資　料

Timoshenko보의 振動數方程式 및 基準函數
—集中質量의 영향을 포함하여—

郭 文 圭*・金 極 天**

Frequency and Normal Mode Equations of Timoshenko Beams
—Including Effects of a Concentrated Mass—

M.K. Kwak*, K.C. Kim**

1. 緒　言

均一斷面보의 橫振動에 대한 固有値 및 固有函數들은 보自體는 물론이고 보類推構造體, 板構造體등의 振動計算에 있어서 그 活用度가 높다. 例를들어 Young 등[1]*** 및 Bishop등[2]에 의하여 마련된 Euler보에 대한 表들이 널리 보급되어 활용되고 있다. Timoshenko 보에 대하여서는 Huang[3]이 單純支持, 固定 및 自由의 組合으로 이루어지는 여섯가지 基本境界條件에 대하여 解를 제시하였는데, 이 경우에는 Euler보와 비교하여 System Parameter로서 剪斷剛性과 回轉慣性이 추가되기 때문에 [1] 또는 [2]에 준하는 數値的資料를 마련하기 어렵다.

보 및 보類推構造體의 振動問題에 있어서 集中質量이 附加되는 경우 또는 어느정도의 附加分布質量을 集中質量으로 置換할 필요성이 있는 경우가 있다. 이와 같은 경우를 위하여 Chen[4], Pan[5]등이 集中質量 1개를 갖는 Euler보에 대한 解를 제시했고, Grant[6]가 集中質量 1개를 갖는 Timoshenko 보에 대하여 여섯가지 基本境界條件下에서의 振動數方程式과 單純—單純支持 때의 基準函數를 제시했다. 郭[7]은 Grant의 결과를 확장하여 餘他 基本境界條件에 대한 基準函數를 제시함과 아울러 여러개의 集中質量을 갖는 경우에 대한 固有振動數 近似推定方法으로서 Dunkerley方法의 有用性, 部分的 分布質量을 集中質量으로 置換하는 문제등에 대한 일련의 數値實驗的 檢討를 수행하였다. Grant 및 郭의 연구결과를 종합하여 한 資料로서 소개한다.

2. 記號定義

ρA : 보의 單位 길이당 質量
EI : 굽힘 剛性度
kAG : 剪斷剛性度
J : 單位 길이당 回轉慣性
L : 보의 길이
M : 集中質量의 크기
y : 橫變位
Y : 橫變位 基準函數
ψ : y의 기울기에 대한 굽힘寄與分
Ψ : Y의 기울기에 대한 굽힘寄與分
x : 길이 座標(原點：左端)
x_0 : 集中質量의 위치(原點：左端)
$u(\xi)$: unit step function
ω : 圓振動數

$$\xi = \frac{x}{L}$$

$$a = \frac{x_0}{L}$$

$$b^2 = \frac{\rho A}{EI} L^4 \omega^2$$

$$r^2 = \frac{J}{\rho A} L^{-2}$$

$$s^2 = \frac{EI}{kAG} L^{-2}$$

$$m = \frac{M}{\rho A L}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\mp(r^2+s^2)+\left\{(r^2-s^2)^2+\frac{4}{b^2}\right\}^{1/2}\right]}$$

接受日字：1983年 7月 28日, 再接受日字：1983年 8月 29日
* 正會員：서울大 大學院, ** 正會員：서울大 工大
*** [ ] 內數字는 本文末尾에 紹介한 參考文獻 番號임.

3. 振動數方程式 및 基準函數：附加集中質量 1개의 영향포함

$b^2r^2s^2<1$ 일때와 $b^2r^2s^2>1$ 일때의 두 解系가 있으나, 後者의 경우는 실용성이 희박함으로 생략한다.

여기에 주어진 식들에서 $m=0$로 취하면 集中質量이 附加되지 않은 경우로서 Huang[3]의 解와 일치하고, $r=s=0$, $m=m$로 취하면 附加集中質量 1個를 갖는 Euler 보로 귀착된다.

