong-Jun Tcha** · Sung-Kwan Jung***

Abstract

The probability of failure is used to analyze the reliability of three dimensional slope failure, instead of conventional factor of safety. The strength parameters are assumed to be normal variated and beta variated. These are interval estimated under the specified confidence level and maximum likelihood estimation. The pseudonormal and beta random variables are generated using the uniform probability transformation method according to central limit theorem and rejection method. By means of a Monte-Carlo Simulation, the probability of failure is defined as;

$$Pf = M/N \quad N: \text{Total number of trials}$$

$$M: \text{Total number of failures}$$

Some of the conclusions derived from the case study include;

1. Three dimensional factors of safety are generally much higher than 2-D factors of safety. However situations appear to exist where the 3-D factor of safety can be lower than the 2-D factor of safety.
2. The F_3/F_2 ratio appears to be quite sensitive to c and ϕ and to the shape of the 3-D shear surface and the slope but not to be to the unit weight of soil.
3. In cases that strength parameters are assumed to be normal variated and beta variated, the relationships between safety factor and the probability of failure are fairly consistent, regardless of the shape of the 3-D shear surface and the slope.
4. As the c -value is increased, the probability of failure for the same safety factor is increased and as the ϕ -value is increased, the probability of failure for the same safety factor is decreased.

1. 序 論

現在 斜面の 安全度の 尺度로서 安全率(FS) 이란 표현으로 나타낸다. 安全率 계산에 관여

하는 要素중 가장 중요한 것이 強度定數인테 이들 값은 橫, 縱으로, 各 點마다 다르고 시간에 따라 변한다.^{7,8,10,13)} 그리고 安全率 계산에 使用할 強度定數의 選擇, 土質탐사와 試驗의 量과 質, 즉 試料의 攪亂, 試驗方法, 試驗者의

* 江原大學校 工科大學 土木工學科 助教授

** 江原大學校 自然科學大學 統計學科 助教授

*** 大邱工業專門大學 土木科 專任講師

* Assistant Professor, Dept. of Civil Eng., Kangweon National University

** Assistant Professor, Dept. of Statistics., Kangweon National University

*** Instructor, Dept. of Civil Eng., Daegu Junior Engineering College.

속된, 결과치리 등과 같은 不確實性 때문에 分散性이 매우 크다.^{8,10)} 그리고 荷重(흙의 單位重量, 透水, 지진 등)과 解析절차 역시 不確實性 要素이다.

現在의 설계기준은 계산된 안전율이 적어도 許容値와 같거나 그보다 커야 한다. 그러나 이 경우에 실제로 動員된 抵抗이 실제 荷重보다 클때 破壞가 일어난다. 推定된 값과 실제의 값 사이의 관계를 알지 못하기 때문에 실제 安全率은 無作爲 變數이다. 安全率은 絕對的인 安全을 意味하지 않고 偶然한 기회에 破壞를 일으킬 可能性을 내포하고 있다.^{8,10)} 安全率은 數值的인 安全의 尺度는 아니다. 즉 FS=2인 경우가 FS=1인 경우보다 2倍 安全하다는 뜻은 아니다.⁸⁾ 許容 安全率은 過去의 經驗과 先例에 의하여 選擇되는데 이 安全率의 選擇은 個人의 直觀的인 任意的 選擇이라는데 批評을 받을 수 있으며 經驗이 없는 對象의 解析에는 아주 어렵다.^{8,14)} 이와같은 결점을 해결하고 強度定數와 荷重의 分散性을 解決할 수 있는 確率論的 接近方法의 必要性이 생기게 되는 것이다.⁸⁾

破壞確率을 求하려는 試圖은 Wu and Kraft¹³⁾ Matsuo and Kuroda, Tang, Yucemen, and Ang^{1,10)}, Catalan and Cornell, Baker and Garber, Kraft and Mukhopahay 등에 의하여 행하여 졌다. 그런데 이 연구들은 斜面安定의 關係적인 平面 變形 解析이었고 단지 Erik H. Vanmacke 만이 원호 활동 방법의 확장 즉 활동 土塊가 수직端 斷面을 가지고 한정된 길이를 갖는 실린더(Cylinder)의 一部分인 三次元 解析이었다. 그러나 이 연구는 斜面의 軸을 따라 하중과 강도특성은 변하지 않고 원호 활동 파괴면에 따라 변하는 경우에 대하여 특히 $\phi=0$ 인 흙에 대한 것이었다.

本 研究은 활동 土塊가 球의 一部分인 경우와 한정된 길이의 실린더의 일부분과 양쪽단이 球의 일부분인 三次元 解析이며^{2,5,11)} 흙의 單位重量과 全 破壞面에 強度定數의 分散性을 고려하였고 $c-\phi$ 인 흙에 대하여 행하였다.¹⁵⁾ 그리고 破壞確率은 強度定數와 흙의 單位重量의

確率分布를 正規分布와 베타分布(Beta Distribution)로 假定하여 계산이 빠르고 適用하기 쉬운 몬테칼로 방법(Monte-Carlo Simulation)을 사용하여 구하였다.

2. 研究內容 및 方法

本 研究에서는 기울기가 5 : 1, 5 : 3인 均質 土의 斜面에 대하여 地下水는 고려하지 않고 二次元 安全率(F_2)과 三次元 安全率(F_3)을 계산하였다.

여기에서 求한 最小 安全率을 가지는 破壞面에 대하여 破壞確率을 구하였다.

