解析的 寫眞測定에 있어서 輕重率을 고려한 標定解析에 관한 硏究

安 哲 浩*　　柳 福 模**
Ahn Chul-Ho　　Yeu Bock-Mo
廉 在 洪***
Yom Jae-Hong

要 旨

工學의 여러 分野에 있어서 剩餘測定값은 최소제곱법으로 調整할 경우 觀測값의 輕重率을 고려하여 精度를 높일 수 있다.

本 論文에서는 스트립座標를 Sequential 방법으로 형성하고 相互標定時 나타나는 廻轉角 κ, φ, ω의 크기에 반비례하여 各 모델에 輕重率을 부여하였다. 이 경우 輕重率을 고려한 絶對標定의 결과에 관하여 輕重率을 고려하지 않은 경우와 比較分析하였으며 絶對標定에 어떠한 影響을 미치는가를 고찰하였다.

ABSTRACT

The method of least squares is an adequate method of adjustment in various fields of engineering where redundant observations are necessary to obtain accurate values.

The Consideration of weight of each Observation can improve the accuracy if the reliabilities of observations vary. The strip coordinates were weighted as inversely proportionate to the rotations κ, φ, ω which occur in the computation of model coordinates. The resulting errors in absolute coordinates were compared with the errors unweighted case to investigate the influence of orientation elements on absolute coordinates.

1. 序 論

解析的 寫眞測量의 여러 단계에서 임의의 座標값이 다른 座標값 보다 精密하지 못할때 이들 좌표값에 輕重率을 부여하므로써 보다 정확한 絶對座標를 얻을 수 있다.

일반적으로 문제해석의 복잡성 또는 硏究資料의 부족으로 인하여 모든 좌표값이 같은 精度를 갖는 것으로 가정하고 계산되어 왔다. 內部標定 相互標定및 絶對標定에 있어서 輕重率을 바르게 부여할 수 있다면 오차를 감소시켜 보다 정확한 지상좌표를 구할 수 있다.

B. Hallet는 內部標定에 있어서 像座標의 輕重率을 조사하여 주점으로부터 떨어진 放射距離에 따라 輕重率을 다르게 주었으며 또한 相互標定에서는 각 점들의 y-視差의 크기와 반비례로 輕重率을 부여하면 誤差를 감소시킬 수 있다고 제안하였다.[1]

*서울大學校 工科大學 敎授
**延世大學校 工科大學 副敎授
***延世大學校 工科大學院

航空寫眞 촬영시 重直을 유지시키려는 많은노력에도 불구하고 작은 tilt가 발생하기 마련이다. 이 tilt는 모델좌표를 계산할때 사진의 廻轉角 κ, φ, ω로 나타나는데 이 회전각은 座標계산에 미치는 영향이 크며 이로 인하여 발생하는 誤差를 감소시킬 수 있다면 보다 정확한 座標解析이 가능할 것이다.

本 硏究에서는 相互標定 당시 나타나는 사진의 廻轉角 κ, φ, ω의 逆數를 絶對標定에 이용되는 基準點의 輕重率로 간주하여 座標變換 이후에 발생하는 誤差를 조사하므로써 좌표해석의 精度를 높이는데 目的을 두고 있다.

1899년부터 1932년 사이에 發表된 여러 논문에서 Sebastion Finster Walder는 解析的 寫眞의 기초를 형성했다. 그는 相互標定, 絶對標定의 원리를 거론했으며 사진측량에 벡터의 개념을 사용하였다. Carl Pulfrich는 1901년 Jena에서 최초의 精密座標測定機의 제작을 발표했으며 그후로 사진측량에 많은 발전이 있었다. 컴퓨터가 발전되면서 H. Schmid, D. Brown, C. Tewinkel(U.S.A)와 G. Schut(Canada)가 제시한 여러 수학적 업적들이 널리 실용화되었다.

