韓國OR學會誌
第8卷 第1號
1983年 4月

—研究論文—

창고설치문제를 위한 새로운 解法

(A New Method for Warehouse Location Problem)

박 순 달*

Abstract

The purpose of this paper is to find a new method for the warehouse location problem. Akinc and Khumatvala developed a branch and bound algorithm for a one-stage problem, that is, plants and warehouses are at the same location. This paper extends this method to a two-stage problem, that is, plants, warehouses and users are located at different sites, and further this paper allows direct flows from plants to users.

The new method is tested at Perkins-Elmer. The test shows that the algorithm is efficient.

1. 서 론

이 논문은 생산지에서 소비지로 물건을 수송함에 있어서 수송비, 건설비등 전체 비용을 절감할 수 있는 창고설치 문제를 다룬다. 이런 문제를 보통 창고설치 (Warehouse Location)문제라고 부른다. 생산지에 바로 창고가 위치할 경우 즉 생산지와 창고가 같은 위치를 취할 때는 1단계 창고설치 문제라고 하고 생산지, 창고, 소비지가 각각 다를 때는 2단계 창고설치(2 stage warehouse location)문제라고 한다.

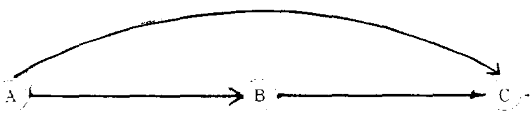
이런 문제는 혼합정수 계획법으로 표현될 수 있다. 따라서 혼합정수계획법의 分枝限界法으로 풀 수 있다. Akinc와 Khumatvala[22]는 1단계 창고설치 문제에서 Erlenkotter[8]의 정리를 이용하여 정수계획법의 分枝限界法보다 효과적인 새로운 分枝限界法을 개발하였다.

이 논문은 Akinc와 Khumatvala의 分枝限界法을

(1) 2단계 창고설치 문제

(2) 생산지에서 창고, 창고에서 소비자 뿐만 아니라, 생산지에서 소비자로의 직송이 허용되는 문제로 확장코저 한다.

지금 生產地의 集合을 A, 창고의 集合을 B, 소비자의 集合을 C라고 하자. 이때 이 논문에서 취급할 문제는 다음 〈그림 1〉과 같이 된다.



〈그림 1〉 2단계 창고설치 문제

이 문제를 混合整數計劃法으로 표현해보자. 먼저 記號를 정의한다.

어떤 $i \in A$, $j \in B$, $k \in C$에 대해서

a_{ij} : $i \to j$ 단위 수송비

b_{jk} : $j \to k$ 〃

c_{ik} : $i \to k$ 〃

x_{ij} : $i \to j$의 수송량

y_{jk} : $j \to k$ 〃

z_{ik} : $i \to k$ 〃

F_i : i 의 capacity

* 서울大學校 產業工學科

E_j : j의 capacity

D_k : k의 수요량

P_i : i의 단위 생산비

G_j : j의 설치비

$\pi_j=0,\ 1$ 창고의 설치여부

라고 정의한다. 그러면 이 문제는 다음과 같은 **混合整數計劃法**으로 표현된다. 즉,

$$\text{Minimize } Z=\sum_{i\in A}\sum_{j\in B}a_{ij}x_{ij}+\sum_{j\in B}\sum_{k\in C}b_{jk}y_{jk}+\sum_{i\in A}\sum_{k\in C}c_{ik}z_{ik}$$
$$+\sum_{i\in A}P_i(\sum_j x_{ij}+\sum_k z_{ik})+\sum_{j\in B}G_j\pi_j$$

s.t.

$$\sum_{j\in B}x_{ij}+\sum_{k\in C}z_{ik}\le F_i,\ i\in A \qquad (1)$$
$$\sum_i x_{ij}\le E_j\pi_j,\ j\in B$$
$$\sum_{j\in B}y_{jk}+\sum_{i\in A}z_{ik}=D_k,\ k\in C$$
$$x_{ij},y_{jk},z_{ik}\ge 0,$$
$$\pi_j=0,\ 1$$

이 문제에서

$$F_i<\sum_{k\in C}D_k$$
$$\sum_{i\in A}F_i\ge\sum_{k\in C}D_k$$

가 성립되면 문제가 可解(feasible)가 된다.