3.1. 振動數方程式[6]

(a) 單純支持—單純支持

$$\sinh b\alpha \ \sin b\beta+m\alpha b\frac{\zeta}{1+\zeta}\left[\sinh b\alpha a \ \sinh b\alpha(1-a) \ \sin b\beta-\frac{1}{\lambda\zeta} \sinh b\alpha \ \sin b\beta a \ \sin b\beta(1-a)\right]=0 \tag{1}$$

(b) 自由—自由

$$\begin{aligned}
&2-2\cosh b\alpha \ \cos b\beta+\frac{b}{\sqrt{1-b^2r^2s^2}}\left[3r^2-s^2+b^2r^2(r^2-s^2)^2\right] \sinh b\alpha \ \sin b\beta\\
&+m\alpha b\frac{\zeta}{1+\zeta}\left\{\frac{2}{\lambda} \cosh b\alpha(1-a) \ \sin b\beta(1-a)-\frac{2}{\zeta} \sinh b\alpha(1-a) \ \cos b\beta(1-a)\right.\\
&+\left[\sinh b\alpha(1-a)+\frac{1}{\lambda} \sin b\beta(1-a)\right]\left[\frac{1}{\zeta}\cosh b\alpha \ \cos b\beta a-\frac{\lambda}{\zeta} \sinh b\alpha a \ \sin b\beta\right.\\
&\left.-\frac{1}{\lambda} \sinh b\alpha \ \sin b\beta a-\cosh b\alpha a \ \cos b\beta\right]\\
&+\left[\cosh b\alpha(1-a)+\frac{1}{\zeta} \cos b\beta(1-a)\right]\left[-\frac{1}{\zeta} \sinh ba \ \cos b\beta a+\frac{\zeta}{\lambda} \cosh b\alpha a \ \sin b\beta\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{\lambda} \cosh b\alpha \ \sin b\beta a-\sinh b\alpha a \ \cos b\beta\right]\right\}=0
\end{aligned} \tag{2}$$

(c) 固定—固定

$$\begin{aligned}
&2-2\cosh b\alpha \cos b\beta+\frac{b}{\sqrt{1-b^2r^2s^2}}\left[3s^2-r^2+b^2s^2 \ (r^2-s^2)^2\right]\sinh b\alpha \ \sin b\beta\\
&+m\alpha b\frac{\zeta}{1+\zeta}\left\{2 \sinh b\alpha(1-a) \ \cos b\beta(1-a)-\frac{2}{\lambda\zeta} \cosh b\alpha(1-a) \ \sin b\beta(1-a)\right.\\
&+\left[\cosh b\alpha(1-a)-\cos b\beta(1-a)\right]\left[\frac{1}{\lambda\zeta} (\cosh b\alpha a \ \sin b\beta-\cosh b\alpha \ \sin b\beta a)\right.\\
&\left.+\sinh ba \ \cos b\beta a-\sinh b\alpha a \ \cos b\beta\right]\\
&-\left[\sinh b\alpha (1-a)-\frac{1}{\lambda\zeta}\sin b\beta(1-a)\right]\left[\cosh b\alpha a \ \cos b\beta+\cosh b\alpha \ \cos b\beta a\right.\\
&\left.\left.-\frac{1}{\lambda\zeta} \sinh b\alpha \ \sin b\beta a+\lambda\zeta \sinh b\alpha a \ \sin b\beta\right]\right\}=0
\end{aligned} \tag{3}$$

(d) 固定—自由

$$\begin{aligned}
&2-\frac{b(r^2+s^2)}{\sqrt{1-b^2r^2s^2}} \sinh b\alpha \ \sin b\beta+\left[2+b^2 \ (r^2-s^2)^2\right] \cosh b\alpha \ \cos b\beta\\
&+m\alpha b\frac{\zeta}{1+\zeta}\left\{\frac{2}{\lambda} \cosh b\alpha(1-a) \ \sin b\beta(1-a)-\frac{2}{\zeta} \sin b\alpha(1-a) \ \cos b\beta(1-a)+\left[\cosh b\alpha(1-a)\right.\right.\\
&\left.+\frac{1}{\zeta} \cos b\beta(1-a)\right]\left[\sinh b\alpha \ \cos b\beta a+\zeta \sinh b\alpha a \ \cos b\beta+\frac{1}{\lambda\zeta} \cosh b\alpha \ \sin b\beta a-\frac{1}{\lambda} \cosh b\alpha a \ \sin b\beta\right]\\
&+\left[\sinh b\alpha(1-a)+\frac{1}{\lambda} \sin b\beta(1-a)\right]\left[-\cosh b\alpha \ \cos b\beta a+\lambda \sinh b\alpha a \ \sin b\beta\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{\lambda\zeta} \sinh b\alpha \ \sin b\beta a+\frac{1}{\zeta} \cosh b\alpha a \ \cos b\beta\right]\right\}=0
\end{aligned} \tag{4}$$