解析的寫眞測量의 여러 방법이 개발되면서 誤差와 信賴度에 관한 많은 硏究가 진행되었다. A.B. Sunter는 삼각망에서 角의 輕重率과 觀測값의 조정에 관하여 연구했으며 biased된 관측값에 대한 최소제곱법의 調整에 관해서도 발표했다.[(2),(3)] 화란의 I.T.C.에서는 P. Stefanovic, M. Molenaar, T. Boulcous, F. Amer 등에 의해 信賴度에 관한 여러편의 論文이 발표되었다.[(4),(5),(6),(7)] 또한 G. Schut는 B. Hallert가 연구한 結果를 이용하여 상호표정에서 사진좌표에 輕重率을 부여하는 과정을 프로그램하였다.

2. 標定解析理論

2.1 분산—공분산의 전파

誤差가 포함된 관측치를 사용하여 계산할때 그 오차가 결과값에 미치는 영향에 대해서는 관측값들의 분산—공분산의 전파에 관해서 分析하므로써 알 수 있다.[(8)]

確率變數 $X_1, X_2 \cdots X_m$이 uncorrelate된 것으로 가정하면 분산—공분산 매트릭스 $\sum_{XX}$의 off-diagonal 項들은 0이 되어 분산만 있는 diagonal 매트릭스로 된다. 분산—공분산 매트릭스와 輕重率매트릭스의 관계는 다음과 같다.

$$W_{XX}=\sigma_0^2 \sum_{XX}^{-1} \qquad (1)$$

여기서 σ_0^2은 reference 분산이다.

확율변수 벡터를 다음 선형식으로 나타낼때

$$y=A_X+b \qquad (2)$$

y의 분산—공분산 매트릭스는

$$\sum_{YY}=A \cdot \sum_{XX} A^t \qquad (3)$$

이다.

비선형함수를 선형화하였을 때 y에 전파되는 분산—공분산매트릭스는

$$\sum_{YY}=J_{YX} \cdot \sum_{XX} \cdot J_{YX}^t \qquad (4)$$

이다. 여기서 J_{YX}는 Jacobian매트릭스이다.

Cofactor 매트릭스를 Q_{XX}라 하면

$$\sum_{XX}=\sigma_0^2 Q_{XX}$$
$$\sum_{YY}=\sigma_0^2 Q_{YY} \qquad (5)$$

이며, (5)식을 (3), (4)식에 代入하면

$$Q_{YY}=A \cdot Q_{XX} \cdot A^t \quad \text{(선형일 경우)}$$
$$Q_{YY}=J_{YX} Q_{XX} J_{YX}^t \quad \text{(비선형일 경우)} \qquad (6)$$

최소제곱법으로 調整할때 관측값을 다음 매트릭스방정식으로 나타낼 수 있다.

$$V+B \cdot \Delta=f \qquad (7)$$

여기서 V는 殘差의 벡터, Δ는 매개변수 벡터, B는 매개변수의 계수로 이루어진 매트릭스이다.

l, d를 각각 觀測값과 상수들의 벡터라 놓으면 f는 다음과 같다.

$$f=d-l \qquad (8)$$

觀測差의 Cofactor 매트릭스와 輕重率매트릭스를 각각 Q, W로 놓고 (8)식을 (2)식과 같은 형태로 나타내면 다음과 같이 되며

$$f=(-I) \cdot l+d \qquad (9)$$

(6)식을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$Q_{ff}=(-I) \cdot Q \cdot (-I)^t=Q \qquad (10)$$

(10)식에서 l의 Cofactor 매트릭스와 f의 Cofactor 매트릭스는 같다는 것을 알 수 있다.

