# 두 종류의 고객이 도착하는 M／M／2／K Queueing System 에서의 Server 조정정책에 관한 연구

## (A Study on the Service Control Policy of M／M／2／K Queueing System with Two Types of Customers)

俞 仁 善*
文 基 爽**

**Abstract**

In this paper, we study an optimal service policy of the M／M／2／K queueing system with two types of customers. The incurred costs consist of waiting cost, service cost and incurred costs consist of waiting cost, service cost and changeover cost. The changeover cost occurs when a server who assigned to serve a particular type of customers reassigned to the other types of customers.

Two servers serve two types of customers who arrive to the two seperate queues. The two types of customers differ in respect of their arrival rate, service rate, waiting cost, and service cost.

The servers require a policy, for determining when they should change their service type, which minimizes the long run expected total cost. The policy is obtained by a Markov decision process model that consists of a finite number of states and actions. In order to find the optimal service policy, we define states and actions of the system, compute onestep transition probabilities, and apply to the successive approximations algorithm.

## 1. 서 론

본 연구에서 다룰 대기행렬 시스템 (queueing system) 그림 1은 다음과같은 특성을 갖는다.

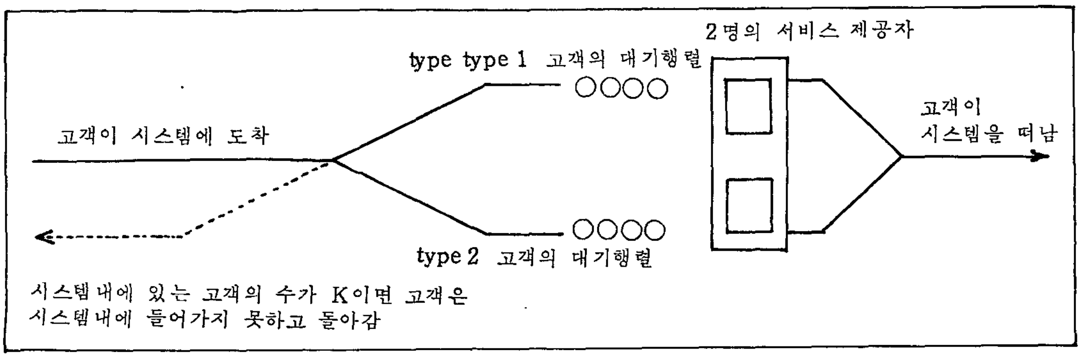


그림 1. 두개의 **type**을 가진 고객들이 도착하는 **M／M／2／K** 대기행렬 시스템

*大有工業專門大學 工業經營科 專任講師
**水原工業專門大學 工業經營科 講師

서로 다른 type 의 서비스를 요구하는 두 고객들의 도착시간 간격의 분포[1] (distribution of interarrival time)는 서로 다른 평균치 ($\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}$)를 가지는 지수분포(exponential distribution)이고 두 도착과정은 서로 독립이며, 서비스 시간의 분포[2]는 고객의 type 에 따라 서로 다른 평균치 ($\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}$)를 갖는 지수분포이다. 두 서비스 제공자(server)는 각각 특정 시점에 특정 type의 고객을 서비스하도록 배치되며, 다른 type 의 고객은 비록 그 서비스 제공자가 쉬고 있는 중(idle)이라도 서비스하지 않는다.

특정한 type 고객의 경우에 서비스를 요구하는 고객이 시스템에 도착하여 자신이 요구하는 type이 서비스를 제공하여 줄 수 있는 서비스 제공자가 있고 이들이 idle 상태이면 즉각적으로 서비스에 들어간다. 반면에 idle 한 서비스 제공자가 없거나 또는 자신의 type 에 할당된 서비스 제공자가 없으면 그 고객은 대기행렬에서 기다리게 된다. 이때 생기게 되는 대기행렬의 길이에는 제한이 있고 그 수는 K이다. 같은 type 의 서비스를 요구하는 고객들은 FIFO(First-in, First-out)에 의해 서비스를 받는다.

그리고 비용은 transition point[3]에서 발생하며, 각 type 고객의 대기비용은 시스템내에 있는 고객의 수에 비례하여 발생한다. 서비스 비용은 시스템을 떠나는 고객의 type 에 의해 결정되며, 서비스 제공자의 type 를 바꿀 때에는 교체비용이 발생한다.

실제 생활에 있어서 본연구에서 다루고자 하는 대기행렬의 상황은 자주 일어난다. 그 예로서 기계공장에서 각기 다른 두 종류의 금형을 부착하여 제조할 수 있는 프레스(press)가 두 대 있으며, 이들 프레스에 두 종류의 부품들이 가공되기 위해 들어온다고 하자. 프레스는 서비스 제공자로, 주문된 두 종류의 부품을 2개의 type 을 가진 고객들로 볼 수 있다. 두 종류의 부품들이 가공되어 가는 중 대기행렬이 생겨 각각 대기비용이 발생하고 서비스 비용도 발생하며, 또한 금형 교체비용이 발생한다면, 관리자는 언제 어떻게 두 종류의 부품을 가공하기 위해 각각 할당된 프레스의 수를 변화시키는 것이 가장 총 비용을 최소화할 수 있는 것일까 의문을 갖게 된다.

본연구의 목적은 이러한 의문을 해결하기 위함이다. 즉, 두 가지 type 의 서비스를 요구하는 고객들이 도착하는 M/M/2/K 대기행렬 시스템에서 서비스 제공자들의 최적 서비스 type 교체정책을 구하고자 한다. 이 목적을 해결하기 위해 본연구는 이와같은 형태의 시스템을 Markov decision process 로 표현하여 최적 서비스 정책(optimal service policy)를 구하였다. 최근에 대기행렬 이론의 연구는 대기행렬 시스템의 설계(design)와 조정(control)에 중점을 두고 있는 경향[1,2,4,10,11]이 있는데 본연구도 이 범주에 속하는 것이다.