2. 1 安全率과 破壞確率의 定義

(1) 安全率(Safety Factor)⁴⁾

安全率은 滑動모우먼트에 대한 抵抗모우먼트의 比로 나타내며 前者를 하중(Demand), 後者를 抵抗(Capacity)이라 하여 確率論的 接近方法에서 그들을 確率分布로 생각하였고 決定論的 接近方法에서 두 點推定의 比 즉 推定된 荷重(\hat{D})에 대한 推定된 抵抗(\hat{C})의 比로서 安全率을 계산하여 왔다. (Fig. 1(a))

$$\text{즉 } F = \frac{\hat{C}}{\hat{D}} \text{ 이고}$$

Central Factor of Safety,

$$CFS = \frac{\text{期待抵抗}}{\text{期待荷重}} = \frac{\bar{C}}{\bar{D}} \text{ 이다.}$$

(2) 破壞確率(Probability of Failure)^{3,4,6)}

抵抗(C)와 荷重(D)와의 差(C-D)를 Safety Margin(SM)라 定義하고 그것 역시 無作爲 變數로 생각하여 破壞確率(P_f)을 계산하였다.

$$\text{즉 } SM = C - D$$

$$P_f = P\{C - D \leq 0\} - P\{SM \leq 0\}$$

$$\text{단 } 0 \leq P_f \leq 1$$

그리고 信賴度(Reliability), $R = 1 - P_f$ 이다. Fig. 1(b)에서 確率密度函數 아래의 面積은 累積密度函數를 意味하며 그全體의 面積과 び금친部分의 面積과의 比는 破壞確率을 意味한다.

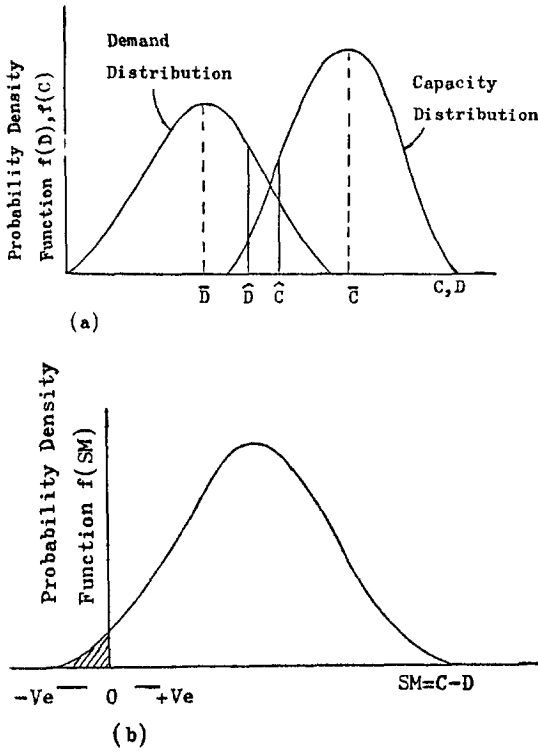


Fig. 1. (a) Distributions of Capacity C and Demand D both considered as random variables, (b) Distribution of safety margin SM considered as a random variable.

2. 2 研究의 模型과 安全率

(1) 二次元 安全率(F_2)⁵⁾

切片의 兩侧面에 作用하는 힘의 合力은 零이라 가정하였고 Fig. 2와 같은 경우에 대하여 다음과 같이 계산하였다.

$$F_2 = \frac{\sum(cA_2 + W_2 \cos\alpha_{yz} \tan\phi)}{\sum W_2 \sin\alpha_{yz}}$$

또는

$$F_2 = \frac{\sum\left(\frac{c\Delta Y}{\cos\alpha_{yz}} + \gamma \cdot z \Delta Y \cos\alpha_{yz} \tan\phi\right)}{\sum \gamma \cdot z \cdot \Delta Y \cdot \sin\alpha_{yz}}$$

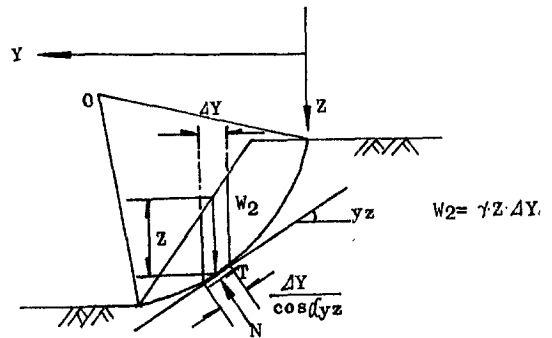


Fig. 2. Two-Dimensional Analysis

(2) 三次元 安全率(F_3)^{5, 15)}

활동 土塊를 작은 여러개의 기둥으로 나누어서 이 기둥의 兩侧面에 作用하는 힘의 合力은 零이라 가정하였고 다음과 같이 계산하였다.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1) &= \frac{e}{f} = \frac{c'}{\sqrt{e^2 + d^2}} \\ &= \frac{\frac{c'}{\tan\alpha_{xz}}}{\sqrt{\left(\frac{c'}{\tan\alpha_{xz}}\right)^2 + \left(\frac{c'}{\tan\alpha_{yz}}\right)^2}} \\ &= \left[1 + \left(\frac{\tan^2\alpha_{xz}}{\tan^2\alpha_{yz}}\right)\right]^{-1/2} \\ \cos(\alpha_2) &= \frac{g}{g'} = \frac{(d\sin\alpha_1)}{\frac{c'}{\sin(\alpha_2)}} \\ &= \frac{\left(\frac{c'}{\tan\alpha_{yz}}\right)\sin\alpha_1}{\frac{c'}{\sin(\alpha_2)}} = \frac{\sin\alpha_2 \sin\alpha_1}{\tan\alpha_{yz}} \\ &= (1 + \tan^2\alpha_{xz} + \tan^2\alpha_{yz})^{-1/2} \end{aligned}$$