최소제곱법의 각 단계를 매트릭스로 정리하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
N&=B^t W\cdot B\\
t&=B^t W\cdot f\\
\varDelta&=N^{-1}\cdot t\\
V&=f-B\varDelta\\
\hat{l}&=l+V
\end{aligned}
\tag{11}
$$

여기서 N은 Normal 방정식의 계수매트릭스이며 $\hat{l}$은 보정된 관측값이다. (11)식을 (2)식과 같은 형태로 나타내면

$$
\begin{aligned}
t&=(B^t W)\cdot f\\
\varDelta&=(N^{-1})t\\
V&=(I-BN^{-1}W)f\\
\hat{l}&=(-B)\varDelta+d
\end{aligned}
\tag{12}
$$

이다.

Cofactor의 전파 원리를 (13)식에 대입하면 (13)식의 괄호 안의 항은 (4)식의 A에 해당되므로

$$
\begin{aligned}
Q_{tt}&=(B^t W)Q_{ff}(B^t W)^t=N\\
Q_{\varDelta\varDelta}&=(N^{-1})Q_{tt}(N^{-1})^t=N^{-1}\\
Q_{vv}&=(I-BN^{-1}B^t W)Q_{ff}(I-BN^{-1}B^t W)^t\\
&=Q-BN^{-1}B^t\\
Q\hat{l}\hat{l}&=BN^{-1}B^t
\end{aligned}
$$

가 된다.
여기서 Q_{vv}와 Q_{ll}에 대한 식으로부터 다음식을 구할 수 있다.

$$Q\hat{l}\hat{l}-Q-Q_{vv} \tag{14}$$

$t, \varDelta, V$와 $\hat{l}$에 대한 공분산 매트릭스는 각 Cofactor 매트릭스에 $\sigma_0{}^2$를 곱하면 구할 수 있다.

2.2 輕重率을 고려한 標定

本 硏究에서 絕對標定의 프로그래밍은 PAT-M43에서 사용되는 planimetry-height iteration으로 하였다. 이 방법은 精度와 收斂速度 면에서는 7개의 변수를 직접 결정하는 방법과 대등하나 다음과 같은 장점이 있다. 첫째, 평면의 iteration 과정은 선형이므로 초기 근사값이 필요없다. 둘째, 7열의 매트릭스를 푸는 대신 4열과 3열의 매트릭스를 푸는 방법이므로 계산시간이 단축된다. 세째, 두 단계로 분리시켜 조정하므로 輕重率을 고려하기가 편리하다.

2.2.1 平面매개변수 결정

x, y축 방향을 같은 縮尺으로 가정하고 두 축이 直交하는 것으로 가정하면 매개변수 解에 관한 좌표변환식이 된다.

$$
\begin{aligned}
X&=a_0+ax+by\\
Y&=b_0-bx+ay
\end{aligned}
\tag{15}
$$

이를 이용하여 평면에 대한 觀測方程式을 세우면

$$
\begin{bmatrix} x & y & 1 & 0\\ y & -x & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a\\ b\\ a_0\\ b_0 \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} X\\ Y \end{bmatrix}
\tag{16}
$$

이 되며 다음과 같이 表現示한다.

$$A\cdot P=C$$

normal 방정식은

$$P=(A^t W_p\cdot A)^{-1}\cdot(A^t\cdot W_p\cdot C) \tag{17}$$

이다. 여기서 W_p는 平面基準點에 대한 輕重率 매트릭스로서 점들 사이의 상호공분산이 없는 것으로 제한하였기 때문에 diagonal 매트릭스가 된다. 관측방정식과 경중율매트릭스를 이용하여 normal 방정식을 전개한 매트릭스는 다음과 같이 된다.

$$
\begin{vmatrix}
\sum W_{pi}(x_i{}^2+y_i{}^2) & 0 & \sum W_{pi}x_i & \sum W_{pi}y_i\\
 & \sum W_{pi}(x_i{}^2+y_i{}^2) & \sum W_{pi}y_i & -\sum W_{pi}x_i\\
 & & \sum W_{pi} & 0\\
 & & & \sum W_{pi}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix} a\\ b\\ a_0\\ b_0 \end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
\sum W_{pi}(x_iX_i+y_iY_i)\\
\sum W_{pi}(y_iX_i-x_iX_i)\\
\sum W_{pi}X_i\\
\sum W_{pi}Y_i
\end{vmatrix}
\tag{18}
$$