2. 分枝限界法

지금 〈그림 1〉에서 창고설치 장소가 결정되었다고 하자. 그러면 식 (1)은 단순한 最小費用문제로써 된다. 이때 식 (1)에서 $\pi_j=1\ \forall j\in B$이기 때문에 目的함수를 조정하면 다음 식(2) 즉 $P(B)$와 같이 된다

$$\text{Min } Z(B)=\sum_i\sum_j(a_{ij}+p_i)x_{ij}+\sum_j\sum_k b_{jk}y_{jk}$$
$$+\sum_i\sum_k(c_{ik}+p_i)z_{ik}$$

s.t.

$$P(B):\quad \begin{aligned}&\sum_{j\in B}x_{ij}+\sum_{k\in C}z_{ik}\le F_i,\ i\in A\\&\sum_{i\in A}x_{ij}\le E_j,\ j\in B\\&\sum_{j\in B}y_{jk}+\sum_{i\in A}z_{ik}=D_k,\ k\in C\\&x_{ij},y_{jk},z_{ik}\ge 0\end{aligned}\qquad (2)$$

그런데 이 문제의 双對문제를 구해보면 다음과 같다.

$$\text{Max } W(B)=\sum_{i\in A}(-F_i)u_i+\sum_{j\in B}(-E_j)v_j+\sum_{k\in C}D_kW_k$$

s.t.

$$Q(B):\quad \begin{aligned}&-u_i\quad -v_j\quad\le a_{ij}+p_i,\ \forall_{i,j}\\&w_k\le b_{jk},\ \forall_{j,k}\\&-u_i+w_k\le c_{ik}+p_i,\ \forall_{i,k}\\&u_i\ge 0,\ v_j\ge 0\end{aligned}\qquad (3)$$

여기서 물론

$$\text{Min } Z(B)=\text{Max } W(B)$$

가 성립한다. 지금 식 (2)의 최소비용을 $\bar{Z}(B)$, 식(3)의 最大值를 $\overline{W}(B)$라고 하자. 그러면 $\bar{Z}(B)=\overline{W}(B)$이다.

지금 가능해 集合 S에서의 Min $Z(B)$값을 $\bar{Z}_s(B)$라고 표기하고 Max $W(B)$의 값을 $\overline{W}_s(B)$라고 표기하기로 하자.

定理. $B'\subset B$라고 하자. 그러면 $t\notin B$라고 하면

$$\bar{Z}(B)-\bar{Z}(B^U\{t\})\le\bar{Z}(B')-\bar{Z}(B'^U\{t\})$$

가 성립한다.

증명. $Q(B)$의 可能解集合을 S

$Q(B^U\{t\})$의 〃 S'

$Q(B')$의 〃 T

$Q(B'^U\{t\})$의 〃 T'

이라고 두자. 그러면 $T'\setminus T\supset S'\setminus S$이다. 그리고 $\overline{W}(B)-\overline{W}(B^U\{t\})=\overline{W}_s(B)-\overline{W}_{s'}(B^U\{t\})=\overline{W}_s(B)-\overline{W}_{s'}(B)-\text{Max}\{S'\text{에서의 }(-E_tv_t)\}=\overline{W}_s(B)-\overline{W}_{s'}(B)$

왜냐하면 Max$\{S'$에서의 $(-E_tv_t)\}=0$이기 때문이다.

$\overline{W}(B')-\overline{W}(B'^U\{t\})=\overline{W}_T(B')-\overline{W}_{T'}(B')-\text{Max}\{T'\text{에서의 }(-E_tv_t)\}=\overline{W}_T(B')-\overline{W}_{T'}(B')$

왜냐하면 Max$\{T'$에서의 $(-E_tv_t)\}=0$이기 때문이다.