(e) 固定—單純支持

$$\begin{aligned}
&\cosh b\alpha \ \sin b\beta-\lambda\zeta \sinh b\alpha \ \cos b\beta+m\alpha b\frac{\zeta}{1+\zeta}\left\{-2 \sinh b\alpha(1-a) \ \sin b\beta(1-a)\right.\\
&+\sinh b\alpha(1-a) \ \left[\cosh b\alpha a \ \sin b\beta-\lambda\zeta \sinh b\alpha a \ \cos b\beta\right]
\end{aligned}$$

$$-\sin b\beta(1-a)\Big[\frac{1}{\lambda\zeta}\cosh b\alpha\ \sin b\beta a-\sinh b\alpha\ \cos b\beta a\Big]\Big\}=0 \tag{5}$$

(f) 單純支持—自由

$$\zeta\cosh b\alpha\ \sin b\beta-\lambda\sinh b\alpha\ \cos b\beta+m\alpha b\frac{\zeta}{1+\zeta}\Big\{\Big[\zeta\cosh b\alpha(1-a)+\cos b\beta(1-a)\Big]\Big[\sinh b\alpha a\ \sin b\beta$$
$$+\frac{1}{\zeta}\sinh b\alpha\ \sin b\beta a\Big]-\Big[\lambda\sinh b\alpha(1-a)+\sin b\beta\ (1-a)\Big]$$
$$\times\Big[\sinh b\alpha a\ \cos b\beta+\frac{1}{\lambda}\cosh b\alpha\ \sin b\beta\alpha\Big]\Big\}=0 \tag{6}$$

여기서

$\lambda=\alpha/\beta,\ \zeta=(\beta^2-s^2)/(\beta^2-r^2)=(\alpha^2+r^2)/(\alpha^2+s^2)$

3.2 基準函數[6,7]

(a) 單純支持—單純支持

$$Y(\xi)=\frac{m\alpha L}{b(\beta^2-r^2)(\alpha^2+\beta^2)}\Big\{\Big[\frac{1-b^2r^2s^2}{\alpha}\sinh b\alpha a-\frac{1-b^2r^2s^2}{\beta}\sin b\beta a\Big]$$
$$+\Gamma\Big[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\sinh b\alpha a+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\sin b\beta a\Big]\Big\}\Big\{u(\xi-a)\ \Big[\sinh\ b\alpha(\xi-a)-\frac{1}{\lambda\zeta}\sin\ b\beta(\xi-a)\Big]$$
$$-\sinh b\alpha\xi\frac{\sinh b\alpha(1-a)}{\sinh b\alpha}+\frac{1}{\lambda\zeta}\sin b\beta\xi\frac{\sin b\beta(1-a)}{\sin b\beta}\Big\} \tag{7}$$

$$\Psi(\xi)=\frac{m}{(\alpha^2+\beta^2)}\Big\{\Big[\frac{1-b^2r^2s^2}{\alpha}\sinh b\alpha a-\frac{1-b^2r^2s^2}{\beta}\sin b\beta a\Big]$$
$$+\Gamma\Big[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\sinh b\alpha a+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\sin b\beta a\Big]\Big\}\Big\{u(\xi-a)\ \Big[\cosh b\alpha(\xi-a)-\cos b\beta(\xi-a)\Big]$$
$$-\cosh b\alpha\xi\frac{\sinh b\alpha(1-a)}{\sinh b\alpha}+\cos b\beta\xi\frac{\sin b\beta(1-a)}{\sin b\beta}\Big\} \tag{8}$$