2.2.2 높이 매개변수 결정

높이 座標變換式에 대한 관측방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$
[x\ y\ 1]\begin{bmatrix} c\\ d\\ c_0 \end{bmatrix}=[Z/\lambda-z] \tag{\ }
$$

$$B\cdot P=F$$

평면의 경우에서와 같이 normal 방정식은

$$P=(B^t\cdot W_H\cdot B)^{-1}\cdot(B^t\cdot W_H\cdot F) \tag{20}$$

이다. 이때의 경중율 매트릭스는

$$W_{Hi}=\begin{bmatrix} W_{H1} & & & \\ & W_{H2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & W_{Hi} \end{bmatrix}$$

로써 전개된 normal 방정식의 매트릭스는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sum W_{Hi}X_i^2 & -\sum W_{Hi}x_iy_i & -\sum W_{Hi}x_i \\ & \sum W_{Hi}y_i^2 & \sum W_{Hi}y_i \\ & & \sum W_{Hi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c \\ d \\ c_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\sum W_{Hi}x_i\Delta Z_i \\ \sum W_{Hi}y_i\Delta Z_i \\ \sum W_{Hi}\cdot\Delta Z_i \end{bmatrix} \tag{21}$$

여기서 $\Delta Z_i=Z_i-z_i$ 이다.

평면座標와 높이座標의 相互作用이 있으므로 얻은 결과값을 iteration 시켜야 하는데 새로계산된 값을 모델좌표로 사용하여 축척이 1에 접근할 때까지 처음부터 계산을 반복한다.

3. 觀測 값 處理分析

3.1 觀測값處理

실험모델로서 撮影高度가 1215 m 인 6 장의 사진을 이용했으며 40 개의 표정점에 대한 index map 은 다음과 같다.

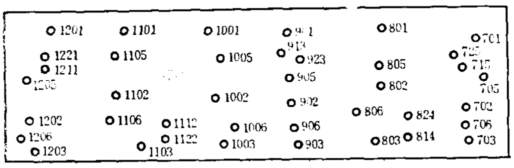

그림 3-1 標定點들의 index map

基準點의 배치를 변화시키면서 기준점수를 4 에서 12 까지 2 씩 증가시켰으며 輕重率을 고려하지 않는 경우와 κ, φ, ω 에 대해서 고려한 경우를 비교하였다. 일반적으로 기준점들이 등간격으로 분포되어 있어야 하며 strip 의 모서리와 가장자리에 있어야 높은 精度를 얻을 수 있다.[9] 제 1 분포는 이와같이 등간격으로 가장자리의 점들을 基準點으로 택하였으며 strip 의 중앙에 기준점이 있는 경우를 조사하기 위하여 제 2 분포를 형성하였다. 또한 일정한 규칙성이 없이 선점하여 제 3 분포에 대해서도 조사하였다.

基準點의 分布를 그림으로 나타냈으며 각 분포에 대해서 조사한 絕對座標 誤差를 표로 나타냈으며 이를 평면과 높이로 구분하여 그래프로 나타냈다. 전체표정점들의 절대좌표오차는 다음 식을 사용하여 계산하였다.[10]

$$\sigma=\left\{\frac{\sum^{n}(\Delta x_i)^2}{n}\right\}^{1/2}$$

이때 Δx_i 는 지상성과와 계산된 座標값의 殘差이며 n 은 표정점수이다.

3.2 觀測값 分析

本 研究에서 考察한 觀測값을 算定하여 分析한 成果는 다음과 같다.

