

유한 구간 필터에 대한 연구 동향

權 旭 鉉*, 權 五 圭**

서울大學校 工科大學 制御計測工學科 副教授(工博)*,
仁荷大學校 工科大學 電氣工學科 專任講師**

I. 서 론

칼만 필터는 1960년^[1] R. E. Kalman에 의하여 제시된 이래 공학의 많은 분야에서 응용되고 있다. 그런데 실제로 칼만 필터를 설계하다 보면 두 가지 큰 문제에 부딪치게 된다.^{[2][3]} 첫째, 필터의 발산문제가 있다. 칼만 필터는 시스템과 측정과정이 정확한 모델링에 의해 완벽하게 주어진 조건하에서 유도된다. 그런데 실제의 시스템을 모델링함에 있어서 모델링 오차는 불가피한 것이며, 이에 의해 필터 자체의 추정오차의 상호분산은 유계인데도 실제의 시스템의 신호와 추정된 신호간의 오차 상호분산이 유계가 아니고 발산하게 되는 경우가 자주 생긴다. 둘째, 계산량과 계산상의 오차를 최소화시키는 문제가 있다. 칼만 필터의 표준 알고리즘을 계산기로 실현시킬 때 시스템의 차수가 클수록 계산량이 크게 증가하고 또 계산상의 오차도 커지게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 정보 필터(information filter), 제곱근 필터(square-root filter), 순차 처리(sequential processing), chandrasekhar

형 알고리즘, 이중 알고리즘(doubling algorithm) 등의 여러가지 방법이 제시되었다.^[2]

필터 발산문제의 해결을 위해서도 많은 방법이 제시되었다. 대표적인 방법으로는 모델링 오차를 보상해 주기 위해 시스템 입력잡음의 상호 분산을 증가시키는 방법, 입력잡음의 분산을 적응 조절하는 적응 잡음 추정법, 필터의 이득 행렬에 어떤 하한치를 주는 방법, 측정값에 지수적 가중을 행하는 방법, 그리고 추정시간으로부터 유한한 구간이내의 과거의 측정값만을 이용하는 유한구간법등이 있다.^[3]

한편, 불규칙 과정의 최소자승 추정문제의 해결책으로 제시된 N. Wiener(1942)의 Wiener 필터는^[4] 계산이 복잡하고 알고리즘이 비순환형이며, 다중입출력 시스템에는 적용이 어렵다는등의 단점으로 인하여 칼만 필

터의 등장과 더불어 한때 퇴색한 느낌이 있으나, 그 단점이 보완되고 또한 정상과정의 경우 두 필터가 서로 등가임이 밝혀지면서 이 필터에 대한 연구 및 응용이 활발해져 왔다.^[5] 그런데 이 Wiener 필터에서도 필터 발산문제가 제기되며 이에 대한 해결책의 하나로 역시 유한구간법이 제시되고 있다.

본고에서는 필터 발산문제의 해결법이 될 수 있고 계산상 유리한 유한구간법에 초점을 두어 이 접근법의 개념 및 그 구체적인 알고리즘등에 관한 연구동향을 소개하고자 한다.

II. 유한 구간 필터의 개념

그림 1과 같이 주어진 시스템에서 x 는 신호, 상태변수, 또는 파라미터 상수등 추정하고자 하는 값이며 y 는 x 와 시스템 내부잡음등으로 구성되어 있는 출력신호이며 z 는 측정값, n 은 가산형 측정잡음이다. 여기서

$$z(t) = y(t) + n(t) \quad (1)$$

이며 필터문제는 측정값 z 로부터 신호 x 또는 y 의 값을 추정하는 데에 목적이 있다. 이때 추정에는 측정 초기에서 부터 현재까지의 모든 측정값들을 사용할 수도 있으며 그 일부를 사용할 수도 있다.

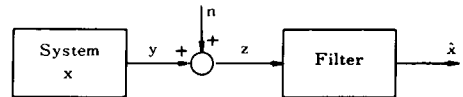


그림 1. 필터 문제

필터문제는 어떤 평가함수를 최소로 하는 필터를 구하는 것으로서 그 평가함수로는 추정오차의 상호 분산을 주로 사용된다. 이 경우 결과적으로 유도되는 최적 필터는 선형일 수도 있고 비선형일 수도 있다.^[19] 어떤

경우에는 필터의 구조를 다음과 같이 미리 선형으로 결정된 뒤에 평가함수를 최소화하는 필터의 임펄스

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \tau) z(\tau) d\tau \quad (2)$$

응답 $H(t, \tau)$ 를 구하기도 한다. 식(2)의 경우는 초기 시간으로부터 현재까지의 모든 측정값을 사용하는 경우이다.