여기서

$$\Gamma=\Big\{\Big[\frac{1-b^2r^2s^2}{\alpha}\sinh b\alpha-\frac{1-b^2r^2s^2}{\beta}\sin b\beta\Big]+\frac{m}{b(a^2+\beta^2)}\Big[\frac{\alpha}{\beta^2-r^2}\sinh ba(1-a)$$
$$-\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\sin b\beta(1-a)\Big]\Big[\frac{1-b^2r^2s^2}{\alpha}\sinh b\alpha a-\frac{1-b^2r^2s^2}{\beta}\sin b\beta a\Big]\Big\}$$
$$\Big/\Big\{\Big[\frac{-\alpha}{\beta^2-s^2}\sinh b\alpha+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\sin b\beta\Big]+\frac{m}{b(\alpha^2+\beta^2)}\Big[\frac{\alpha}{\beta^2-r^2}\sinh b\alpha(1-a)$$
$$-\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\sin b\beta(1-a)\Big]\Big[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\sinh b\alpha a+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\sin b\beta a\Big]\Big\}$$

(b) 自由—自由

$$Y(\xi)=\frac{L}{\alpha^2+\beta^2}\Big\{\frac{\beta}{b}\Big[\lambda\sinh b\alpha\xi+\sin b\beta\xi\Big]+\Gamma(\beta^2-r^2)\Big[\zeta\cosh b\alpha\xi+\cos b\beta\xi\Big]$$
$$+mb\beta\frac{1}{1+\zeta}\Big[\frac{\beta}{b}\ \Big[\lambda\sinh b\alpha a+\sin b\beta a\Big]+\Gamma(\beta^2-r^2)\Big[\zeta\cosh b\alpha a+\cos b\beta a\Big]\Big]$$
$$\times u(\xi-a)\ \Big[\lambda\zeta\sinh b\alpha(\xi-a)-\sin b\beta(\xi-a)\Big]\Big\} \tag{9}$$

$$\Psi(\xi)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\Big\{\frac{1}{b^2(\beta^2-s^2)}\ \Big[\cosh b\alpha\xi+\zeta\ \cos b\beta\xi\Big]+\frac{\Gamma}{b\alpha}\ \Big[\sinh b\alpha\xi-\lambda\ \sin b\beta\xi\Big]$$
$$+\frac{m}{\alpha^2+\beta^2}\Big[\frac{\beta}{b}\Big[\lambda\sinh b\alpha a+\sin b\beta a\Big]+\Gamma(\beta^2-s^2)\ \Big[\cosh b\alpha a+\zeta\ \cos b\beta a\Big]\Big]$$
$$\times u(\xi-a)\ \Big[\cosh b\alpha(\xi-a)-\cos b\beta(\xi-a)\Big]\Big\} \tag{10}$$

여기서

$$\Gamma=-\Big\{\frac{\beta}{b(\beta^2-s^2)}\Big[\lambda\sinh b\alpha-\zeta\ \sin b\beta\Big]+\frac{m\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\Big[\lambda\sinh b\alpha(1-a)$$

$$+\sin b\beta(1-a)\Big]\Big[\lambda\ \sinh b\alpha a+\sin b\beta a\Big]\Big\}\Big/\Big\{\Big[\cosh b\alpha-\cos b\beta\Big]$$

$$+\frac{mb\beta(\beta^2-r^2)}{\alpha^2+\beta^2}\Big[\lambda\ \sinh b\alpha(1-a)+\sin b\beta(1-a)\Big]\Big[\zeta\ \cosh b\alpha a+\cos b\beta a\Big]\Big\}$$

(c) 固定一固定

$$Y(\xi)=\frac{L}{\alpha^2+\beta^2}\Big\{\frac{1}{b^2}\Big[\cosh b\alpha\xi-\cos b\beta\xi\Big]+\frac{\Gamma}{s^2b^3}\Big[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\ \sinh b\alpha\xi+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\ \sin b\beta\xi\Big]$$

$$+\frac{m}{b^3(\alpha^2+\beta^2)}\Big[(\cosh b\alpha a-\cos b\beta a\Big]+\frac{\Gamma}{s^2b}\Big[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\ \sinh b\alpha a+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\ \sin b\beta a\Big]\Big]$$

$$\times u(\xi-a)\Big[\frac{\alpha}{\beta^2-r^2}\ \sinh b\alpha\ (\xi-a)-\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\ \sin b\beta(\xi-a\Big]\Big\}\qquad(11)$$