제 1 분포

○1	○9	○6	○11	○3	○8
○5	○2	○10	○7	○12	○4

그림 4-2 基準點의 제 1 분포

표 4-1 제 1 분포에 대한 絕對座標의 RMS(m)

경중율 \ 평면 높이 \ 기준점수		4	6	8	10	12
unweighted	평면	.4025	.4007	.3730	.3792	.3799
	높이	.4228	.4228	.3980	.3926	.3931
κ-weighted	평면	.4222	.4317	.4063	.4034	.4090
	높이	.3937	.4095	.3875	.3921	.3981
φ-weighted	평면	.3944	.4009	.3874	.3866	.3824
	높이	.3995	.4164	.3919	.3846	.3848
ω-weighted	평면	.4135	.4370	.3945	.3972	.3998
	높이	.4063	.4084	.3950	.3966	.4227

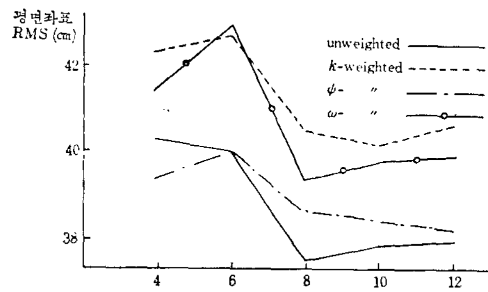

그림 4-3 제 1 분포의 평면좌표 RMS

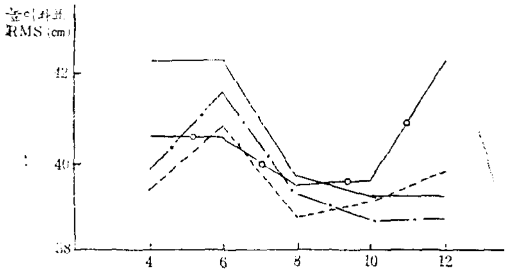

그림 4-4 제 1 분포의 높이좌표 RMS

제 2 분포

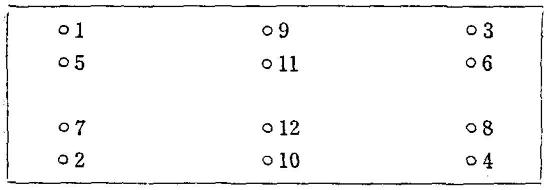

그림 4-5 기준점의 제 2 분포

표 4-2 제 2 분포에 대한 절대좌표의 RMS(m)

경중율 \ 평면·높이 \ 기준점수		4	6	8	10	12
unweighted	평면	.3667	.3644	.3676	.3632	.3617
	높이	.6102	.6055	.6288	.4990	.4331
κ-weighted	평면	.3738	.3658	.3682	.3616	.3635
	높이	.6103	.6062	.6294	.4115	.4030
φ-weighted	평면	.3690	.3643	.3673	.3620	.3606
	높이	.6102	.6059	.6292	.4823	.4207
ω-weighted	평면	.3777	.3672	.3692	.3653	.3715
	높이	.6103	.6063	.6295	.4025	.4341