## 2. 모 델 (Model)

본모델은 전술한 대기행렬 시스템을 Markov decision process 로 표현한 것이며, 이 때 transition point 는 한 명의 고객이 서비스를 완료하여 시스템을 떠나는 시점(departure epoch)이다. 한 명의 고객이 서비스를 완료하여 시스템을 떠나게 되면, 시스템의 상태(state)를 관찰하여 당시 idle 한 서비스 제공자의 서비스 type 을 교체할 것인가 하지 않은 것인가를 결정한다. 그러므로 한 type의 고객에게 할당된 서비스 제공자의 수는 1명 증가하거나 1명 감소 또는 변화하지 않게 된다. 따라서 본모델을 구성한 목적은 Markov decision process 를 이용하여 각 시스템의 상태(state)에 따라 각 type 의 고객에게 할당된 서비스 제공자의 수를 조정(action)하는 최적정책(optimal policy)를 구하기 위한 것이다.

### 2・1 State Space 와 Action Space

#### 2・1・1 State space

본모델에서 고려하는 비용(cost)들은 각 type 의 고객이 대기행렬에서 기다릴 때 발생하는 비용, 서비스 비용, 그리고 서비스 제공자의 수를 조정할 때 발생하는 비용이다. 이 비용을 구하기 위해 필요로 되는 정보들은 표 1[4]과같다.

1) p.d.f.(확률 밀도 함수)는 각각 $f_1(t)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$, $f_2(t)=\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$ 이다.
2) p.d.f.(확률 밀도 함수)는 각각 $g_1(t)=\mu_1 e^{-\mu_1 t}$, $g_2(t)=\mu_2 e^{-\mu_2 t}$ 이다.
3) 모든 비용은 transition point, 즉 departure epoch에서만 발생한다고 가정한다.
4) 여기서 $S_1(p)=2-S_2(p)$, $n_1(p)=N(p)-n_2(p)$이므로 이 모든 정보들을 모두 state로 정의할 필요없이 $S_2(p)$, $N(p)$ 그리고 $n_2(p)$만 주어지면 된다.

표 1. 비용을 구하기 위해 필요한 정보의 종류

| 기 호 | 설 명 |
|---|---|
| N(P) | P시점에 시스템내에 있는 고객의 총수 |
| $S_1$(P) | P시점에 type 1의 고객을 서비스하도록 할당된 서비스 제공자수 |
| $S_2$(P) | P시점에 type 2의 고객을 서비스하도록 할당된 서비스 제공자수 |
| $n_1$(P) | P시점에 시스템내에 있는 type 1 고객의 수 |
| $n_2$(P) | P시점에 시스템내에 있는 type 2 고객의 수 |

따라서 본모델에서는 고객의 시스템을 떠나는 시점에서 $S_2(n)$, $N(n)$, 그리고 $n_2(n)$을 관측하며, 이는 하나의 stochastic process를 구성한다.

$\{(S_2(n),\ N(n),\ n_2(n)):\ n=0,1,2,\cdots\}$

여기서 n : 고객이 시스템을 떠나는 시점을 transition point로 잡았을 때 transition 횟수

그러므로 $(S_2(n),\ N(n),\ n_2(n))$은 n번째 transition point에서 이 process의 state로 나타내며, $S_2(n)=i$, $N(n)=j$, $n_2(n)=l$ 이라면 n번째 transition point는 $(i,\ j,\ l)$로 표현된다. 모든 가능한 state 들의 집합을 I로 정의하면,

State space[5] : $I=\{(i,\ j,\ l):\ i=0,1,2,\ j=0,1,\cdots,\ k,\ l=0,\cdots,\ j\}$

2·1·2 Action space

고객이 시스템을 떠나는 시점을 transition point로 잡을 때 각 transition point에서의 action은 표 2와같다.

표 2. **action**의 종류

| 기 호 | action |
|---|---|
| $a_1$ | type 2 고객에 할당된 서비스 제공자의 수를 1명 늘림 |
| $a_2$ | type 2 고객에 할당된 서비스 제공자의 수를 1명 줄임 |
| $a_3$ | type 2 고객에 할당된 서비스 제공자의 수를 변화시키지 않음 |

이 action 들의 집합을 A로 정의하면

Action space : $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$이고 유한집합이다.

transtion point에서 시스템이 관측되어 state가 결정되면 즉시 action[6]이 취해지며, 전술한 action을 취하는 데는 시간이 걸리지 않는다고 가정한다. 그리고 state$(i,\ j,\ l)$에서 취한 action을 $d(i,\ j,\ l)$이라고 표현하고, $d(i,\ j,\ l)$은 state$(i,\ j,\ l)$에만 dependent 하다고 가정한다.

### 2·2 Transition Probability

M/M/2/K 대기행렬 시스템에서 고객이 시스템에 도착하는 시점(arrival epoch)과 고객이 시스템을 떠나는 시점(departure epoch)을 transition point로 할 때 시스템내에 있는 고객의 수에 대한process $\{N(n):n=0,1,2,\cdots\}$는 Markov property를 만족한다는 것이 잘 알려져 있다[3, 12]. 또 떠나는 시점(departure epoch)만을 transition point로 할 때에도 마찬가지라는 것도 알려져 있다.

따라서 본절에서는 두 개의 type를 가진 고객이 도착하는 M/M/2/K 대기행렬 시스템에서 고객이 시스템을 떠나는 시점(departure epoch)을 transition point로 할 때 process$\{(S_2(n),\ N(n),\ n_2(n)):\ n=0,1,2,\cdots\}$가 Markov property를 만족함을 보이고, one step transition probability를 구한다.

$\Delta(n)$[7] ≡ n번째 transition point와 (n+1)번째 transition point사이에 변화한 type 2 고객을 서비스하도록 할당된 서비스 제공자의 수

5) 총 state의 수는 $\frac{3K^2+6K}{2}$ 인데, K가 유한(finite)하면 총 state의 수도 유한하다.