$$\Psi(\xi)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\Big\{\frac{1}{b}\Big[\frac{\beta^2-r^2}{\alpha}\ \sinh b\alpha\xi+\frac{\beta^2-s^2}{\beta}\ \sin b\beta\xi\Big]+\frac{\Gamma}{s^2b^2}\Big[-\cosh b\alpha\xi+\cos b\beta\xi\Big]$$

$$+\frac{m}{b^2(\alpha^2+\beta^2)}\Big[\Big[\cosh b\alpha a-\cos b\beta a\Big]+\frac{\Gamma}{s^2b}\Big[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\ \sinh b\alpha a+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\ \sin b\beta a\Big]\Big]$$

$$\times u(\xi-a)\ \Big[\cosh\ b\alpha(\xi-a)-\cos b\beta(\xi-a)\Big]\Big]\qquad(12)$$

여기서

$$\Gamma=-\Big\{\frac{\beta^2-r^2}{\alpha}\Big[\sinh b\alpha+\lambda\zeta\ \sin b\beta\Big]+\frac{m}{b(\alpha^2+\beta^2)}\Big[\cosh b\alpha a-\cos b\beta a\Big]$$

$$\times\Big[\cosh b\alpha(1-a)-\cos b\beta(1-a)\Big]\Big\}\Big/\Big\{\frac{1}{s^2b}\Big[-\cosh b\alpha+\cos b\beta\Big]$$

$$+\frac{m\beta}{s^2bs(\alpha^2+\beta^2)(\beta-s^2)}\Big[-\lambda\zeta\ \sinh b\alpha a+\sin b\beta a\Big]\Big[\cosh b\alpha(1-a)-\cos b\beta(1-a)\Big]\Big\}$$

(d) 固定一自由

$$Y(\xi)=\frac{L}{\alpha^2+\beta^2}\Big\{\frac{1}{b^2}\Big[\cosh b\alpha\xi-\cos b\beta\xi\Big]+\frac{\Gamma}{s^2b^3}\Big[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\ \sinh b\alpha\xi+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\ \sin b\beta\xi\Big]$$

$$+\frac{m}{b^3(\alpha^2+\beta^2)}\Big[\Big[\cosh b\alpha a-\cos b\beta a\Big]+\frac{\Gamma}{s^2b}\Big[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\ \sinh b\alpha a+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\ \sin b\beta a\ \Big]\Big]$$

$$\times u(\xi-a)\Big[\frac{\alpha}{\beta^2-r^2}\ \sinh b\alpha(\xi-a)\ -\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\ \sin\ b\beta\ (\xi-a)\Big]\Big\}\qquad(13)$$

$$\Psi(\xi)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\Big\{\frac{1}{b}\Big[\frac{\beta^2-r^2}{\alpha}\ \sinh b\alpha\xi+\frac{\beta^2-s^2}{\beta}\sin\beta b\xi\Big]+\frac{\Gamma}{s^2b^2}\Big[-\cosh b\alpha\xi+\cos b\beta\xi\Big]$$

$$+\frac{m}{b^2(\alpha^2+\beta^2)}\Big[\Big[\cosh b\alpha a-\cos b\beta a\Big]+\frac{\Gamma}{s^2b}\Big[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\ \sinh b\alpha a+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\ \sin b\beta a\Big]\Big]$$

$$\times u(\xi-a)\ \Big[\cosh b\alpha(\xi-a)-\cos b\beta(\xi-a)\Big]\Big\}\qquad(14)$$

여기서

$$\Gamma=\Big\{(\beta^2-r^2)\ \Big[\cosh b\alpha+\zeta\ \cos b\beta\Big]+\frac{m\beta}{b(\alpha^2+\beta^2)}\Big[\lambda\ \sinh b\alpha(1-a)$$

$$+\sin b\beta(1-a)\Big]\Big[\cosh b\alpha a-\cos b\beta a\Big]\Big\}\Big/\Big\{\frac{\beta}{s^2b}\Big[\lambda\ \sinh b\alpha+\sin b\beta\ \Big]$$

$$-\frac{m\beta^2}{s^2b^2(\alpha^2+\beta^2)(\beta^2-s^2)}\Big[\lambda\ \sinh b\alpha(1-a)+\sin b\beta(1-a)\Big]\ \Big[-\lambda\zeta\ \sinh b\alpha a+\sin b\beta a\Big]\Big\}$$