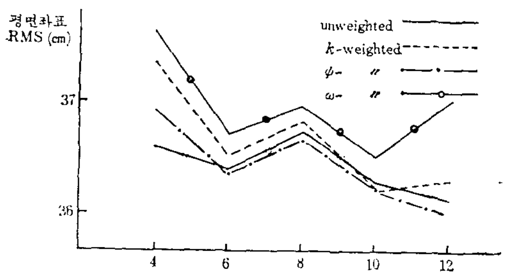

그림 4-6 제 2 분포의 평면좌표 RMS

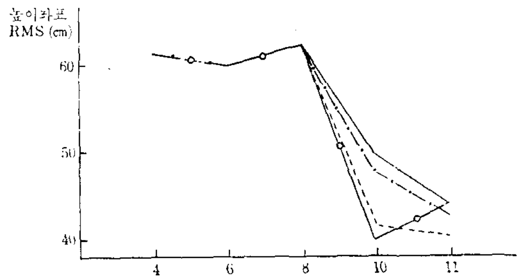

그림 4-7 제 2 분포의 높이좌표 RMS

제 3 분포

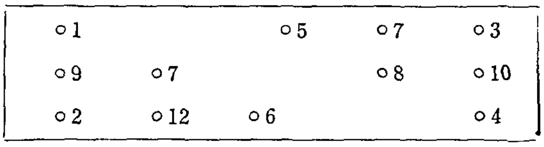

그림 4-8 기준점들의 제 3 분포

표 4-3 제 3 분포에 대한 절대좌표의 RMS(m)

경중율 \ 평면·높이 \ 기준점수		4	6	8	10	12
unweighted	평면	.3667	.3677	.3638	.3634	.3657
	높이	.6102	.4259	.4022	.4322	.4097
κ-weighted	평면	.3738	.3786	.3676	.3624	.3821
	높이	.6103	.3973	.3930	.3984	.3933
φ-weighted	평면	.3690	.3668	.3623	.3623	.3701
	높이	.6102	.4132	.3930	.4139	.3977
ω-weighted	평면	.3777	.3967	.3842	.3678	.3744
	높이	.6103	.4270	.4197	.4079	.4505

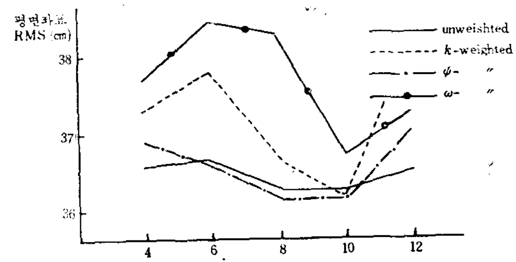

그림 4-9 제 3 분포의 평면좌표

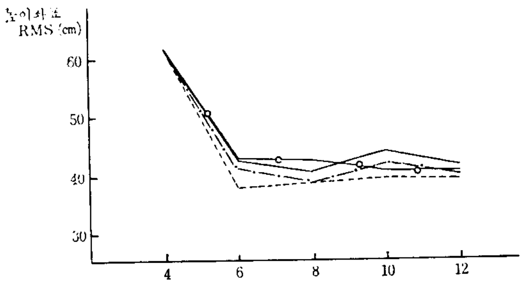

그림 4-10 제 3 분포의 높이좌표 RMS

輕重率을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 비교를 誤差의 증감으로 표시하여 백분율로 나타대면 다음표와 같다.

표 4-4 높이좌표 오차의 증감 %(( )안의 값은증가)

제 1 분포

회전각 \ 기준점수	4	6	8	10	12
κ	6.8	3.1	2.6	0.1	(1.2)
φ	5.5	1.5	1.5	2.0	2.1
ω	3.9	3.4	0.7	(1.0)	(7.5)

제 2 분포

회전각 \ 기준점수	4	6	8	10	12
κ	(0.0)	(0.1)	(0.0)	17.5	6.9
φ	0.0	(0.0)	(0.0)	3.3	2.8
ω	(0.0)	(0.1)	(0.1)	19.3	(0.2)

제 3 분포

회전각 \ 기준점수	4	6	8	10	12
κ	(0.0)	6.7	2.2	7.8	4.0
φ	0.0	2.9	2.2	4.2	2.9
ω	(0.0)	(0.2)	(4.3)	(5.6)	1.0

표 4-5 평면좌표 오차의 증감(%) (( )속은 증감)

제 1 분포

회전각 \ 기준점수	4	6	8	10	12
κ	(4.8)	(7.7)	(8.9)	(6.3)	(7.6)
φ	2.0	(0.0)	(3.8)	(1.9)	(0.6)
ω	(2.7)	(9.9)	(5.7)	(4.7)	(5.2)