6) 예를 들어 state가 $(1,\ j,l)$ $(j=0,\cdots,K,\ l=0,\cdots,\ j)$일 때 type 1 고객이 떠났을 때 action $a_1$을 취하면 action의 결과 state는 $(2,\ j,\ l)$로 바뀐다.

7) 만약 늘었으면 양수값, 줄었으면 음수값을 갖는다.

$U(n) \equiv n$ 번째 transition point와 $(n+1)$번째 transition point 사이에 도착한 type 1 고객의 수

$V(n) \equiv n$ 번째 transition point와 $(n+1)$번째 transition point 사이에 도착한 type 2 고객의 수

n 번째 state$(S_2(n), N(n), n_2(n))$에서 action $a_m(a_m \in A)$를 취했을 때, $(n+1)$번째 state$(S_2(n+1), N(n+1), n_2(n+1))$은 다음과같이 표시된다.

$(S_2(n+1), N(n+1), n_2(n+1)) =$

① $(S_2(n)+\Delta(n), N(n)+U(n)+V(n)-1, n_2(n)+V(n))$ 만약 n 번째 transition point에 시스템내에 있었던 type 1 고객이 $(n+1)$번째 transition point에 시스템을 떠났을 경우

② $(S_2(n)+\Delta(n), N(n)+U(n)+V(n)-1, n_2(n)+V(n))$ 만약 n 번째 transition point에 시스템내에 있었던 type 2 고객이 $(n+1)$번째 transition point에 시스템을 떠났을 경우

③ $(S_2(n)+\Delta(n), N(n)+U(n)+V(n), n_2(n)+V(n))-1)$, 만약 $(n+1)$번째 transition 시점에 시스템을 떠나는 고객이 n 번째 transition에서는 시스템내에 없었던 경우

그런데 $\Delta(n)$은 $d(S_2(n), N(n), n_2(n))$에 의해 결정되며, $d(S_2(n), N(n), n_2(n))$는 앞의 가정에 따라 단지 $(S_2(n), N(n), n_2(n))$에만 dependent 하다. 또한 시스템에 도착하는 고객의 수에 대한 process는 poisson process이므로 poisson process의 memoryless property에 의하여 단지 $(S_2(n), N(n), n_2(n))$에만 dependent 하다. 그러므로

$P\{(S_2(n+1)=i, N(n+1)=j, n_2(n+1)=l) \mid (S_2(o), N(o), n_2(o)), \cdots, (S_2(n), N(n), n_2(n)\} = P\{(S_2(n+1)=i, N(n+1)=j, n_2(n+1)=l) \mid (S_2(n), N(n), n_2(n)\}$이 성립하고 process$\{(S_2(n), N(n), n_2(n) : n=0,1,2,\cdots\}$는 state space $I=\{(i, j, l) : i=0,1,2, j=0,\cdots, K, l=0,\cdots, j\}$인 하나의 Markov chain 이다.

다음으로 one step transition probability를 정의해 보면

$P\{S_2(n+1)=i', N(n+1)=j', n_2(n+1)=l' \mid S_2(n)=i, N(n)=j, n_2(n)=l\}\ (a_m)$

$\equiv$ n 번째 transition point에서의 state$(i, j, l)$에서 action $a_m$을 취하였을 때 $(n+1)$번째 transition point에서 state$(i', j', l')$로 될 확률

(여기에서 $(i, j, l)$, $(i', j', l') \in I$, $a_m \in A$이다.)

그런데 action의 정의로부터

i) $P\{S_2(n+1)=o, N(n+1)=j', n_2(n+1)=l' \mid S_2(n)=o, N(n)=j, n_2(n)=l\}(a_3)$
$= P\{S_2(n+1)=o, N(n+1)=j', n_2(n+1)=l' \mid S_2(n)=1, N(n)=j, n_2(n)=l\}(a_2)$

ii) $P\{S_2(n+1)=1, N(n+1)=j', n_2(n+1)=l' \mid S_2(n)=1, N(n)=j, n_2(n)=l\}(a_3)$
$= P\{S_2(n+1)=1, N(n+1)=j', n_2(n+1)=l' \mid S_2(n)=o, N(n)=j, n_2(n)=l\}(a_1)$
$= P\{S_2(n+1)=1, N(n+1)=j', n_2(n+1)=l' \mid S_2(n)=2, N(n)=j, n_2(n)=l\}(a_2)$

iii) $P\{S_2(n+1)=2, N(n+1)=j', n_2(n+1)=l' \mid S_2(n)=2, N(n)=j, n_2(n)=l\}(a_3)$
$= P\{S_2(n+1)=2, N(n+1)=j', n_2(n+1)=l' \mid S_2(n)=1, N(n)=j, n_2(n)=l\}(a_1)$

여기서 $j(\text{or } j')=o,\cdots,K$, $l(\text{or } l')=o,\cdots, j(\text{or } j')$.

그러므로 $P\{S_2(n+1)=i, N(n+1)=j', n_2(n+1)=l' \mid S_2(n)=i, N(n)=j, n_2(n)=l\}(a_m)$은 $P\{S_2(n+1)=i, N(n+1)=j', n_2(n+1)=l' \mid S_2(n)=i, N(n)=j, n_2(n)=l\}(a_3)$만 구하면 된다는 결론을 내릴 수 있다.

〔A〕 두 명의 서비스제공자가 모두 type 1 고객에 할당된 경우

이 경우 type 1의 고객은 두 명의 서비스 제공자에 의해 서비스를 받고 시스템을 떠날 수 있지만, type 2 고객은 서비스를 받을 수 없으며 또한 시스템을 떠날 수 없다. 그러므로 다음 transition은 type 1 고객 한 명이 서비스를 받고 시스템을 떠남으로써 발생한다. 이 경우 다음의 one step transition probability를 $T_0$로 정의한다.

$T_0 = P\{S_2(n+1)=o, N(n+1)=j', n_2(n+1)=l' \mid S_2(n)=o, N(n)=j, n_2(n)=l\}(a_3)$

CASE 1 ][8] n번째 transition point에서 type 1 고객이 시스템내에 있었던 경우, 즉 $j-l \geq 1$.