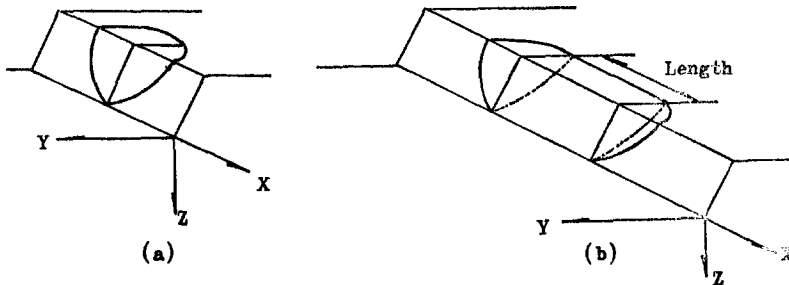


Fig. 3. Geometry of 3-D failure surface

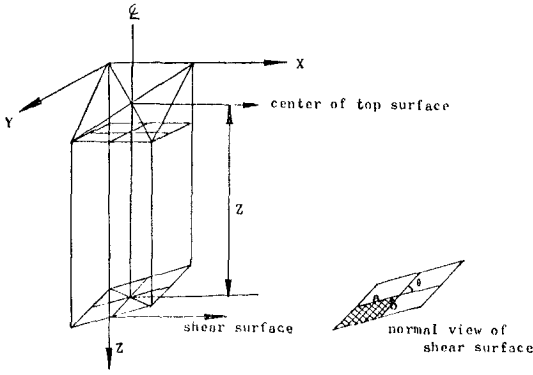


Fig. 4. Three-Dimensional View of One Soil Column

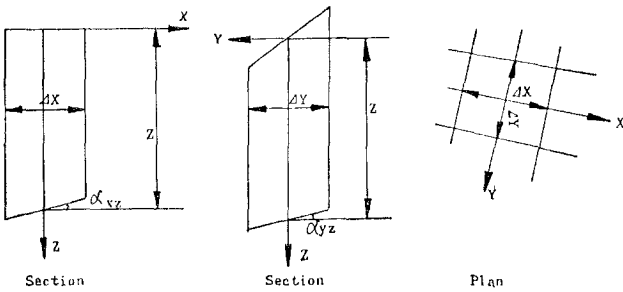


Fig. 5. Plan and Sections View of One Soil Column

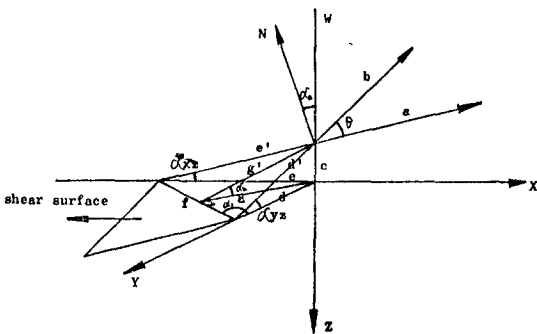


Fig. 6. Three-Dimensional View of Portion of Surface of Soil Column

그러므로 수직力 N 은

$$N = W \cos \alpha_2 = W(1 + \tan^2 \alpha_{xz} + \tan^2 \alpha_{yz})^{-1/2}$$

흙기둥의 전단파괴면의 면적(A_3)은

$$A_3 = ab \sin \theta \text{ 이다.}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{c'}{d'} + \frac{d'}{c'} - \frac{f^2}{e'd'} \right)$$

그리고

$$e' = \frac{c'}{\sin \alpha_{xz}}, \quad d' = \frac{c'}{\sin \alpha_{yz}}, \quad f^2 = c^2 + d^2$$

$$c = \frac{c'}{\tan \alpha_{xz}}, \quad d = \frac{c'}{\tan \alpha_{yz}}$$

그러므로

$$\cos \theta = \sin \alpha_{xz} \cdot \sin \alpha_{yz}$$

$$\sin \theta = (1 - \sin^2 \alpha_{xz} \cdot \sin^2 \alpha_{yz})^{1/2}$$

$$A_3 = \Delta X \cdot \Delta Y \left[\frac{(1 - \sin^2 \alpha_{xz} \cdot \sin^2 \alpha_{yz})^{1/2}}{\cos \alpha_{xz} \cos \alpha_{yz}} \right]$$

그리고 경계 부분은 흙기둥을 작게 나눔으로써 해결할 수 있다.

$$F_3 = \frac{\sum_x \sum_y [cA_3 + W_3 \cos \alpha_2 \tan \phi]}{\sum_x \sum_y W_3 \sin \alpha_{yz}}$$

또는

$$F_3 = \frac{\sum_x \sum_y \left[\frac{c \Delta X \Delta Y \sin \theta}{\cos \alpha_{xz} \cos \alpha_{yz}} + \gamma z \Delta X \Delta Y \cos \alpha_2 \tan \phi \right]}{\sum_x \sum_y \gamma z \Delta X \Delta Y \sin \alpha_{yz}}$$

2. 3 破壞確率 理論

(1) 強度定數의 確率分布函數

本 研究에서는 強度定數 c , ϕ 와 흙의 單位重量 γ 를 正規分布와 베타分布로 가정하였다.^{7, 15)} 가. 正規分布³⁾

SM의 平均(\overline{SM})과 標準偏差(S_{SM})은

$$\overline{SM} = \overline{C} - \overline{D}$$

$$S_{SM} = \sqrt{S_D^2 + S_C^2}$$

또 SM에 대한 確率密度函數는

$$f(SM; \overline{SM}, S_{SM})$$

$$= \frac{1}{S_{SM} \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{SM - \overline{SM}}{S_{SM}} \right)^2 \right\}$$

$$-\infty < SM < \infty, \quad S_{SM} > 0$$

그리고 累積密度函數는

$$F(SM; \overline{SM}, S_{SM})$$

$$= \int_{-\infty}^{SM} \frac{1}{S_{SM} \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{SM - \overline{SM}}{S_{SM}} \right)^2 \right] \cdot dSM \text{ 이다.}$$

나. 베타分布³⁾

區間(A, B)에 걸쳐있는 베타分布의 確率密度函數는

$$f(x; \alpha, \beta, A, B) = \frac{1}{B-A} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}$$

$$\left(\frac{x-A}{B-A} \right)^{\alpha-1} \cdot \left(1 - \frac{x-A}{B-A} \right)^{\beta-1}$$