유한구간 필터의 기본개념은 현재의 추정에 별도로움이 안되는 오래된 측정값은 제거하고 적당한 유한구간이내의 과거 측정값들만을 사용하여 추정을 행한다는 데에 있다. 그림 2를 보면서 이를 설명하면, t_1 시간에서의 추정은 $[t_1 - T, t_1]$ 구간에서의 측정값들을, t_2 시간에서의 추정은 $[t_2 - T, t_2]$ 구간, t 시간에서의 추정에는 $[t - T, t]$ 구간에서의 관측치를 사용한다는 것이다.

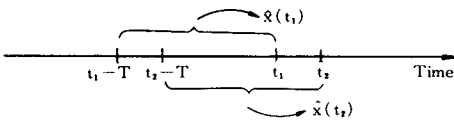


그림 2. 유한구간 필터

이 개념에 의한 유한구간 필터로 제시되고 있는 것으로는 Jazwinski의 유한 기억 필터(limited memory filter)^{[6][7]} Bruckstein의 이동윈도우 필터(sliding window filter)^[8] W. H. Kwon의 이동구간 필터(moving horizon filter)^{[9][10]} 그리고 Wiener FIR(finite impulse response) 필터^{[11][12]} 등이 있다. 이 중에서 유한기억 필터, 이동 윈도우 필터, 이동구간 필터 등은 상태 공간 모델에서 출발하며 유한구간 $[t-T, t]$ 에서의 측정값에 기준하여 평가함수를 최소 또는 최대화시킴으로써 얻어지고, Wiener FIR 필터는 구간 $[t-T, t]$ 의 측정값외에 다음과 같이 필터의 구조를 선형으로 미리 정한뒤에

$$\hat{x}(t) = \int_{t-T}^t H(t, \tau) z(\tau) d\tau \quad (3)$$

필터의 임펄스 응답 $H(t, \tau)$ 를 구한다. 식(3)과 같은 필터의 구조로부터 FIR 필터라는 용어가 유래된다. 필터의 대상 시스템은 연속형 혹은 이산형 선형 동적 시스템으로 주어지기도 하며 또는 신호 x 와 측정값 z 나 출력 y 와의 통계적 자료(statistics)로 주어지기도 한다. 상세한 것은 추후 설명하기로 한다.

III. 유한 기억 필터(Limited Memory Filter)

이 필터는 1968년에 A. H. Jazwinski에 의해 제시되었으며 인공위성의 궤도 결정에 응용되었다.^{[6][7]} 대상 시스템과 추정과정은 다음과 같다.

$$x(k+1) = A_k x(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$y(k) = M_k x(k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

$$z(k) = y(k) + v(k) \quad (6)$$

단, $x(0) \sim N(\bar{x}_0, P_0), P_0 > 0$

$\{v(k)\}$ 는 백색 잡음과정으로서 Gaussian이고

$$E[v(k)v^T(l)] = R_k \delta_{kl}, \quad R_k > 0$$

이 필터의 판별함수는 조건부 확률밀도함수 $p(x(n) | I_n^N)$ 이며 유한 기억 필터는 이를 최대화시키는 최대 가능성 추정자(maximum likelihood estimator)로서 다음 같이 유도된다.

$$\hat{x}^N(n) = P^N(n) [P^{-1}(n | n) \hat{x}(n | n) - P^{-1}(n | m) \hat{x}(n | m)] \quad (7)$$

$$P^N(n) = [P^{-1}(n | n) - P^{-1}(n | m)]^{-1} \quad (8)$$

단, $N = n - m, I_n = \{z(1), z(2), \dots, z(n)\},$

$I_n^N = \{z(n - N + 1), z(n - N + 2), \dots, z(n)\},$

$\hat{x}^N(n) = E[x(n) | I_n^N];$ 유한기억 필터,

$P^N(n) = E\{[x(n) - \hat{x}^N(n)][x(n) - \hat{x}^N(n)]^T | I_n^N\},$

$\hat{x}(n | n) = E[x(n) | I_n];$ 칼만 필터,

$P(n | n) = E\{[x(n) - \hat{x}(n | n)][x(n) - \hat{x}(n | n)]^T | I_n\},$

$\hat{x}(n | m) = E[x(n) | I_m];$ N단 예측자,

$P(n | m) = E\{[x(n) - \hat{x}(n | m)][x(n) - \hat{x}(n | m)]^T | I_m\}$

식(7)에서 보는 바와 같이 유한 기억 필터는 칼만 필터 $\hat{x}(n | n)$ 와 N단 예측자 $\hat{x}(n | m)$ 의 가중차로써 얻어진다. 그런데 서론에서 언급했듯이 칼만 필터와 예측자는 발산문제를 안고 있으며 이와 같은 칼만 필터와 예측자를 사용한다는 점에서 유한 기억 필터는 문제 제시 된다. 그리고 식(8)에서 의해 $P^N(n)$ 을 구하려면 매번 3회의 역행렬 계산을 수행해야 하는 계산상의 난점도 있다. 이러한 문제점을 해결하고자 Jazwinski는 다음과 같은 근사 알고리즘을 제시하였다.^{[6][7]}

우선 초기시간으로부터 N시점까지 칼만 필터를 동작시키고서 다음의 절차를 수행한다.