(n+1)번째 transition point에서의 state는 type 1 고객이 서비스받는 동안 도착한 type 1, type 2 고객수에 의해 결정된다. 여기서 $k^1(u, v)$를 정의하면,

$k^1(u, v) \equiv$ type 1 고객이 서비스받는 동안 u명의 type 1 고객과 v명의 type 2 고객이 도착할 확률

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^u}{u!} \cdot \mu_1 e^{-\mu_1 t} dt \times \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^v}{v!} \cdot \mu_1 e^{-\mu_1 t} dt^{9)} \\ \qquad \text{if} \quad u, v \geqq 0 \\ 0 \quad , \text{otherwise} \end{cases}$$

i) $j' < K$인 경우

$T_0 = P[(j'-l')-(j-l)+1$명의 type 1 고객이 도착, $l'-l$명의 type 2 고객이 도착$]$

$= k^1\{(j'-l')-(j-l)+1, \ l'-l\}$

단, $(j'-l')-(j-l)+1 < 0$이거나 $l'-l < 0$이면 $T_0 = 0$

ii) $j' = K$인 경우

① $(K-l')-(j-l)+1 \geqq 1$이고 $l'-l \geqq 1$인 경우

$T_0 = P[(K-l')-(j+1)+1$명의 type 1 고객이 도착, $l'-l$명의 type 2 고객이 도착$]$

$= k^1\{(K-l')-(j-l)+1, \ l'-l\}$

② $(K-l')-(j-l)+1 = K-j+1$, 즉 $l'-l=0$인 경우(Type 1 고객에 bulking 현상)

$T_0 = P[$도착한 type 1 고객의 수$\geqq K-j+1$, 도착한 type 2 고객의 수$=0]$

$= \sum_{a=K-j+1}^{\infty} k^1\{a, 0\}$

③ $(K-l')-(j-l)+1=0$, 즉 $l'-l = K-j+1$인 경우(Type 2 고객에 bulking 현상)

$T_0 = P[$도착한 type 1 고객의 수$=0$, 도착한 type 2 고객의 수$\geqq K-j+1]$

$= \sum_{b=K-j+1}^{\infty} k^1\{0, b\}$

④ $(K-l')-(j-1)+1 < 0$이거나 $l'-l < 0$인 경우

$T_0 = 0$

CASE 2 ] n번째 transition point에서 type 1 고객이 시스템내에 없는 경우, 즉 $j-l=0$

(n+1)번째 transition point에서의 state는 n번째 transition후에 잠시 서비스 제공자들이 idle 하고 처음으로 도착한 type 1 고객이 서비스를 받고 시스템을 떠날때까지 그 사이에 도착한 type 1, type 2 고객의 수에 결정된다. $h^1(u, v)$를 정의하면,

$h^1(u, v) =$ 처음으로 type 1 고객이 도착하여 서비스를 받고 시스템을 떠날때까지 u명의 type 1 고객과 v명의 type 2 고객이 도착할 확률

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^u}{u!} \cdot \mu_1 e^{-\mu_1 t} dt \times \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^v}{v!} \cdot dY_1(t) \\ \qquad \text{if} \quad u, v \geqq 0 \\ 0 \quad , \text{otherwise} \end{cases}$$

여기서 $dY_1(t) = \dfrac{\lambda_1 \mu_1}{\lambda_1 - \mu_1}(e^{-\mu_1 t} - e^{-\lambda_1 t})dt$[10]이다.

8) state(0, $j$, $l$)에 대한 구분.

9) 두 type의 도착과정이 서로 독립이므로.

10) C.D.F $Y_1 = F_1 * G_1$인 convolution인데, 여기서 $F_1$은 p.d.f. $f_1(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$인 type 1 고객의 도착시간간격 분포이며, $G_1$은 p.d.f. $g_1(t) = \mu_1 e^{-\mu_1 t}$인 type 1 고객의 서비스시간분포이다. 이 convolution은 Laplace transformation을 취해 역변환시키면 p.d.f. $y_1(t)$가 얻어진다.

i) $j'<\mathrm{K}$인 경우

$\mathrm{T}_0=\mathrm{P}[(j'-l')-(j-l)$명의 type 1 고객이 도착, $l'-l$명의 type 2 고객이 도착$]$

$=h^1\{(j'-l')-(j-l),\ l'-l\}$

단, $(j'-l')-(j-l)<0$이거나 $l'-l<0$이면 $\mathrm{T}_0=0$

ii) $j'=\mathrm{K}$인 경우

① $(\mathrm{K}-l')-(j-l)\geqq 1$이고 $l'-l\geqq 1$인 경우

$\mathrm{T}_0=\mathrm{P}[(\mathrm{K}-l')-(j-l)$명의 type 1 고객이 도착, $l'-l$명의 type 2 고객이 도착$]$

$=h^1\{(\mathrm{K}-l')-(j-l),\ l'-l\}$

② $(\mathrm{K}-l')-(j-l)=\mathrm{K}-j$, 즉 $l'-l=0$인 경우(Type 1 고객에 bulking 현상)

$\mathrm{T}_0=\mathrm{P}[$도착한 type 1 고객의 수$\geqq\mathrm{K}-j$, 도착한 type 2 고객의 수$=0]=\sum_{a=\mathrm{K}-j+1}^{\infty}h^1\{a,0\}$

③ $(\mathrm{K}-l')-(j-l)=0$, 즉 $l'-l=\mathrm{K}-j$인 경우(Type 2 고객에 bulking 현상)

$\mathrm{T}_0=\mathrm{P}[$도착한 type 1 고객의 수$=0$, 도착한 type 2 고객의 수$\geqq\mathrm{K}-j]=\sum_{b=\mathrm{K}-j}^{\infty}h^1\{0,b\}$