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad A \leq x \leq B$$

$$= 0 \quad (\text{그렇지 않으면})$$

한편, 累積分函數는

$$F(x; \alpha, \beta, A, B) = 0 \quad x < A$$

$$= \frac{1}{B-A} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \int_A^x \left(\frac{x-A}{B-A}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(1-\frac{x-A}{B-A}\right)^{\beta-1} \cdot dx \quad A \leq x \leq B$$

$$= 1, \quad x > B$$

여기서 α, β 는 形狀係數이며 다음과 같이 概略的으로 求할 수 있다.

$$\hat{x} = \frac{\bar{x} - A}{B - A} \quad \hat{V} = \left(\frac{S}{B - A}\right)^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{(1 - \hat{x})}{\hat{V}} [\hat{x}(1 - \hat{x}) - \hat{V}]$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{x} \cdot \hat{\beta}}{1 - \hat{x}}$$

(2) 信賴區間(Confidence Interval)⁴⁾

가. 正規分布

土性指數의 統計的 資料에서 Coefficient of Variance(C. O. V.)를 利用하여 求한 標準偏差의 값에 따라 信賴區間을 決定하였다.

나. 베타分布

區間(A, B)는 最尤推定法(Maximum Likelihood Estimation)에 의하여 決定하였다.

$$\max(x) = \hat{B}$$

$$\min(x) = \hat{A}$$

(3) 確率分布에 대한 確率變數生成

가. 正規分布

中心極限定理⁹⁾에 의하여 生成시켰다. 0에서 1사이의 一樣分布하는 確率變數 X_i 는 다음 式에 의하여 平均 $\bar{x}=0$ 이고 分散 $S^2=1$ 인 標準正規分布의 確率變數 $X_N(0, 1)$ 를 얻는다.

$$X_N(0, 1) = \sum_{i=1}^{12} X_i - 6 \dots\dots\dots(1)$$

그런데 式(1)은 確率值를 生成하는데 12개의 一樣分布하는 確率變數를 갖기 때문에 많은 數를 생성하기에 곤란하며 標準正規分布의 꼬리部分의 確率變數의 生成이 빈약하다는 弱點을 가지고 있다. 故하여 Teichroew⁹⁾는 式(1)을 수정하여 $\pm 3S$ 까지 사용할 수 있게 하였다.

$$R = \sum_{i=1}^{12} X_i - 6$$

$$X_N(0, 1) = \langle \langle [C_1 R^2 + C_2] R^2 + C_3 \rangle R^2 + C_4 \rangle R^2 + C_5 \rangle R \dots\dots\dots(2)$$

여기서

$$C_1 = 0.029899776, \quad C_2 = 0.008355968$$

$$C_3 = 0.076542912, \quad C_4 = 0.252408784$$

$$C_5 = 3.949846138$$

式(2)을 사용하여 平均 \bar{x} , 標準偏差 S를 가지는 正規分布의 確率變數는 다음 式에 의하여 生成시켰다.

$$X_N(\bar{x}, S) = S X_N(0, 1) + \bar{x}$$

나. 베타分布

Rejection Method에 의하여 生成시켰다.

Rejection Method는 다음과 같다.

(a) 區間(0, 1)에서 一樣分布하는 獨立的 亂數 U_1, U_2 를 生成한다.

(b) $R_1 = U_1^{1/p}, R_2 = U_2^{1/q}$ 를 계산한다. 만일, $R_2 > 1.0$ 이면 (a), (b) 과정을 반복한다.

(c) 區間(0, 1)에서 베타分布하는 確率變數는

$$X_B(0, 1) = R_1/R_2$$

(d) 따라서 區間(A, B)에서 베타分布하는 確率變數는

$$X_B(A, B) = X_B(0, 1)(B - A) + A$$

여기서, P, Q : 베타分布의 形狀係數(α, β)

(4) 破壞確率 계산^{6, 12)}

몬테칼로 방법⁹⁾에 의하여 사용한 결과 N個中 M個의 破壞를 얻었다면 破壞確率 P_f 는 다음과 같이 定義할 수 있다.

$$P_f = M/N$$

이때 N가 커질수록 確率은 正確하다. 이 방법은 복잡한 積分, Taylor의 級數를 푸는데 있어서 또는 하나 이상의 無作爲 變數의 確率分布를 계산하는데 있어서 아주 적절한 방법이다. 물론 계산 능력이 빠른 컴퓨터가 이용되어야 한다.

2. 4 本 研究에 使用한 入力 데이터 (Data)⁴⁾

粘着力 c의 C. O. V = 45%

내부마찰각 ϕ 의 C. O. V = 13%

흙의 單位重量 γ 의 C. O. V = 5%

斜면의 傾斜 Slope = 5 : 1, 5 : 3

斜면의 높이 H = 10m

한계길이 (三次元 解析) Length = 20m, 40m

正規分布에서 信賴度가 99.73% 때 最大值 ($\bar{x}+3S$), 最小值 ($\bar{x}-3S$)로 限定되어지며 最小値는 0보다 작을 수 없기 때문에 0으로 하였다.

3. 結果 및 分析

3.1 三次元 安全率과 二次元 安全率의 比較

(1) 斜면의 기울기에 따른 F_3/F_2 의 비교

기울기를 5:1과 5:3인 경우 모두 $\gamma=1.7$ t/m^3 로 하여 Fig. 3(a)와 같은 (Length=0) 斜面 활동 土塊에 대하여 F_3/F_2 의 비를 연구한 결과 Fig. 7, 8과 같았다. Fig. 7에서는 c 값이 커짐에 따라 F_3/F_2 도 커지는 경향을 나타냈지만 Fig. 8에서는 c 값에 따라 뚜렷한 경향을 보이지 않았다.