- 1) $k = 1$ 로 놓는다.
- 2) $[kN, (k+1)N]$ 구간에서 칼만 필터를 동작시킨다.
- 3) N단 예측자 $\hat{x}((k+1)N | kN)$ 를 동작시킨다.
- 4) 식(7)-(8)에 의거하여 $\hat{x}^N((k+1)N)$ 과 $P^N((k+1)N)$ 을 산출하고 이를 다음 구간에서의 초기치

로 사용한다.

5) $k = k + 1$ 로 증분시켜 2) ~ 5) 의 절차를 반복한다.

이상의 절차를 도식화하면 그림 3 과 같다.

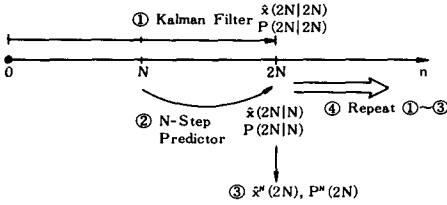


그림 3. 유한 기억 필터의 근사 추정 절차

Jazwinski 는 이 기법을 인공위성의 궤도결정에 응용하였는데, 0.1시간 간격으로 측정을 하고 $N=10$ 으로 하였을 때의 유한 기억 필터와 칼만 필터에 의한 위치 추정오차를 비교해 보면 그림 4 와 같다. 그림 4 를 보면 칼만 필터는 모델링 오차에 의해 빨리 발산해 버리는 데에 비해 유한 기억 필터는 추정오차가 유계임을 알 수 있다.

유한 기억 필터는 비선형 시스템에도 적용이 되지만 대상 시스템에 잡음이 없다는 제약조건이 있어 적용 범위가 제한된다. 시스템에 잡음이 있는 경우에 대해서는 알고리즘이 아직 제시되지 않고 있다. 또 이 필터는 식 (7) ~ (8)에 보듯이 비순환적이다. 따라서 계산 하중이 문제시되며 이를 순환형으로 바꾸는 것도 남은 과제이다. 아울러 시스템과 측정 과정이 모두 연속형인 경우에 대응되는 결과를 유도해 내는 것도 남은 과제이다.

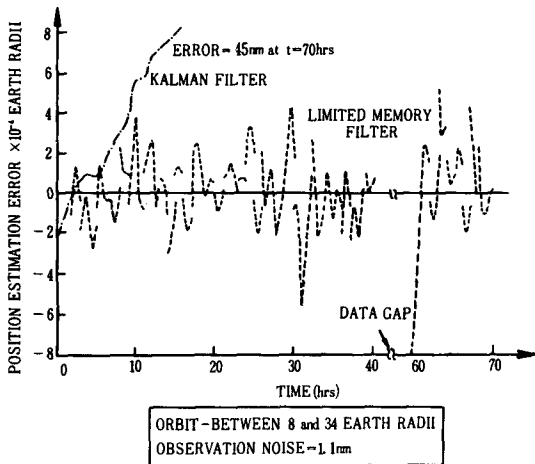


그림 4. 유한 기억 필터와 칼만 필터의 위치 오차 비교

IV. 이동 윈도우 필터(Sliding Window Filter)

다음과 같은 선형 연속형 시스템에서

$$\dot{x}(t) = A_t x(t) + B_t w(t) \quad (9)$$

$$y(t) = C_t x(t) \quad (10)$$

$$z(t) = y(t) + v(t) \quad (11)$$

단, $E[x(t_0)] = \bar{x}_0$, $\text{Var}[x(t_0)] = P_0$, w 와 v 는 백색 잡음 과정으로서 $E[w(t)] = E[v(t)] = 0$

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(\tau) \\ v(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(s) & v^T(s) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix}$$

$$\delta(\tau-s), Q_r \geq 0, R_r > 0,$$

$x(t_0)$ 는 w, v 와 상관관계가 없음.

측정값 z 가 구간 $[t-T, t]$ 에 걸쳐 주어졌을 때에 평가함수 $J = E[x(t) - \hat{x}(t)]^T [x(t) - \hat{x}(t)]$ 를 최소화시키는 $\hat{x}(t)$ 를 구하는 것이 이동윈도우 필터 문제이다. Bruckstein(1981) 은 Scattering 이론을 이용하여 이 문제의 해결을 시도했다.^[8] Scattering 이론은 중성자 또는 전자파와 같은 전파매체와 매질간의 상호작용에 대한 분석이론으로써 연산자 이론에 근거하고 있다. 그런데 분석과정에서 리카티방정식이 자연 발생되는 까닭에 이를 최소화승 추정문제나 선형조정기문제등에 적용이 가능해지는 것이다.^{[13][14][15]}

이동윈도우 필터는 다음 같은 경제치 문제를 풀음으로써 구해진다.