④ $(\mathrm{K}-l')-(j-l)<0$이거나 $l'-l<0$인 경우, $\mathrm{T}_0=0$

CASE 3] n번째 transition point에서 시스템내에 있는 총 고객의 수가 K인 경우

서비스에 들어간 고객의 서비스를 완료하여 시스템을 나갈 동안 도착한 고객은 시스템내에 들어오지 못하고 되돌아가기 때문에, (n+1)번째 transition point에서의 state는 $j'=\mathrm{K}-1$인 경우 뿐이다.

i) $\mathrm{K}-l\geqq 1$인 경우 $\mathrm{T}_0=\begin{cases}1, & l'=l \text{ 일 때}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

ii) $\mathrm{K}-l=0$인 경우

type 1 고객이 서비스를 받고 시스템을 떠날 수 없기 때문에 시스템을 정지하므로, $\mathrm{T}_0=0$

[B] <u>두 명의 서비스 제공자가 모두 type 2 고객에 할당된 경우</u>

[A]의 경우와 차이점은 단지 다음 번 transition이 type 2 고객 한 명이 서비스를 받고 시스템을 떠남으로써 발생한다는 것이다. 따라서 모든 경우는 [A]의 경우와같은 방법으로 구할 수 있다. one step transition probability를 $\mathrm{T}_2$라 하면,

$\mathrm{T}_2=\mathrm{P}\{(\mathrm{S}_2(\mathrm{n}+1)=2,\ \mathrm{N}(\mathrm{n}+1)=j',\ \mathrm{n}_2(\mathrm{n}+1)=l')\mid(\mathrm{S}_2(\mathrm{n})=2,\ \mathrm{N}(\mathrm{n})=j,\ \mathrm{n}_2(\mathrm{n})=l)\}$ $(@_3)$

로 정의한다.

CASE 1][11] type 2 고객이 시스템내에 있는 경우, 즉 $l\geqq 1$

$k^2(\mathrm{u},\mathrm{v})\equiv$type 2 고객이 서비스받는 동안 u명의 type 1 고객과 v명의 type 2 고객이 도착할 확률

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^u}{u!}\cdot\mu_2 e^{-\mu_2 t}dt\times\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^v}{v!}\cdot\mu_2 e^{-\mu_2 t}dt, & \text{if } u,v\geqq 0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

i) $j'<\mathrm{K}$인 경우, $\mathrm{T}_2=k^2\{(j'-l')-(j-l),\ l'-l+1\}$

단 $(j'-l')-(j-l)<0$이거나 $l'-l+1<0$이면 $\mathrm{T}_2=0$.

ii) $j'=\mathrm{K}$인 경우,

① $(\mathrm{K}-l')-(j-l)\geqq 1$이고 $l'-l+1\geqq 1$인 경우, $\mathrm{T}_2=k^2\{(\mathrm{K}-l')-(j-l),\ l'-l+1\}$

② $(\mathrm{K}-l')-(j-l)=\mathrm{K}-j+1$, 즉 $l'-l+1=0$인 경우, $\mathrm{T}_2=\sum_{b=\mathrm{K}-j+1}^{\infty}k^2\{a,0\}$

③ $(\mathrm{K}-l')-(j-l)=0$, 즉 $l'-l+1=\mathrm{K}-j+1$인 경우, $\mathrm{T}_2=\sum_{b=\mathrm{K}-j+1}^{\infty}k^2\{0,b\}$

11) state$(2,\ j,\ l)$에 대한 구분.

④ $(K-l')-(j-l)<0$이거나 $l'-l+1<0$인 경우, $T_2=0$

CASE 2 ] type 2 고객이 시스템내에 없는 경우, 즉 $l=0$

$h^2(u,v)\equiv$처음으로 type 2 고객이 도착하여 서비스를 받고 시스템을 나갈 동안 u명의 type 1 고객과 v명의 type 2 고객이 도착할 확률

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^u}{u!}\,dY_2(t)\times\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^v}{v!}\cdot\mu_2 e^{-\mu_2 t}\,dt \\ \qquad , \text{ if } \quad u,v\geqq 0 \\ 0 \qquad , \text{ otherwise}\end{cases}$$

여기서 $dY_2(t)=\dfrac{\lambda_2\ \mu_2}{\lambda_2-\mu_2}\ (e^{-\mu_2 t}-e^{-\lambda_2 t})\,dt$[12] 이다.

i) $j'<K$인 경우, $T_2=h^2\{(j'-l')-(j-l),\ l'-l\}$

단, $(j'-l')-(j-l)<0$이거나 $l'-l<0$이면, $T_2=0$

ii) $j'=K$인 경우,

① $(K-l')-(j-l)\geqq 1$이고 $l'-l\geqq 1$인 경우, $T_2=h^2\{(K-l')-(j-l),\ l'-l\}$

② $(K-l')-(j-l)=K-j$, 즉 $l'-l=0$인 경우, $T_2=\sum_{a=K-j+1}^{\infty} h^2\{a,\ 0\}$

③ $(K-l')-(j-l)=0$, 즉 $l'-l=K-j$인 경우, $T_2=\sum_{b=K-j}^{\infty} h^2\{0,\ b\}$

④ $(K-l')-(j-l)<0$이거나 $l'-l<0$인 경우, $T_2=0$

CASE 3 ] 시스템내에 있는 총 고객의 수가 K인 경우, 즉 $j=K$

i) $l\geqq 1$인 경우, $T_2=\begin{cases}1, & l'=l-1\text{일때}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

ii) $l=0$인 경우, $T_2=0$

〔C〕 두 명의 서비스 제공자가 각 type에 한 명씩 할당된 경우

이 경우 두 type의 고객은 모두 서비스를 받을 수 있다. 만약 서비스를 완료하여 시스템을 떠나는 고객이 생겼다면, 이 고객이 type 1에 속할 확률($x_1$)은

$$x_1=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$$

이고,

또 이 고객이 type 2에 속할 확률($x_2$)은

$$x_2=\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$$

이다.