(2) 斜면의 기울기에 따른 限界길이의 効果

기울기를 5:1과 5:3인 경우 모두 $\gamma=1.7$ t/m^3 로 하여 Fig. 3(a), (b)와 같은 斜面활동 土塊에 대하여 限界길이 Length=20m, 40m인

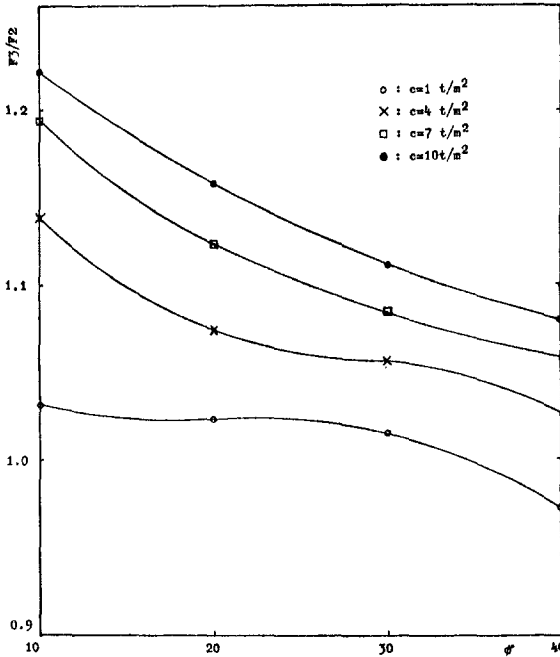


Fig. 7. F_3/F_2 Ratio, Length=0, 5:1 Slope, $\gamma=1.7t/m^3$

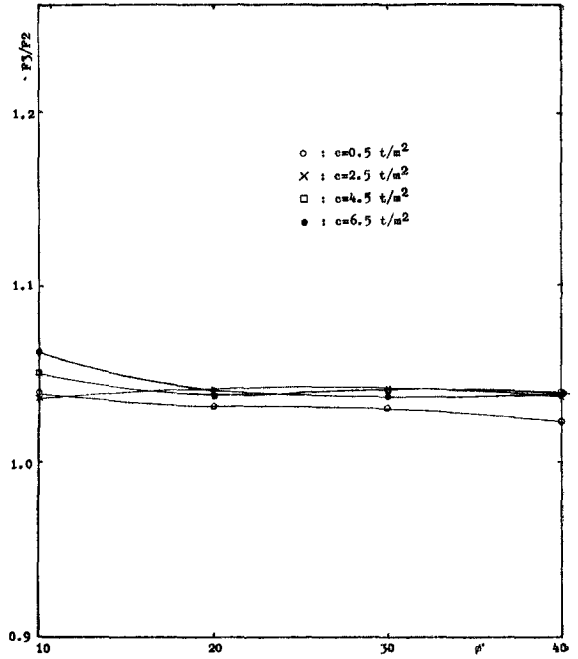


Fig. 8. F_3/F_2 Ratio, Length=0, 5:3 Slope, $\gamma=1.7t/m^3$

경우 F_3/F_2 의 비를 연구한 결과 Fig. 9, 10과 같았다. Fig. 9에서는 c 값이 커짐에 따라 (ϕ 값이 작아짐에 따라) F_3/F_2 도 커지는 경향을 보였지만 Fig. 10에서는 뚜렷한 경향을 보이지 않았다.

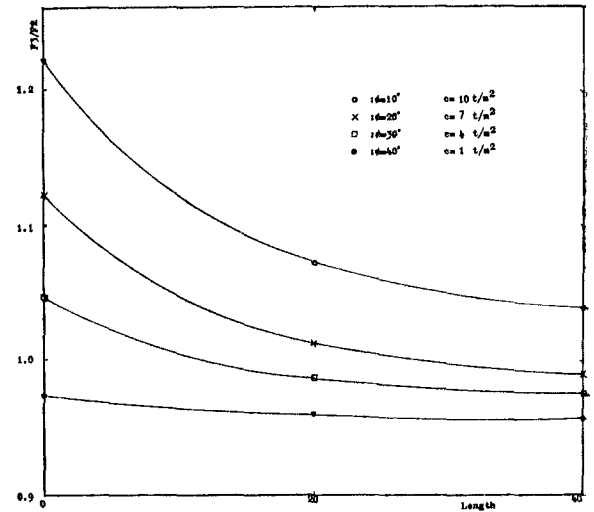


Fig. 9. Effect of Length, 5:1 Slope, $\gamma=1.7t/m^3$

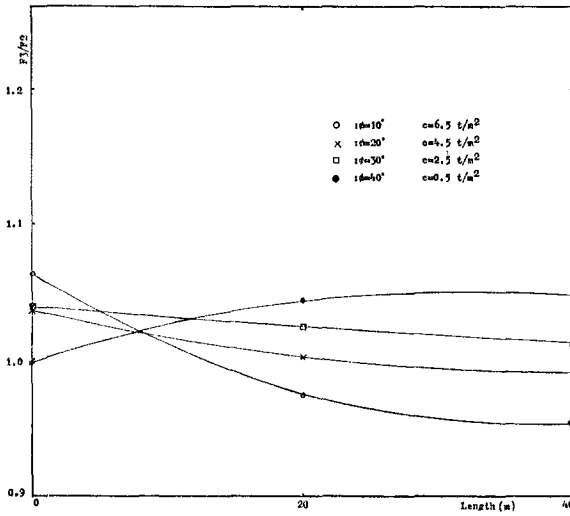


Fig. 10. Effect of Length, 5:3 Slope, $\gamma=1.7t/m^2$

(3) 斜面の 기울기에 따른 單位重量의 効果
 기울기를 5:1과 5:3인 경우 각각 粘着力 c
 를 $4t/m^2$, $4.5t/m^2$ 로 하여 Fig. 3(a)와 같은
 (Length=0) 斜面 활동 土塊에 대하여 F_3/F_2 의
 비를 연구한 결과 Fig. 11, 12와 같았다. 이 경