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \hat{x}(s | I_t) \\ \lambda(s | I_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & B_s Q_s B_s^T \\ C_s^T R_s^{-1} C_s & -A_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(s | I_t) \\ \lambda(s | I_t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -C_s^T R_s^{-1} z(s) \end{bmatrix} \quad (12)$$

단, $\lambda(t | I_t) = 0$

$$\hat{x}(t-T | I_t) = P_0 \lambda(t-T | I_t) + \bar{x}_0$$

$$\bar{x}_0 = E[x(t-T)], P_0 = \text{Var}[x(t-T)]$$

$$I_t = \{z(\tau) : \tau \in [t-T, t]\}$$

Scattering 이론을 식 (12)에 적용하기 위해 Scattering 행렬 S 와 소오스 벡터 q 를 다음과 같이 정의하면

$$S(\tau, \sigma) = \begin{bmatrix} \Phi(\tau, \sigma) P(\tau, \sigma) \\ -\theta(\tau, \sigma) \Psi(\tau, \sigma) \end{bmatrix}$$

$$q(\tau, \sigma) = \begin{bmatrix} \sigma_u \\ \sigma_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}(\sigma | I_\sigma) \\ \lambda(\tau | I_\sigma) \end{bmatrix}$$

단, S 의 부분행렬중 P 는 필터의 오차 상호분산 행렬, Φ 는 상태전이 행렬이고, $\Psi = \Phi^T$ 임.

Scattering 이론으로 부터 다음 관계식이 유도된다.^[8]

$$\frac{d}{dt}S(t-T, t) = \begin{bmatrix} (A_t - PC_t^T R_t^{-1} C_t) \Phi - \Phi (A_{t-T} - \\ - \Psi C_{t-T}^T R_{t-T}^{-1} C_{t-T} \Phi - (A_{t-T}^T \theta + \theta A_{t-T} \\ - B_{t-T} Q_{t-T} Q_{t-T}^T B_{t-T}^T \theta), \\ + C_{t-T}^T R_{t-T}^{-1} C_{t-T} - \theta B_{t-T} - \theta_{t-T} B_{t-T}^T \theta), \end{bmatrix}$$

$$B_t Q_t B_t^T + A_t P + P A_t^T - P C_t^T R_t^{-1} C_t P - \Phi B_{t-T} Q_{t-T} B_{t-T}^T \Psi \\ \Psi (A_{t-T}^T - C_{t-T}^T R_{t-T}^{-1} C_{t-T} P) - (A_{t-T}^T - \theta B_{t-T} Q_{t-T} B_{t-T}^T \theta) \Psi$$

$$S(t-T, t-T) = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt}q(t-T, t) = \begin{bmatrix} (A_t - PC_t^T R_t^{-1} C_t) \sigma_u + PC_t^T R_t^{-1} \\ \Psi [C_{t-T}^T R_{t-T}^{-1} C_{t-T} z(t) - C_{t-T}^T R_{t-T}^{-1} C_{t-T} \sigma_u] \\ z(t) - \Phi B_{t-T} Q_{t-T} B_{t-T}^T \sigma_a \\ - [(A_{t-T}^T - \theta B_{t-T} Q_{t-T} B_{t-T}^T \theta) \sigma_a + C_{t-T}^T R_{t-T}^{-1} z(t-T)] \end{bmatrix}$$

$$q(t-T, t-T) = \begin{bmatrix} O \\ O \end{bmatrix} \quad (14)$$

식(13), (14)로부터 S(t-T, t) 와 q(t-T, t)가 구해지면

$$\hat{x}(t | I_t) = \sigma_u + \Phi(t-T, t) [I + P_o \theta(t-T, t)]^{-1} \\ [\bar{x}_o + P_o \sigma_a] \quad (15)$$

$$\hat{x}(t-T | I_t) = \bar{x}_o + P_o [I + \theta(t-T, t) P_o]^{-1} \\ [\sigma_a - \theta(t-T) \bar{x}_o] \quad (16)$$

위와 같은 관계에 의해 $\hat{x}(t | I_t)$ 가 얻어진다. 식(15)에서 $P_o = r \bar{P}_o$, $r \rightarrow \infty$ 라고 보면 다음과 같은 결과가 된다.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(t | I_t) \\ \hat{x}(t-T | I_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \Phi(t-T, t) \theta^{-1}(t-T, t) \\ O & \theta^{-1}(t-T, t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \sigma_u \\ \sigma_a \end{bmatrix} \quad (17)$$

식(13), (14), (17)들이 Scattering 이론에 의해 유도되는 이동 윈도우 필터 알고리즘이다.