제 2 분포

회전각 \ 기준점수	4	6	8	10	12
κ	(1.9)	(0.3)	(0.1)	(0.4)	(0.4)
φ	(0.6)	0.0	0.0	0.3	0.3
ω	(2.9)	(0.7)	(0.4)	(0.5)	(2.7)

제 3 분포

회전각 \ 기준점수	4	6	8	10	12
κ	(1.9)	(2.9)	(1.0)	0.2	(4.6)
φ	(0.6)	0.2	0.4	0.3	(1.3)
ω	(2.9)	(7.8)	(5.6)	(1.2)	(2.5)

높이좌표에서 ϕ에 대해서 輕重率을 부여하므로써 제 1 분포에서는 5.5%까지의 오차를 감소시켰으며 κ에 대해서도 제 2 분포에서 최대 5.5%까지 감소시킬 수 있었다. ω에 대해서 輕重率을 부여하였던 바 제 2 분포에서 19.3%까지 감소시켰으나 그 이외의 경우는 誤差의 증가를 보였다. 基準點 分布에 따른 誤差의 감소를 조사하면 높이 좌표에서는 스트립의 모서리와 가장자리에 基準點이 분포된 제 1 분포에서 誤差가 가장 작았다. 平面座標에서는 스트립의 중앙부분에 기준점이 있는 제 2 분포에서 가장 양호하였다.

이것은 기준점의 분포와 좌표값의 輕重率이 밀접한 관계가 있는 것을 나타내며 基準點의 分布가 좋을때 輕重率에 의한 誤差의 감소가 效果的인 것을 의미한다.

4. 結 論

相互標定 당시 나타나는 사진의 廻轉角에 대한 輕重率을 부여하여 絕對座標의 誤差를 分析하므로써 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. 높이좌표에서 y축의 廻轉角인 ϕ에 대하여 輕重率을 부여한 결과 전체 誤差의 5.5%까지 감소시킬 수 있었으며 Z축의 廻轉角인 κ에 대해서 부여한 결과 최대 17.5%까지 감소시킬 수 있었다.
2. 平面座標에서 誤差 감소에 미치는 영향은 廻轉角에 부여한 輕重率의 영향보다 基準點의 分布상태가 지배적이다.
3. 基準點이 스트립의 중앙부분에 있을때 平面

座標의 誤差를 감소시켰으며 스트립의 모서리와 가장자리에 있을 때 높이좌표의 오차를 差果的으로 감소시킬 수 있었다.

參考文獻

1. Hallert, B., "Investigation of the Weights of Image Coordinates in Aerial Photographs", Photogrammetric Engineering, Vol. 27, No. 4, 1961, pp. 555~565.
2. Sunter, A.B., "Treatment of Observations: Rejection and Weights", Canadian Surveyor, Vol. 15, No. 8, 1961, pp. 454~460.
3. Sunter, A.B., "Least Squares Adjustment of Biased Observations", Canadian Surveyor, Vol. 21, No. 4, 1967, pp. 318~333.
4. Stefanovic, P., "Blunders and Least Squares", ITC Journal, 1978-1, pp. 122~155.
5. Molenaar, M., "Risk Minimisation for Error Dection Procedures in photogrammetry", ITC Journal, 1981-2, pp. 185~201.
6. Bouloucos, T., "Error Detection and Reliability Studies in Analytically Formed Strips", ITC Journal, 1981-1, pp. 60~69.
7. Amer, F., "Theoretical Reliability of Elementary photogrammetrie Procedures", ITC Journal, 1981-3, pp. 278~306.
8. Mikhail, E.M., Analysis and Adjustment of Survey Mesurements, Vantrand Reinhold Company, N.Y., 1981, pp. 148~172.
9. A.S.P., Manual of Photogrammetry 4thed., 1980, pp. 471~476.
10. Ghosh, S.K., Analytical Photogrammetry, Pergamon Press, N.Y., 1979, pp. 119~130.