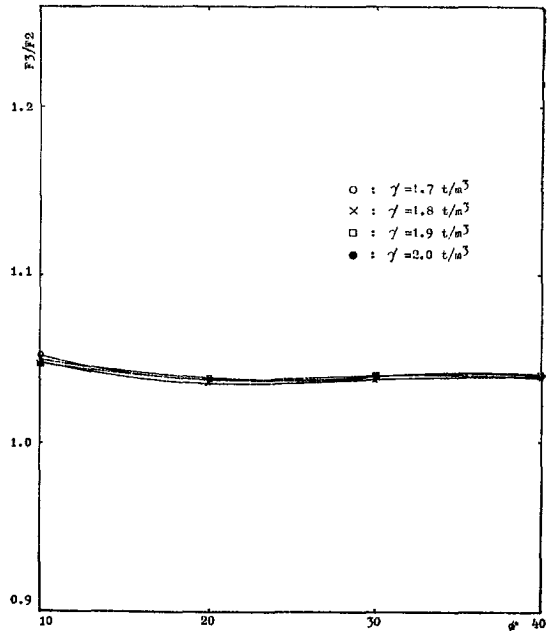


Fig. 12. F_3/F_2 Ratio, Length=0, 5:3 Slope $c=4.5t/m^2$

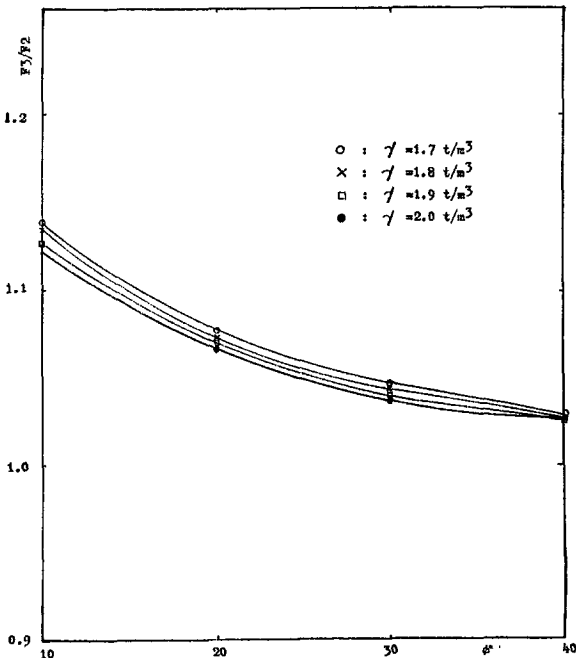


Fig. 11. F_3/F_2 Ratio, Length=0, 5:1 Slope $c=4t/m^2$

우는 모두 약간의 차이는 있었으나 별로 차이
 는 나타나지 않았다.

(4) 破壞確率과 安全率(F_3)과의 관계

가. 正規分布의 경우

斜面の 기울기가 5:1, 5:3인 경우 $\gamma=1.7$
 t/m^3 로 하여 Fig. 3(a), (b)와 같은 (Length=
 0, 20m) 斜面 활동 土塊에 대하여 연구한 결과
 Fig. 13, 14, 15, 16과 같다. Fig. 13, 14에서 ϕ 값이
 커짐에 따라 같은 安全率에 대하여 破壞確率は
 낮았고, c 값이 커짐에 따라 같은 安全率에 대
 하여 破壞確率は 커졌다. 그리고 Fig. 15에서
 보는 바와 같이 斜面の 기울기가 다른 경우에
 도 같은 결과를 나타냈다. 또 Fig. 16에서와 같
 이 限界길이 Length=20인 경우도 같은 경향을
 보였다.

나. 베타分布인 경우

Fig. 17에서와 같이 베타分布인 경우는 正規
 分布인 경우나 같은 양상을 보였다.

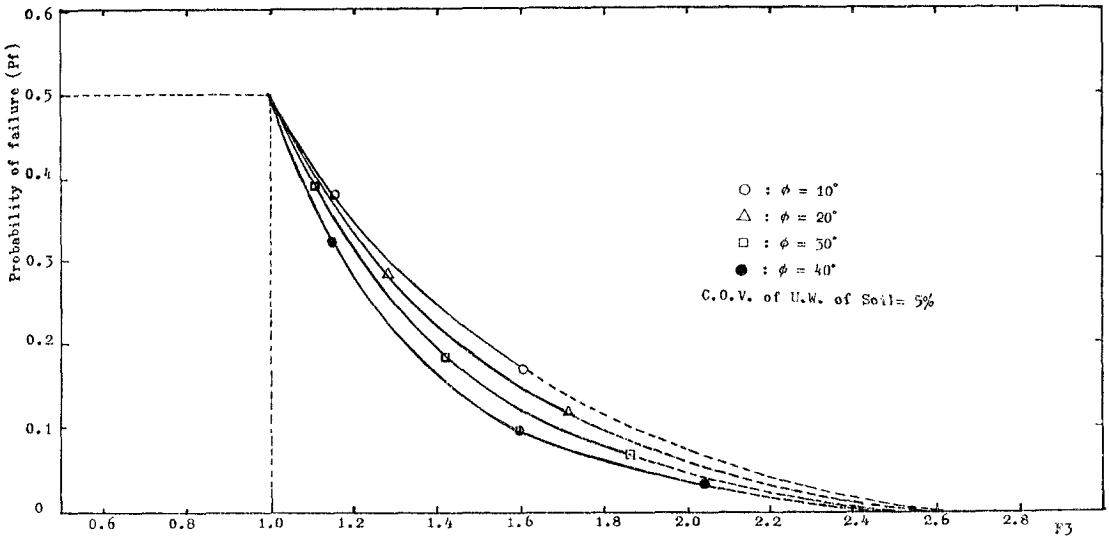


Fig. 13. Relationships between probability of failure and safety factor(C.O.V. of I.F. Angle=13%, C.O.V. of Cohesion=45%, Slope=5:1, Length=0, $\gamma=1.7t/m^2$, Normal Distribution)