그 이유는 각 type 고객의 서비스 시간이 각각 평균치 $\dfrac{1}{\mu_1}$, $\dfrac{1}{\mu_2}$인 지수분포이기 때문이다. 〔A〕,〔B〕의 각 경우에서 얻어진 결과를 이용하여 시스템을 떠나는 고객이 type 1, type 2인가에 조건부 확률을 주어 계산하면 된다. 그리고 one step transition를 $T_1$이라 놓고,

$T_1=P\{(S_2(n+1)=1,\ N(n+1)=j,\ n_2(n+1)=l')\mid(S_2(n)=1,\ N(n)=j,\ n_2(n)=l)\}$ $(a_3)$

로 정의한다.

12) C.D.F. $Y_2=F_2*G_2$인 convolution인데, $F_2$는 p.d.f. $f_2(t)=\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$인 type 2 고객의 도착시간 간격 분포이며, $G_2$는 p.d.f. $g_2(t)=\mu_2 e^{-\mu_2 t}$인 type 2 고객의 서비스시간 분포이다.

CASE 1 ][13] 시스템에 고객이 없는 경우, 즉 $j=l=0$

i) $j'<K$인 경우, $T_1=h^1\{(j'-l')-(j-l),\ l'-l\}\cdot x_1+h^2\{(j'-l')-(j-l),\ l'-l\}\cdot x_2$

단, $(j'-l')-(j-l)<0$이거나 $l'-l<0$이면, $T_1=0$

ii) $j'=K$인 경우

① $(K-l')-(j-l)\geqq 1$이고 $l'-l\geqq 1$인 경우

$T_1=h^1\{(K-l')-(j-l),\ l'-l\}\cdot x_1+h^2\{(K-l')-(j-l),\ l'-l\}\cdot x_2$

② $(K-l')-(j-l)=K-j$, 즉 $l'-l=0$인 경우, $T_1=\sum_{a=K-j}^{\infty} h^1\{a,\ 0\}\cdot x_1+\sum_{a=K-j}^{\infty} h^2\{a,\ 0\}\cdot x_2$

③ $(K-l')-(j-l)=0$, 즉 $l'-l=K-j$인 경우, $T_1=\sum_{b=K-j}^{\infty} h^1\{0,b\}\cdot x_1+\sum_{b=K-j}^{\infty} h^2\{0,b\}\cdot x_2$

④ $(K-l')-(j-l)<0$이거나 $l'-l<0$인 경우, $T_1=0$

CASE 2 ] 시스템내에 있는 고객이 모두 type 1 고객인 경우, 즉 $0<j<K,\ l=0$

i) $j'<K$인 경우

$T_1=k^1\{(j'-l')-(j-l)+1,\ l'-l\}\cdot x_1+h^2\{(j'-l')-(j-l),\ l'-l\}\cdot x_2$

ii) $j'=K$인 경우

① $(K-l')-(j-l)+1=K-j+1$, 즉 $l'-l=0$인 경우, $T_1=\sum_{a=K-j+1}^{\infty} k^1\{a,\ 0\}\cdot x_1+\sum_{a=K-j}^{\infty} h^2\{a,\ 0\}\cdot x_2$

② $(K-l')-(j-l)+1=0$, 즉 $l'-l=K-j+1$인 경우,

$T_1=\sum_{b=K-j+1}^{\infty} k^1\{0,b\}\cdot x_1+h^2\{(K-l')-(j-l),\ l'-l\}\cdot x_2$

③ $(K-l')-(j-l)=0$이고 $l'-l=K-j$인 경우,

$T_1=k^1\{(K-l')-(j-l)+1,\ l'-l\}\cdot x_1+\sum_{b=K-j}^{\infty} h^2\{0,b\}\cdot x_2$

④ otherwise

$T_1=k^1\{(K-l')-(j-l)+1,\ l'-l\}\cdot x_1+h^2\{(K-l')-(j-l),\ l'-l\}\cdot x_2$

CASE 3 ] 시스템내에 있는 고객이 모두 type 2 고객인 경우, 즉 $0<j<K,\ l=j$

i) $j'<K$인 경우

$T_1=h^1\{(j'-l')-(j-l),\ l'-l\}\cdot x_1+k^2\{(j'-l')-(j-l),\ l'-l+1\}\cdot x_2$

ii) $j'=K$인 경우

① $(K-l')-(j-l)=0$, 즉 $l'-l+1=K-j+1$인 경우

$T_1=\sum_{b=K-j}^{\infty} h^1\{0,b\}\cdot x_1+\sum_{b=K-j+1}^{\infty} h^2\{0,b\}\cdot x_2$

② $(k-l')-(j-l)=k-j+1$, 즉 $l'-l+1=0$인 경우

$T_1=h^1\{(k-l')-(j-l),\ l'-l\}\cdot x_1+\sum_{a=K-j+1}^{\infty} k^2\{a,\ 0\}\cdot x_2$

③ $(k-l')-(j-l)=k-j$, 즉 $l'-l=0$인 경우

$T_1=\sum_{a=K-j}^{\infty} h^1\{a,\ 0\}\cdot x_1+k^2\{(k-l')-(j-l),\ l'-l+1\}\cdot x_2$

④ Otherwise

$T_1=h^1\{(k-l')-(j-l),\ l'-l\}\cdot x_1+h^2\{(k-l')-(j-l),\ l'-l+1\}\cdot x_2$

CASE 4] 시스템내에 type 1 고객과 type 2 고객이 모두 있는 경우, 즉 $0<j<K,\ 0<l<j$

i) $j'<k$인 경우

$T_1=k^1\{(j'-l')-(j-l)+1,\ l'-l\}\cdot x_1+k^2\{(j'-l'),\ l'-l+1\}\cdot x_2$

ii) $j'=k$인 경우

13) state $(1,\ j,\ l)$에 대한 구분.