시불변 시스템의 경우 s(t-T, t)는 구간폭 T만의 함수가 되며 이를 S_T라 놓으면

$$S(t-T, t) = S_T = \begin{bmatrix} \Phi_T P_T \\ -\theta_T \Psi_T \end{bmatrix}$$

식(13), (14), (17) 으로부터

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{x}(t | I_t) \\ \hat{x}(t-T | I_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \Phi_T \theta_T^{-1} \\ 0 & \theta_T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - P_T C^T R^{-1} C, \\ -\Psi_T C^T R^{-1} C, \\ -\Phi_T B Q B^T \\ -A^T + \theta_T B Q B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Phi_T \\ 0 & \theta_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t | I_t) \\ \hat{x}(t-T | I_t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} I, \Phi_T \theta_T^{-1} \\ 0, \theta_T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_T C^T R^{-1}, O \\ \Psi_T C^T R^{-1}, -C^T R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-T) \end{bmatrix} \quad (18)$$

의 결과가 유도되며 이때 이동 윈도우 필터는 선형 시불변 필터가 된다.

이동 윈도우 필터는 순환형으로 주어지며 대상 시스템이 시불변일 때에는 필터도 시불변이 되어 구조가 간단해지는 등의 장점을 지니고 있다. 그러나 이 필터는 최적성, 안정도 그리고 식(18)의 초기치 조건 및 식(15)~(16)에서 $P_o \rightarrow \infty$ 로 보는 점등이 문제시되며, 시변 시스템의 경우에는 계산 하중이 너무 크다는 단점을 안고 있다. 실제로 시스템의 차수가 N이면 Scattering 행렬 S는 2N × 2N 행렬이 되어 이를 식(13)에 의해 구하려면 막대한 계산량을 요하게 되는 것이다. 이러한 시스템의 경우의 결과도^[8]에 제시되고 있으나 알고리즘이 매우 복잡하다.

V. 이동 구간 필터 (Moving Horizon Filter)

식(9)~(11)로 주어지는 시스템에 있어서 매 순간 t에 구간 [t-T, t]의 측정값 z를 사용하고 t-T에서의 신호 x의 상호분산을 F_{t-T}라고 가정하여 평가함수 J = [x(t) - $\hat{x}(t)$]^T [x(t) - $\hat{x}(t)$]를 최소화시키는 $\hat{x}(t)$ 를 구하면 다음과 같은 필터를 얻는다.^{[9],[10]}

$$\hat{x}(t) = A_t \hat{x}(t) + \sum(t-T, t) C_t^T R_t^{-1} \\ [z(t) - C_t \hat{x}(t)] \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \sum(\sigma, \tau) = A_\tau \sum(\sigma, \tau) + \sum(\sigma, \tau) A_\tau^T \\ - \sum(\sigma, \tau) C_\tau^T R_\tau^{-1} C_\tau^T R_\tau^{-1} C_\tau \sum(\sigma, \tau) + B_\tau Q_\tau B_\tau^T, \\ \sum(\sigma, \sigma) = F_\sigma \quad (20)$$

이 필터는 구조가 표준 칼만 필터와 동일하고 안정도가 보장되며 필터 이득행렬 \sum 의 계산이 용이하다는 장점을 가지고 있으나 최적성은 지니지 못하는 준최적 필터이다.^{[9],[10]} 또한 매구간마다 필터 이득행렬의 초기치를 주어야하는 것이 문제점이다. 그러나 이동구간 필터에서는 t 순간에 t-T 이전의 모든 측정값은 무시하므로 t 순간에 있어서 x(t-T)의 통계적 자료는 알지 못한다고 보는 것이 논리적이므로 F_{t-T} = ∞로 취하는 것이 합리적이다. 따라서 P(t-T, t) = $\sum^{-1}(t-T, t)$ 라 놓으면, F_{t-T} = ∞일 때 이동구간 필터는 식(19)~(20)로부터 다음과 같이 된다.

$$\hat{x}(t) = A_t \hat{x}(t) + P^{-1}(t-T, t) \\ \cdot C_t^T R_t^{-1} [z(t) - C_t \hat{x}(t)] \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P(\sigma, \tau) &= -P(\sigma, \tau) A_{\tau} - A_{\tau}^T P(\sigma, \tau) \\ &- P(\sigma, \tau) B_{\tau} Q_{\tau} B_{\tau}^T + C_{\tau}^T R_{\tau}^{-1} C_{\tau}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$P(\sigma, \sigma) = 0$$

칼만 필터와 선형 조정기(regulator) 간에는 쌍대성이 성립하는데,^{[17][18]} 마찬가지로 이동구간 필터는 이동구간 조정기(moving horizon regulator)와 쌍대가 되는 성질을 지닌다.^[9] 이동구간 조정기 문제는 다음과 같은 선형 시변 시스템과 평가함수가 주어졌을 때,

$$\dot{x}(t) = A_t x(t) + B_t u(t) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} J_m &= \int_t^{t+T} [x^T(\tau) Q_{\tau} x(\tau) + u^T(\tau) R_{\tau} u(\tau)] d\tau \\ &+ x^T(t+T) F_{t+T} x(t+T) \end{aligned} \quad (24)$$