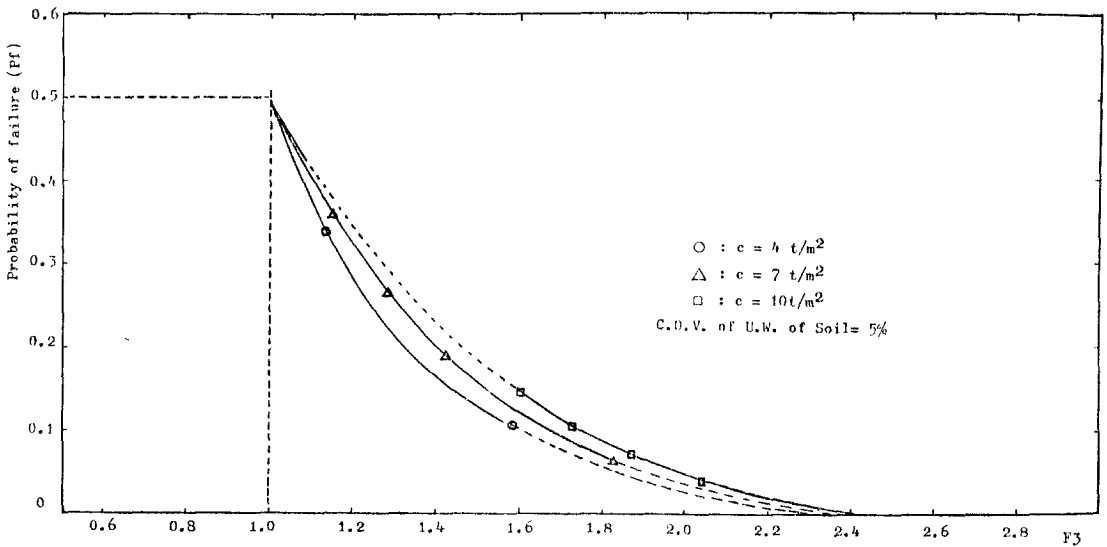


Fig. 14. Relationships between probability of failure and safety factor(C.O.V. of I.F. Angle=13%, C.O.V. of Cohesion=45%, Slope=5:1, Length=0, $\gamma=1.7t/m^3$, Normal Distribution)

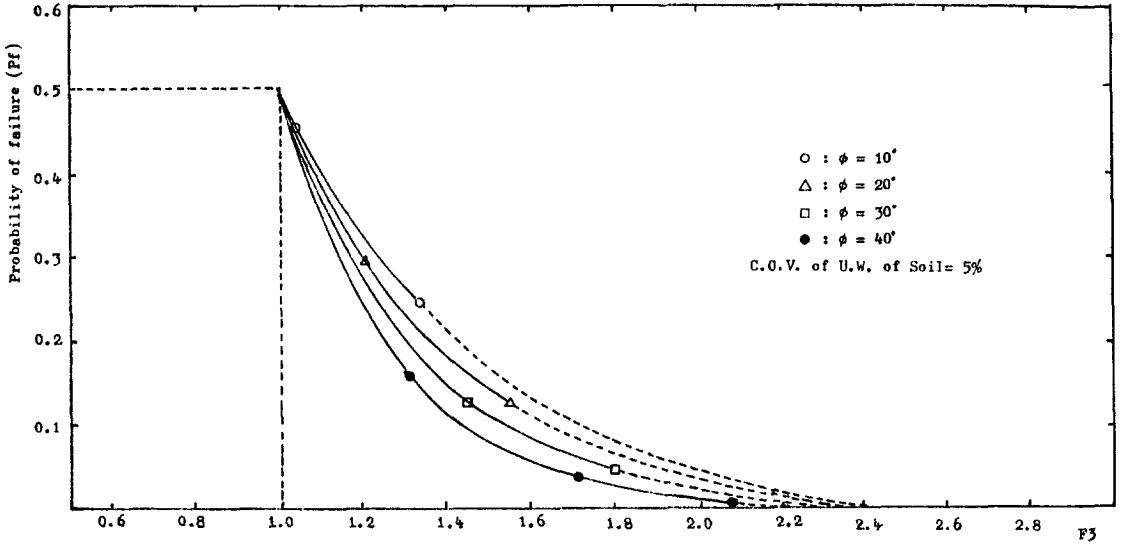


Fig. 15. Relationships between probability of failure and safety factor(C.O.V. of I.F. Angle=13%, C.O.V. of Cohesion=45%, Slope=5:3, Length=0, $\gamma=1.7t/m^3$, Normal Distribution)

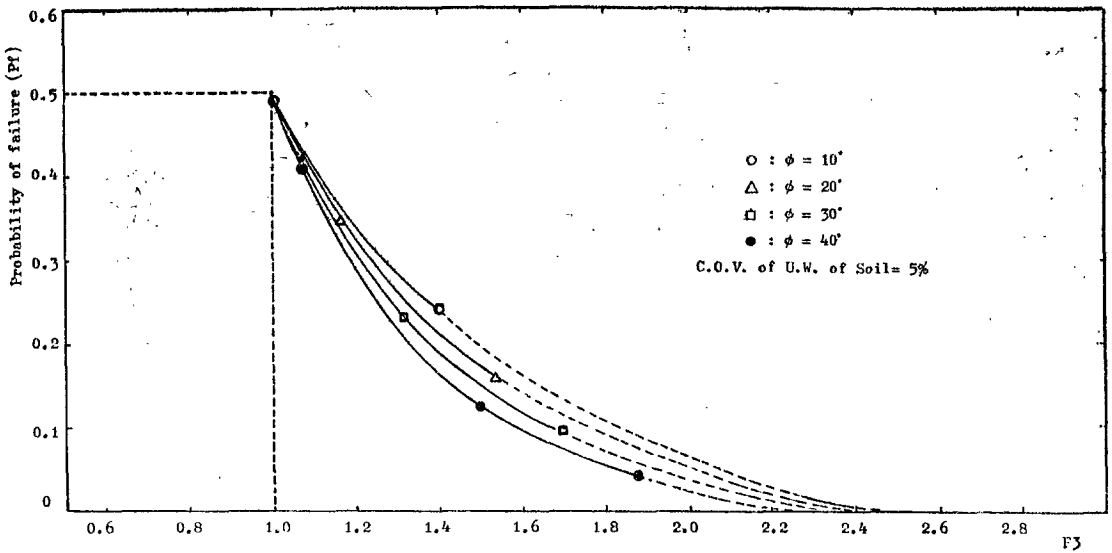


Fig. 16. Relationships between probability of failure and safety factor(C.O.V. of I.F. Angle=13%, C.O.V. of Cohesion=45%, Slope=5:1, Length=20m, $\gamma=1.7t/m^3$, Normal Distribution)