① $(K-l')-(j-l)=K-j+1$, 즉 $l'-l+1=0$인 경우

$$T_1=k^1\{(k-l')-(j-l)+1,\ l'-l\}\cdot x_1+\sum_{a=K-j+1}^{\infty}k^2\{a,0\}\cdot x_2$$

② $(K-l')-(j-l)+1=k-j+1$, 즉 $l'-l=0$인 경우

$$T_1=\sum_{a=k-j+1}^{\infty}k^1\{a,0\}\cdot x_1+k^2\{(k-l')-(j-l),\ l'-l+1\}\cdot x_2$$

③ $(K-l')-(j-l)=0$이고 $l'-l+1=k-j+1$인 경우

$$T_1=k^1\{(k-l')-(j-l)+1,\ l'-l\}\cdot x_1+\sum_{b=K-j+1}^{\infty}k^2\{0,b\}\cdot x_2$$

④ $(K-l')-(j-l)+1=0$, 즉 $l'-l=k-j+1$인 경우

$$T_1=\sum_{b=K-j+1}^{\infty}k^1\{0,b\}\cdot x_1+k^1\{(k-l')-(j-l),\ l'-l+1\}\cdot x_2$$

⑤ Otherwise

$$T_1=k^1\{(K-l')-(j-l)+1,\ l'-l\}\cdot x_1+k^2\{(K-l')-(j-l),\ l'-l+1\}\cdot x_2$$

CASE 5] 시스템내에 있는 총 고객의 수가 K인 경우, 즉 $j=K$

i) $l=0$인 경우 : $T_1=\begin{cases}1, & l'=0\text{일 때}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

ii) $l=K$인 경우 : $T_1=\begin{cases}1, & l'=K-1\text{일 때}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

iii) $0<l<K$인 경우 : $T_1=\begin{cases}x_2, & l'=l-1\text{일 때}\\ x_1, & l'=l\text{일 때}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

**2・3 Transition point에서 발생하는 비용 ($C(i,j,l)(a_m)$)의 계산**

$C(i,j,l)(a_m)\equiv$ 시스템이 transition point에서 state $(i,j,l)$에 있고 action $a_m$을 취할 경우 발생하는 총비용

이라 정의한다. 그리고 각 단위비용은 표 3과같다.

표 3.

| 비 용 | 설 명 |
|---|---|
| $C_1$ | type 1 고객 한명당 대기행렬에서 기다릴 때 발생하는 비용 |
| $C_2$ | type 2 고객 한명당 대기행렬에서 기다릴 때 발생하는 비용 |
| $C_3$ | type 1의 고객 한명당 서비스 비용 |
| $C_4$ | type 2의 고객 한명당 서비스 비용 |
| $C_5$ | type 1의 고객을 서비스하던 서비스 제공자가 type 2로 옮길 때의 교체비용 |
| $C_6$ | type 2의 고객을 서비스하던 서비스 제공자가 type 2로 옮길 때의 교체비용 |

transition point에서 발생하는 비용의 종류를 논의해보면

$C_1(i,j,l)(a_m)\equiv$ transition point에서 시스템이 state $(i,j,l)$에 있고 action $a_m$을 취했을 때의 type 1 고객의 대기비용$=(j-l)\cdot c_1$

$C_2(i,j,l)(a_m)\equiv$ transition point에서 시스템이 state $(i,j,l)$에 있고 action $a_m$을 취했을 때의 type 2의 고객의 대기비용$=l\cdot c_2$

$C_3(i,j,l)(a_m)\equiv$ transition point에서 시스템이 state $(i,j,l)$에 있고 action $a_m$을 취했을 때의 서비스 비용 $=$ $c_3$, 떠나는 고객이 type 1이면
$c_4$, 떠나는 고객이 type 2이면

$C_4(i,j,l)(a_m)\equiv$ transition point에서 시스템이 state $(i,j,l)$에 있고 action $a_m$을 취했을 때의 교체비용 $=\begin{cases}c_5, & a_m=a_1\text{일 때}\\ c_6, & a_m=a_2\text{일 때}\\ 0, & a_m=a_3\text{일 때}\end{cases}$

여기서 $(i,j,l)\in I$, $a_m\in A$이다.

따라서 $C(i,j,l)(a_m)=\sum_{r=1}^{4}C_r(i,j,l)(a_m)$

단, $C(0, k, k)(a_3)=\infty$, $C(2, k, 0)(a_3)=\infty$
$C(1, k, k)(a_2)=\infty$, $C(1, k, 0)(a_1)=\infty$[14] 이다.

### 2・4 Markov decision process에 적용

초기 state$(S_2(0), N(0), n_2(0))$와 특정한 정책(policy)이 주어진 경우 n번째 transition point에서의 process $\{(S_2(n), N(n), n_2(n)) : n=0, 1, \cdots\}$는 Markov chain이며 당시 취한 action $d(S_2(n), N(n), n_2(n))$은 단지 state$(S_2(n), N(n), n_2(n))$에만 dependent하므로 sequence $\{S_2(n), N(n), n_2(n), d(S_2(n), N(n), n_2(n)) : n=0, 1, 2, \cdots\}$는 Markov decision process이다.〔5, 9, 12〕. 따라서 본절에서는 Markov decision process algorithm에 적용하여 두 개의 type을 가진 고객이 도착하는 M/M/2/K 대기행렬 시스템에서의 최적 서비스정책을 구하고자 한다.

state[15] 수가 많으므로 successive approximation방법〔8, 12〕을 이용한다. 이 방법은 비록 정확한 the long run expected total cost를 구하기는 어려우나 가장 작은 계산량으로 최적 정책을 구할 수 있는 algorithm이다.

$V_\alpha^N(i, j, l) \equiv$ process가 state$(i, j, l)$에서 출발할 때 N단계(stage)동안 발생하는 비용의 최소 기대값($\alpha$는 discount factor)

$$V_\alpha^N(i, j, l) = \min_{a_m} [C(i, j, l)(a_m) + \alpha\{ \sum_{i'}\sum_{j'}\sum_{l'} P\{(S_2(n+1)=i', N(n+1)=j', n_2(n+1) N(n+1)=j', n_2(n+1)=l') \mid (S_2(n)=i, N(n)=j, n_2(n)=l)\}(a_m) \times V_\alpha^{N-1}(i', j', l')\}]$$

여기서 $(i, j, l), (i, j', l') \in I$, $a_m \in A$이고, $V_\alpha^0(i, j, l)=0$ for all $i, j, l$으로 주어져 있다.