(e) 固定一單純支持

$$Y(\xi)=\frac{L}{\alpha^2+\beta^2}\Big\{\frac{1}{b^2}\Big[\cosh b\alpha\xi-\cos b\beta\xi\Big]+\frac{\Gamma}{s^2b^3}\Big[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\ \sinh b\alpha\xi+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\ \sin b\beta\xi\Big]$$

$$+\frac{m}{b^3(\alpha^2+\beta^2)}\Big[\Big[\cosh b\alpha a-\cos b\beta a\Big]+\frac{\Gamma}{s^2b}\Big[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\ \sinh b\alpha a+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\ \sin b\beta a\Big]\Big]$$

$$\times u(\xi-a)\Big[\frac{\alpha}{\beta^2-r^2}\ \sinh b\alpha(\xi-a)-\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\ \sin b\beta(\xi-a)\Big]\Big\}\qquad(15)$$

$$\Psi(\xi)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\frac{1}{b}\left[\frac{\beta^2-r^2}{\alpha}\sinh b\alpha\xi+\frac{\beta^2-s^2}{\beta}\sin b\beta\xi\right]+\frac{\Gamma}{s^2b^2}\left[-\cosh b\alpha\xi+\cos b\beta\xi\right]\right.$$
$$+\frac{m}{b^2(\alpha^2+\beta^2)}\left[\left[\cosh b\alpha a-\cos b\beta a\right]+\frac{\Gamma}{s^2b}\left[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\sinh b\alpha a+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\sin b\beta a\right]\right]$$
$$\left.\times u(\xi-a)\left[\cosh b\alpha(\xi-a)-\cos b\beta(\xi-a)\right]\right\} \tag{16}$$

여기서

$$\Gamma=\left\{(\beta^2-r^2)\left[\cosh b\alpha+\zeta\cos b\beta\right]+\frac{m\beta}{b(\alpha^2+\beta^2)}\left[\lambda\sinh b\alpha(1-a)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sin b\beta(1-a)\right]\left[\cosh b\alpha a-\cos b\beta a\right]\right\}\Big/\left\{\frac{\beta}{s^2b}\left[\lambda\sinh b\alpha+\sin b\beta\right]\right.$$
$$\left.-\frac{m\beta^2}{s^2b^2(\alpha^2+\beta^2)(\beta^2-s^2)}\left[\lambda\sinh b\alpha(1-a)+\sin b\beta(1-a)\right]\left[-\lambda\zeta\sinh b\alpha a+\sin b\beta a\right]\right\}$$

(f) 單純一自由

$$Y(\xi)=\frac{L}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\frac{1}{s^2b^3}\left[\frac{1-b^2r^2s^2}{\alpha}\sinh b\alpha\xi-\frac{1-b^2r^2s^2}{\beta}\sin b\beta\xi\right]\right.$$
$$+\frac{\Gamma}{s^2b^3}\left[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\sinh b\alpha\xi+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\sin b\beta\xi\right]$$
$$+\frac{m}{s^2b^4(\alpha^2+\beta^2)}\left[\left[\frac{1-b^2r^2s^2}{\alpha}\sinh b\alpha a-\frac{1-b^2r^2s^2}{\beta}\sin b\beta a\right]\right.$$
$$\left.+\Gamma\left[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\sinh b\alpha a+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\sin b\beta a\right]\right]u(\xi-a)\left[\frac{\alpha}{\beta^2-r^2}\sinh b\alpha(\xi-a)\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\sin b\beta(\xi-a)\right]\right\} \tag{17}$$

$$\Psi(\xi)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\frac{1}{s^2b^2}\left[\frac{\beta^2}{\beta^2-s^2}\cosh b\alpha\xi-\frac{\alpha^2}{\beta^2-r^2}\cos b\beta\xi\right]+\frac{\Gamma}{s^2b^2}\left[-\cosh b\alpha\xi+\cos b\beta\xi\right]\right.$$
$$+\frac{m}{s^2b^3(\alpha^2+\beta^2)}\left[\left[\frac{1-b^2r^2s^2}{\alpha}\sinh b\alpha a-\frac{1-b^2r^2s^2}{\beta}\sin b\beta a\right]\right.$$
$$\left.\left.+\Gamma\left[\frac{-\alpha}{\beta^2-r^2}\sinh b\alpha a+\frac{\beta}{\beta^2-s^2}\sin b\beta a\right]\right]u(\xi-a)\left[\cosh b\alpha(\xi-a)-\cos b\beta(\xi-a)\right]\right\} \tag{18}$$