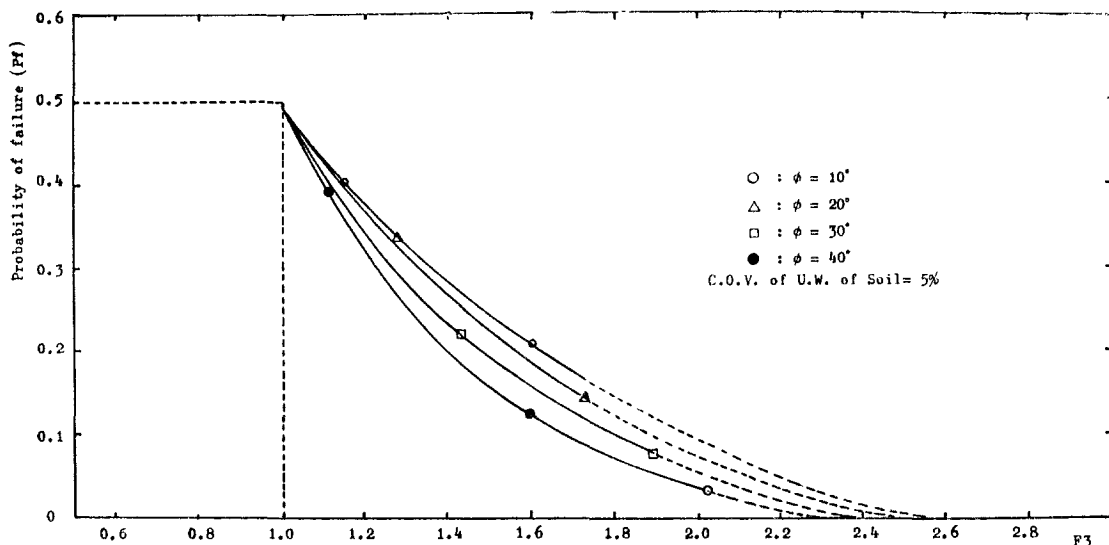


Fig. 17. Relationships between probability of failure and safety factor (C.O.V. of $1/F$, Angle=13%, C.O.V. of Cohesion=45%, Slope=5:1, Length=0, $\gamma=1.7t/m^3$, Beta Distribution)

4. 結 論

(1) 三次元 安全率 F_3 은 대체로 二次元 安全率 보다 크게 나타났다. 그러나 경우에 따라서 그렇지 않은 경우도 나타났다.

(2) F_3/F_2 의 비는 c , ϕ 값과 기울기 그리고 三次元 破壞 형상에 따라 아주 변화가 심하게 나타났다. 그러나 흙의 單位重量에 대해서는 별로 차이가 없었다.

(3) 強度定數가 正規分布나 베타分布인 경우에 破壞確率과 安全率과의 관계는 斜面의 기울기와 破壞형상에 따라 거의 일정하였다. 그리고 c 값이 커짐에 따라 같은 安全率에 대하여 破壞確率は 커졌고 ϕ 값이 커짐에 따라 같은 安全率에 대하여 破壞確率は 작아졌다.

(4) 앞으로 地下水의 영향, 動的荷重, 인장 균열, 不均質土에 對한 많은 연구가 이루어져야 겠다.

Reference

1. Ang, A. H. S., and Amin, M., "Safety Factors and Probability in Structural Design",

Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, No. ST7, July, 1969, pp. 1389-1405.

2. Baligh, M. M., and Azzouz, A. S., "End Effects on Stability of Cohesive Slopes", Journal of the Geotechnical Division, ASCE, Vol. 101, No. GT11, November, 1977, pp. 1105-1117.

3. Hahn, G. T., and Shapiro, S. S., "Stability Models in Engineering", John Wiley and Sons, Inc., 1968.

4. Harr, M. E., "Mechanics of Particulate Media", McGraw-Hill, Inc., 1977.

5. Hovland, H. J., "Three-Dimensional Slope Stability Analysis Method", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 103, No. GT9, September, 1977, pp. 971-986.

6. Lumb, P., "Safety Factors and the Probability Distribution of Soil Strength", Canadian Geotechnical Journal, 7, No. 3, pp. 225-242.

7. Lumb, P., "The Variability of Natural Soils," Canadian Geotechnical Journal, 3, No. 2, pp. 74-97.

8. Meyerhof, G. G., "Safety Factor in Soil Mechanics", Canadian Geotechnical Journal, 7,

- No. 4, pp. 349—354.
9. Shannon, R. E., "Systems Simulation, The Art and Science", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1975.
 10. Tang, W. H., Yucemen, M. S., and Ang, A. H. S., "Probability Based Short Term Design of Soil Slopes", Canadian Geotechnical Journal, 13, pp. 201—214.
 11. Vanmarke, E. H., "On the Reliability of Earth Slopes", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 103, No. GT11, November, 1977, pp. 1247—1265.
 12. Vanmarke, E. H., "Probability Modelling of soil Profiles", Journal of the Geotechnical Division, ASCE, Vol. 103, No. GT11, November, 1977, pp. 1227—1246.
 13. Wu, T. H., and Kraft, L. M., "Safety Analysis of Slopes", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 96, No. SM2, March, 1970, pp. 609—630.
 14. Wu, T. H., "Uncertainty, Safety, and Decision in soil Engineering", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 100, No. GT3, March, 1974, pp. 348—392.
 15. 金泳壽, "斜面의 三次元 破壞確率에 관한 研究" 大韓土木學會, 제3권 제3호, 1983, 9, pp. 95—106.