J_m 을 최소화시키는 제어입력 $u^m(t)$ 를 구하는 것이 목적으로서 $u^m(t)$ 는 다음과 같이 구해진다.^{[9][16]}

$$u^m(t) = -R_t^{-1} B_t^T K(t, t+T) x(t) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \tau} K(\tau, \sigma) &= K(\tau, \sigma) A_{\tau} + A_{\tau}^T K(\tau, \sigma) \\ &- K(\tau, \sigma) B_{\tau} R_{\tau}^{-1} B_{\tau}^T K(\tau, \sigma) + Q_{\tau}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$K(\sigma, \sigma) = F_{\sigma}$$

이동구간 필터의 안정도 등 많은 성질들은 위의 이동구간 조정기의 특성에서 유추할 수 있다. 선형 시불변 시스템의 경우 식(19), (20)의 이동구간 필터도 선형 시불변이 된다. 이산형 시스템에 관한 필터는 [10]에 주어져 있다.

VI. Wiener FIR 필터

그림 1과 식(1)에서 측정값 z 가 구간 $[t-T, t]$ 에 걸쳐 주어졌을 때 다음과 같다

$$\hat{y}(t) = \int_{t-T}^t H(t, \tau) z(\tau) d\tau \quad (27)$$

선형구조를 지니며 평가함수 $J = [y(t) - \hat{y}(t)]^T [y(t) - \hat{y}(t)]$ 를 최소화시키는 필터 $\hat{y}(t)$ 를 구해보자. 이것이 Wiener FIR 필터 문제이다. y 와 v 는 영평균 정상과정으로서

$$E[v(t)v^T(s)] = I_p \delta(t-s), \text{ 단 } I_p \text{는 } p \times p \text{ 단위행렬}$$

$$E[y(t)y^T(s)] = K(t, s) = K(t-s)$$

$$E[y(t)v^T(s)] = 0$$

라고 가정한다. 그러면 식(27)의 필터의 임펄스 응답인 H 를 시불변 시스템에 대하여 구해보자.

직교성 $E[y(t) - \hat{y}(t)] z^T(s) = 0, t-T \leq z \leq t$ ^[19, 20]으로 부터 다음 관계가 성립하는데

$$\begin{aligned} E y(t) [y^T(s) + v^T(s)] \\ - E \int_{t-T}^t H(t, \tau) z(\tau) z^T(s) d\tau = 0, \\ t-T \leq s \leq t. \end{aligned}$$

$E z(\tau) z^T(s) = I_p \delta(\tau-s) + K(\tau-s)$ 이므로

$$\begin{aligned} K(t-s) = H(t, s) + \int_{t-T}^t H(t, \tau) K(\tau-s) d\tau, \\ t-T \leq s \leq t \end{aligned}$$

이고 이 식에서 변수치환을 하면

$$\begin{aligned} K(t) = H(t) + \int_0^T H(\tau) K(t-\tau) d\tau, \\ 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (28)$$

가 되어 필터의 임펄스 응답 H 는 Fredholm의 제 2종 적분방정식^[21]을 만족시킨다. 이것은 Volterra 적분방정식이 등장하는 표준 Wiener FIR 필터의 결과와 대조를 이룬다.^{[19][20]} 이때 Wiener FIR 필터는 선형 시불변 필터가 되며

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= \int_{t-T}^t H(t-\tau) z(\tau) d\tau \\ &= \int_0^T H(\tau) z(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

평가함수의 값은 식(27)의 구조를 지니는 필터중에서 최소가 된다.

$$J = E[\tilde{y}^T(t) \tilde{y}(t)] = \text{tr}[K(0) - \int_0^T H(\tau) K(\tau) d\tau]$$

만일 출력신호 y 가 다음과 같은 선형 시불변 시스템으로부터 발생된다고 하면

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\omega(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

단, x 와 ω 는 영평균 정상과정이며

$$E[x(t_0)x^T(t_0)] = P_0, E[\omega(t)\omega^T(s)] = Q\delta(t-s),$$

$$E[x(t)\omega^T(s)] = 0 \text{ 이고 시스템은 점근적으로 안정하며 제어가능함.}$$

y 의 자기상관함수 K 는 다음과 같다.

$$K(t, s) = E[y(t)y^T(s)] = \begin{cases} Ce^{A(t-s)}P(s)C^T, & t \geq s \\ C_p(t)e^{A^T(s-t)}C^T, & t < s \end{cases}$$

단, $P(t) = E[x(t)x^T(t)]$ 이며

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + BQB^T, P(t_0) = P_0$$

따라서,

$$K(t, s) = Ce^{At}P(0)e^{A^T s}C^T + C \int_0^{t \wedge s} e^{A(t-\tau)} BQB^T e^{A^T(s-\tau)} C^T C^T d\tau \quad (30)$$

$$\text{단, } P(0) = E[x(0)x^T(0)] = e^{-A^T t_0} P_0 e^{-A t_0} + \int_{t_0}^0 e^{-A\tau} BQB^T e^{-A^T \tau} d\tau$$