여기서

$$\Gamma=\left\{\frac{\alpha\beta^2}{\beta^2-s^2}\left[\sinh b\alpha+\lambda\zeta\sin b\beta\right]+\frac{mb\alpha\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}\left[\lambda\sinh b\alpha(1-a)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sin b\beta(1-a)\right]\left[\sinh b\alpha a-\lambda\sin b\beta a\right]\right\}\Big/\left\{\beta\left[\lambda\sinh b\alpha+\sin b\beta\right]\right.$$
$$\left.-\frac{m\beta^2}{b(\alpha^2+\beta^2)(\beta^2-s^2)}\left[\lambda\sinh b\alpha(1-a)+\sin b\beta(1-a)\right]\left[-\lambda\zeta\sinh b\alpha a+\sin b\beta a\right]\right\}$$

4. 参考事項

4.1. 附加集中質量이 여러개 있을 경우

集中質量이 여러개 있는 경우에 대하여서는 嚴密解를 구하기 어려운데, 固有振動數와 近似推定을 위하여서는 振動數合成法 즉, Dunkerley方法을 원용할 수 있다. 즉, 集中質量 n개를 갖는 보의 固有圓振動數는 다음과 같이 推定할 수 있다.

$$\frac{1}{\omega^2}\cong\frac{1}{\omega_0^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_{c_i}^2}$$
$$=\frac{1}{\omega_0^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_0^2}{\omega_{m_i}^2}-n+1\right] \tag{19}$$

여기서

ω : 集中質量 n個를 갖는 보의 固有圓振動數

ω_0 : 보自體의 固有圓振動數

ω_{c_i} : 보自體의 質量을 무시한 集中質量 1개인 경우의 固有圓振動數

ω_{m_i} : 보와 集中質量 1개를 포함한 경우의 固有圓振動數

兩端自由*인 鋼棒($G/E=3/8$, $r=0.04$, $s=0.072$)의 2節 및 3節 固有振動數를 상기 방법으로 계산하고 이를 有限差分法에 의한 계산치와 비교한 결과는 다음과 같다. 즉, $m=0.1$인 集中質量이 $a=0.25$, 0.50, 0.75 위치에 있을때 兩者의 差가 0.3%이하, 같은 크기의 集中質量이 $a=0$, 0.25, 0.50, 0.75 및 1.0 위치에 있을때 兩者의 差가 4%이하이다.

4.2. 部分的 分布質量의 置換

앞節에서 기술한 보에 대하여 $m=0.1$에 해당하는 附加質量이 길이 $L/4$에 걸쳐서 均一하게 分布하였을 때 및 $m=1.0$에 해당하는 附加質量이 길이 $L/10$에 걸쳐서 均一하게 分布하였을 때 이들을 單一集中質量으로 치환하여 2,3,4節 固有振動數를 계산하고 이를 有限差分法에 의한 계산치와 비교한 결과 兩者間의 差가 3% 이하임이 확인되었다.

參 考 文 獻

[1] Young, D. et al., *Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam*, The University of Texas Publication No. 4913, 1949.

[2] Bishop, R.E.D. et al., *Vibration Analysis Tables*, Cambridge University Press, 1955.

[3] Huang, T.C., "The Effect of Rotary Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 28, No. 4, ASME, 1961.

[4] Chen, Y., "On the Vibration of Beams or Rods Carrying a Concentrated Mass", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 30, ASME, 1963.

[5] Pan, H.H.," Transverse Vibration of an Euler-Bernoulli Beam Carrying a System of Heavy Bodies", *Journal of Applied Mechanics*, Vol, 32, ASME, 1965.

[6] Grant, D.A., "The Effect of Rotary Inertia and Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams Carrying a Concentrated Mass", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 57, No. 3, Academic Press Inc., Ltd., 1978.

[8] 郭文圭, "Timoshenko보 類推 構造體에 있어서 集中質量이 固有振動特性에 미치는 영향", 서울大工大 碩士學位論文, 1982.

* 試算例로서 兩端自由인 보를 택한 것은 船體에의 응용을 위한 예비검토였기 때문이다.