그런데 $W(B')\ge W(B)$이고 $T'\setminus T\supset S'\setminus S$이기 때문에 $\overline{W}_s(B)-\overline{W}_{s'}(B)\le\overline{W}_T(B')-\overline{W}_{T'}(B')$이다. 따라서

$$\overline{W}(B)-\overline{W}(B^U\{t\})\le\overline{W}(B'^U\{t\})$$

가 성립된다. 따라서

$$\bar{Z}(B)-\bar{Z}(B^U\{t\})\le\bar{Z}(B')-\bar{Z}(B'^U\{t\})$$

가 성립된다. ▨

이 정리는 창고가 적은 경우 창고를 하나 더 설치함으로써 일어나는 총 비용의 절감은 창고의 수가 많은 경우의 것보다 크다는 것을 나타내고 있다.

1단계 창고설치 문제에 대해서는 Erlenkotter[8]가 이미 그의 논문에서 증명하고 있다.

이런 성질을 이용하면 다음과 같은 창고설치 기준을 만들 수 있다.

(1) 창고 설치기준(criterion for fixing a warehouse open)

이미 창고를 설치하기로 결정된 창고의 集合을 B_0,

창고를 짓지 않기로 결정된 창고 예정지의 集合을 B_c라고 두자. 그리고 나머지를 B_u라고 하자. 그러면 물론 $B=B_0{}^U B_c{}^U B_u$이다.

基準 Ⅰ. 지금

$$\Delta B_j=\bar{Z}(B_0{}^U B_c-\{j\})-\bar{Z}(B_0{}^U B_c)$$

로 두면

$$\Delta B_j\geq G_j$$

일 때 창고 j를 설치한다. 즉

$Z_j=1$로 둔다.

이것은 ΔB_j가 창고를 설치함으로써 얻을 수 있는 수송비 감소분의 下限이고 G_j는 창고 j를 설치함으로써 일어나는 비용이기 때문이다. 즉 창고 예정지 j를 설치함으로써 얻을 수 있는 수송비 감소의 하한이 창고 설치비 보다 크면 창고를 설치하는 것이 당연히 유리하다.

基準 Ⅱ. 그리고

$$\Omega B_j=\bar{Z}(B_0)-\bar{Z}(B_0{}^U\{j\})$$

이라 둔다. 그리고

$\Omega B_j\leq G_j$이면

$\pi_j=0$이라고 둔다.

이것은 ΩB_j가 창고 예정지 j를 설치함으로써 얻어지는 수송비 감소의 上限이고 이 上限 ΩB_j가 창고 설치비 G_j보다 작으면 창고를 설치하는 것이 당연히 불리하다. 그래서 $\pi_j=0$라고 둔다.

이 기준들을 이용하여 分枝限界法을 개발해 보자.

Step 1. $B_0=\phi$, $B_c=\phi$, $B_u=B$이라고 둔다.

下限 $Z^0=\bar{Z}(B_u)$으로 둔다.

Step 2. 만일 $B_u=\phi$이면 끝난다. 모든 $j\in B_u$에 대해 ΔB_j, ΩB_j를 구한다.

만일 $\Delta B_j\geq G_j$이면 $\pi_j=1$

$\Omega B_j\leq G_j$이면 $\pi_j=0$

이라고 둔다.

그리고 B_0, B_c, B_u를 수정한다.

Step 3. 限界

$\bar{Z}(B_0{}^U B_u)\geq Z^0$이면 fathom

그렇지 않으면 go to step 4.

Step 4. 分枝

B_u에서 j를 선택하여 $\pi_j=1$과 $\pi_j=0$으로 分枝한다.

문제 1 : $B_0=B_0{}^U\{j\}$, $B_c=B_c$, $B_u=B_u-\{j\}$

문제 2 : $B_0=B_0$, $B_c=B_c{}^U\{j\}$, $B_u=B_u-\{j\}$

Go to step 2.

(2) 계산 결과

이 計算方法을 이용하여 여러가지 형태의 문제에 대하여 계산하기로 한다. 여기서 最小經費문제는 Out-of-kilter 알고리즘을 사용하기로 한다. 그러면 計算결과는 다음과 같다.