이며 정상과정이라는 가정으로부터 $t_0 \rightarrow -\infty$ 로 놓으면 K 가 정상적임을, 즉 $K(t, s) = K(t-s)$ 임을 알 수 있다. 이때 식(28)로부터

$$H(t, T) = K(t) - \int_0^T H(\tau, T) K(t-\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T \quad (31)$$

이므로 식(30), (31)에 Schumitzky의 초기치법^{[22][23]}을 적용시키면 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial T} H(t, T) = -H(t, T)CU^T(t, T), \quad H(t, t) = K(t) - W^T(t)C^T \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt} W(t) = [A - R(t)C^T C]W(t) + R(t)C^T K(t), \quad W(0) = 0 \quad (33)$$

$$\frac{d}{dt} R(t) = AR(t) + R(t)A^T - R(t)C^T CR(t) + BQB^T, \quad R(0) = P(0) \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} U(t, T) = U(t, T)[A - C^T CR(t)], \quad U(t, t) = -CR(t) \quad (35)$$

식(32)~(35)를 (34)→(35)→(33)→(32)의 순으로 풀면 구하고자 하는 필터의 임펄스 응답 H 를 구할 수 있다.

Wiener FIR 필터는 식(29)와 같이 선형 시불변 필터로서 그 구조는 간단하지만 임펄스 응답 H 를 구하기 위해 Fredholm 적분방정식을 풀어야 하는 문제가 남는다.^[22-25] 또한 이 필터는 비순환형이며 이에 대한 순환형의 알고리즘 유도는 남은 과제이다. 그리고 상태공간 모델이 주어졌을 때 식(30)~(35)로 표시되는 Wiener FIR 필터와 IV의 이동원도우 필터 또는 V의 이동구간 필터와의 관계 규명도 역시 남은 과제이다. 이산형 시스템의 경우 Wiener FIR 필터는 유한입력 유한출력((BIBO) 안정도가 보장되며 선형 위상응답 특성을 지닐 수 있는 등의 부수적인 장점을 지니게 된다.^{[12][30]-[32]} 그리고 식(28)은 다중채널 Yule-Walker 방정식이 되며 이에 대한 해법으로는 Levison 알고리즘과 Lattice 알고리즘 등 많은 방법이 제시되고 있다.^[5]

[26] - [29]

VI. 결 론

이상으로 유한구간 필터의 개념 및 대표적인 예를

살펴보았다. 이 중에서 유한기억 필터와 이동원도우 필터 및 이동구간 필터의 대상 시스템은 상태공간 모델로, Wiener FIR 필터에서의 대상 시스템은 자기상관 함수로써 표시된다. 유한기억 필터는 최대 가능성 추정자로서 잡음이 없는 시스템에만 적용되며 필터 알고리즘은 비순환형이다. 이동원도우 필터는 최소자승 추정자로서 Scattering 이론을 이용하여 알고리즘이 제시되고 있다. 이동구간 필터 역시 최소자승 추정자이며 이동구간 제어기와는 상대성에 의해 그 성질의 유추가 가능하다. 끝으로 Wiener FIR 필터도 최소자승 추정자로서 정상과정을 가정할 때 선형 시불변 필터가 되며 필터의 임펄스 응답은 Fredholm의 제 2종 적분방정식을 만족한다.

칼만 필터와 Wiener FIR 필터는 정상과정의 경우 서로 등가 관계임을 잘 알려져 있다.^{[2][5][19]} 그러나 본고에서 개관한 유한구간 필터들간에는 그 관계가 아직 규명되지 않고 있으며 이 관계 규명 및 각 필터 알고리즘의 계산상의 장단점과 필터 발산에 관한 계산기 시뮬레이션이 남은 과제이다.

참 고 문 헌

- [1] Kalman, R.E., "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Journal of Basic Engineering (ASME)*, vol. 82, pp. 35-45, Mar. 1960.
- [2] Anderson, B.D.O. and Moore, J.B., *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, pp. 129-164, 1979.
- [3] Gelb, A. ed., *Applied Optimal Estimation*. M.I.T. Press, pp. 277-314, 1974.
- [4] Wiener, N., *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, with Engineering Applications*, New York, Technology Press and Wiley, 1949.
- [5] Kailath, T., "A view of three decades of linear filtering theory," *IEEE Transaction on Information Theory*, vol. IT-20, no. 2, pp. 146-181, Mar. 1974.
- [6] Jazwinski, A.H., "Limited memory optimal Filtering," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-13, no. 5, pp. 558-563, Oct. 1968.
- [7] Jazwinski, A.H., *Stochastic Process and Filtering Theory*. Academic Press,