### 2・5 예제 및 분석

〔표 4〕와같이 데이타가 주어진 M/M/2/3 대기행렬 시스템의 최적 서비스 조정정책을 본모델에 적용하여 구하였다.

표 4.

| | type 1 | type 2 |
|---|---|---|
| 도착율 $\lambda$ | $\lambda_1 = 0.65 \times 1.27$ | $\lambda_2 = 0.35 \times 1.27$ |
| 서비스시간 $1/\mu$ | $1/\mu_1 = 1/3.52$ | $1/\mu_2 = 1/2.78$ |
| 대기비용 | $C_1 = 23.51$ | $C_2 = 8.07$ |
| 서비스비용 | $C_3 = 31.42$ | $C_4 = 22.13$ |
| 교체비용 | $C_5 = 33.28$ | $C_6 = 22.34$ |

예를 들어 몇 개의 계산결과는 표 5[16] 와같다.

그리고 이 시스템에 가장 영향을 주는 비용의 종류를 찾아내기 위해 분석을 행해 얻어진 것이 그림 2이다.

가장 영향을 많이 주는 비용은 $C_1$임을 알 수 있다.

표 5.

| transition의 수(n) | $S_2$(n) | N(n) | $n_2$(n) | the expected total cost | 최적 서비스 정책 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 1 | 82.40 | 3 |
| | 1 | 3 | 2 | 66.96 | 3 |
| | 1 | 3 | 3 | 51.52 | 3 |
| 5 | 1 | 3 | 1 | 251.51 | 3 |
| | 1 | 3 | 2 | 208.43 | 3 |
| | 1 | 3 | 3 | 181.54 | 3 |
| 10 | 1 | 3 | 1 | 347.99 | 3 |
| | 1 | 3 | 2 | 292.93 | 2 |
| | 1 | 3 | 3 | 267.46 | 3 |
| 15 | 1 | 3 | 1 | 383.31 | 2 |
| | 1 | 3 | 2 | 319.49 | 2 |
| | 1 | 3 | 3 | 298.64 | 3 |

14) 그 이유는 state(0, K, K)에서 type 2 고객을 서비스할 서비스 제공자를 할당하지 않으면 더 이상 transition이 일어날 수 없기 때문이다. 나머지도 마찬가지이다. 그러므로 시스템 활동은 정지하게 되며 큰 손실을 초래한다고 생각될 수 있다.

15) state의 수는 $\frac{3K^2+6K}{2}$인데, 만약 $K=20$이면 660개의 state가 있다.

16) FORTRAN Ⅳ로 프로그래밍하여 IBM 4341을 이용 계산하였고, 적분방법은 수치해석의 Romberg method를 이용하였다.

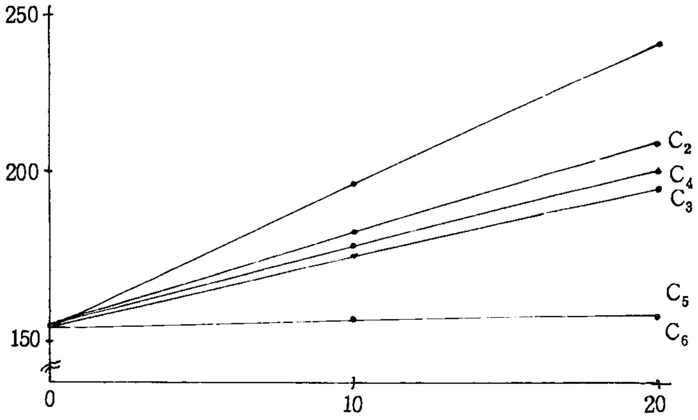


그림 2. 각 비용의 증가에 따른
**the expected total cost** 의 변화 도표

### 3. 결 론

이 모델은 두 가지 다른 type의 서비스를 요구하는 고객들이 도착하는 모든 M/M/2/K 대기행렬 시스템에서 최적 서비스 정책을 구해낼 수 있다. 서론의 프레스 예뿐만이 아니라 공항에서의 내국인과 외국인에 대한 출입업무, 우체국에서의 편지 및 소포 취급업무, 은행의 예입 지출업무 등 많은 경우에 적용될 수 있다. 컴퓨터 계산시 CPU time과 memory size를 절약하기 위한 방법으로, successive approximation을 이용하였고 또 transition probability들의 상당량이 0이므로 이에 해당되는 계산을 생략하므로써 많은 도움을 받았다.

## 참 고 문 헌

1) Bell, C. E., "Turning off a Server with Customers Present : Is this anyway to run an M/M/C Queue with Removable Servers ?", *Operations Research*, Vol.23, 1975.

2) Brosh, I., "The Policy Space Structure of Markovian Systems with Two Types of Service", *Management Science*, Vol.16, 1970.

3) Cinlar, E., *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall, 1975.

4) Carabill, T. B., Gross, D. and M. J. Magazine, "A Classified Bioliography of Research on Optimal Design and Control of Queues", *Operations Research*, Vol.25, 1977.

5) Derman, C., "Markovian Sequencial Control Process - Denumberable State Space", *Journal Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 10, 1965.

6) Dreyfus, S. E. and A. M. Law, *The Art and Theory of Dynamic Programming*, Academic Press, 1977.

7) Gross, D. and C. M. Harris, *Fundamentals of Queueing Theory*, John Wiley and Sons, 1974.

8) Hiller and Lieberman, *Introduction to Operations Research*, Holden Day, 3rd Edition, 1980.

9) Howard, R., *Dynamic Programming and Markov Process*, M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1960.

10) Magazine, M. J., "Optimal Control of Multi-Channel Service Rystems", *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.18, 1971.

11) Robinson, D., "Optimization of Priorty Queues - A Semi-Markov Decision Chain Approach", *Management Science*, Vol. 24, 1978.

12) Ross, M. S., *Applied Probability Models with Optmization Applications*, Holden Day, 1970.