문제크기	Network크기	CPU시간(초)
2× 5×10	24×138	12.91
2×10×20	44×293	51.92
3×10×25	50×394	98.47
2×10×35	59×488	178.54

(단, PERKIN-ELMER 3220를 사용)

3. 결　　론

이 2단계 창고설치 문제는 混合整數計劃法으로도 풀릴 수 있다. 그러나 시간이 많이 걸린다. 비록 속도가 비교적 낮은 PERKIN-ELMER로 풀었으나 그 CPU 시간으로 보아 混合整數計劃法보다는 월등히 좋다는것을 알 수 있다.

註　記

이 논문은 주상호 〔23〕의 석사학위 논문에 着想을 두고 있다. 이 논문의 계산 결과는 주상호〔23〕를 인용하였다.

참 고 문 헌

1. A. Ravindran. Derwood L. Hanline, "Optimal location of coal blending plants by mixed-integer programming," ATIE, trans. Vol. 12, No. 2, 179~185(1980).
2. Alcouffe. A. and G. Muratle, "Optimal Location of Plants," Management Sci. Vol. 23, No. 3, 267~274(1976).
3. Armour, G. and E. Buffa, "A Heuristic Algorithm and simulation approach to relative Location of facilities." Management Sci. 9(2), 294~309(1969).
4. Barrie H. Baker, "Linear relaxation of the capacitated warehouse Location [problem," J. opl. Res. Soc. Vol. 33, pp. 475~479(1932).
5. Basheer M. Khumawala, "An Efficient Branch and Bound Alg. for the Warehouse Location Problem," Management Sci. Vol. 18, No. 12,

B-718~731(1972).

6. Ellwein, L.B. and P. Gray, "Solving fixed change location-allocation Problems with capacity and side constraints," AITE. Trans., Vol. 3, No. 4, 290~298(1971).
7. Elson, D.G., "Site Location Via Mixed-integer programming," Opl. Res. Q. Vol. 23, No. 1, 31~43(1972).
8. Erlenkotter, D., "Preinvestment Planning for Capacity Expansion: A Multi-Location Dynamic Model," unpublished Ph. D. dissertation, Stanford University(1969).
9. G. Mitra, "Investigation of some B & B strategies for the solution of Mixed integer LP," Math. Programming 4, 2. pp. 155~170, April 1973.
10. Geoffrion, A.M., "A Guide to Computer Assisted methods for distribution sys. Planning," sloan managt. Review, Vol. 16, No. 2, 17~41 (1975).
11. Geoffrion, A.M. and McBride, R., "Lagrangian Relaxation Applied to capacitated facility location problems," AIIE Trans. Vol. 10, 40~47 (1978).
12. James G. Morris, "On the extent to which certain fixed charge depot locations can be solved by LP," J. opl. Res. Soc. Vol. 29, 71~76(1978).
13. Kennigton, J. and V. Unger, "The group theoretic Structure in the fixed charge transportation problem," O.R. 2(15), 1142~1153(1973).
14. Leon Cooper, "Location-Allocation problems," O.R. 331~343(1962).
15. L.F. McGinnis, "A Survey of recent results for a class of facilities location problems," AIIE trans. Vol. 9, No. 1, 11~18(1977).
16. Marshall L. Fisher, "The Lagrangian relaxation method for Solving integer programming problems," Mangt. Sci. Vol. 27, No. 1, 1~18 (1981).
17. P.S. Davis and T.L. Ray(1969), "AB & B alg. for the Capacitated Warehouse location problems," Nav. Res. Logist. Q. 16. 331~344.
18. Rardin, R.L. and V.E. Unger, "Solving fixed-charge Network Problem with group theory based penalties," Nav. Res Log. Q. Vol. 23, No. 1, 67~84(1976).
19. R.L. Francis and J.M. Goldstein, "Location theory: A selective bibliography", O.R. 22, 400~410(1974).
20. Roy Grant, Distribution management, Business book Limited, London. 1968.
21. S.L. Hakimi and S.N. Maheshwari, "Optimum Locations of Centers in Networks," O.R. Vol. 20, 967~973(1972).
22. Umit Akinc and Basher M. Khumatvala, "An efficient B & B algorithm for the capacitated warehouse location," management Sci. Vol. 23, No. 6, 585~594(1977).
23. 주상호 分校限界 기법을 이용한 혼합단계 분배체계의 창고입지선정, 서울대학교, 석사논문, 1983. 2.