- New York, 1970.
- [8] Bruckstein, A.M. and Kailath, T., *The Unified Approach to State Space Estimation Problems*. ISL Report, Stanford University, 1982.
- [9] Kwon, W.H., Bruckstein, A.M. and Kailath, T., "Stabilizing state-feedback design via the moving horizon method," *Int. J. of Control*, March 1983.
- [10] 권옥현, 고명삼, 박기현, "Kalman filter with moving horizon," 대한전기학회지, 제29권 7호, 1980.
- [11] Chen, C.T., "On digital Wiener filter," *Proceedings of IEEE*, vol. 64, pp. 1736-1737.
- [12] Chen, C.T., *One Dimensional Digital Signal Processing*. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, pp. 408-430, 1979.
- [13] Ljung, L., Kailath, T. and Friedlander, B., "Scattering theory and linear least squares estimation - part I: continuous-time problems," *Proc. IEEE*, vol. 64, no. 1, pp. 131-139, Jan. 1976.
- [14] Friedlander, B., Kailath, T. and Ljung, L., "Scattering theory and linear least squares estimation - part II: discrete-time problems," *Journal of The Franklin Institute*, vol. 301, Nos. 1 and 2, pp. 71-82, Jan - Feb. 1976.
- [15] Verghese, G., Friedlander, B. and Kailath, T., "Scattering theory and linear least squares estimation - part III: the estimates," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-25, no. 4, pp. 794-802, Aug. 1980.
- [16] Kwon, W.H. and Pearson, A.E., "A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-22, no. 5, pp. 838-842, Oct. 1977.
- [17] Kwakernaak, H. and Sivan, R., *Linear Optimal Control System*, John Wiley & Sons, Inc., pp. 364-373, New York, 1972.
- [18] Åström, K.J., *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press, pp. 238-252, New York, 1970.
- [19] Sage, A.P. and Melsa, J.L., *Estimation Theory with Application to Communications and Control*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1971.
- [20] Meditch, J.S., *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1969.
- [21] Taylor, A.E., Lay, D.C., *Introduction to Functional Analysis*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., pp. 196-200, 1980.
- [22] Kagiwada, H.H., Kalaba, R.E. and Schumitzky, A., "An initial value method for fredholm integral equations," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 19, pp. 197-203, 1967.
- [23] Schumitzky, A., "On the equivalence between matrix riccati equations and fredholm resolvents," *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 2, pp. 76-87, 1968.
- [24] Kailath, T., "Fredholm Resolvents, Wiener-hopf equations, and riccati differential equations," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-15, no. 6, pp. 665-672, Nov. 1969.
- [25] Wing, G.M., "On certain fredholm integral equations reducible to initial value problems," *SIAM Rev.*, pp. 655-670, 9, 1967.
- [26] Friedlander, B., "Lattice filters for adaptive processing," *Proc. IEEE*, vol. 70, no. 8, pp. 829-867, Aug. 1982.
- [27] Goodwin, G.C. and Sin, K.S., *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. To be Published, pp. 435-449.
- [28] Friedlander, B., Kailath, T., Morf, M., and Ljung, L., "Extended levinson and chandrasekhar equations for general discrete time linear estimation problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-23, no. 4, pp. 653-659, Aug. 1978.
- [29] Makhoul, J., "Stable and efficient lattice

methods for linear prediction," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-25, no. 5, pp. 423-428, Oct. 1977.

[30] Oppenheim, A.V. and Schaffer, R.W., *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1975.

[31] Rabiner, L.R. and Gold, B., *Theory*

and Application of Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1975.

[32] Rabiner, L.R., Kaiser, J.F., Herrmann, O. and Dolan, M.T., "Some comparisons between FIR and IIR digital filters," *Bell System Technical Journal*, vol. 53, no.2, pp. 305-331, Feb. 1974. ***

略語解説

PL (pilot lamp ; 表示燈 (電氣·電子回路))

電氣回路, 機器에서 負荷, 運轉등의 상황을 표시하기 위해서 사용되는 小形電球등을 말한다.

PL (programed learning 프로그램 學習 (一般))

學生의 自習에 重點을 둔 訓練方法으로 教材로는 프로그램 텍스트와 티칭 미신이 있다. 前者가 教科書形式인데 대해서 後者は 컬러 슬라이드와 테이프 레코더등을 사용한다.

PL /1 (programming language 1; 피엘 원(데이터通信))

科學技術計算, 事務處理兩用으로 IBM 社에서 개발된 汎用프로그램言語이다.

PM (productive maintenance; 生産保全 (一般))

保全의 궁극적인 목표는 企業의 生産性 및 收益向上에 있다고 하는 생각에서 출발한 設備保全方法으로 豫防保全을 한걸음 넓힌 것이다. 設備의 重要度, 生産減에 의한 損失, 代贊設備의 有無, 保全의 投資效果등의 조건으로 豫防保全, 事後保全 나아가는 改良保全(設備의 改良)을 適宜選擇하여 計劃的, 組織的으로 保全을 하는 것이 生産保全의 特色이다.