論文 83-20-2-3

二進 一次 Markov 情報源의 엔트로피에 관한 研究

(A Study on the Entropy of Binary First Order Markov Information Source)

宋 翊 鎬* 安 秀 桔**

(Iick Ho SONG and Souguil ANN)

要 約

本 論文에서는 二進 一次 Markov 情報源에서 하나의 條件付 確率이 주어졌을 때, 엔트로피(entropy)를 最大로 하기 위한 나머지의 條件付 確率(PFME; probability for maximum entropy)과 그때의 엔트로피를 구했다.

또한, 平衡 狀態 確率이 一定할 때 條件付 確率의 변화가 엔트로피에 미치는 影響도 함께 考察하였다.

Abstract

In this paper, we obtained PFME (probability for maximum entropy) and entropy when a conditional probability was given in a binary first order Markov Information Source.

And, when steady state probability was constant, the influence of change of a conditional probability on entropy was examined, too.

I. 序 論

一定한 記號 集合 $S = \{s_1, s_2, \cdots\cdots s_n\}$ 을 가지고, 이로부터 一連의 記號를 내는 數學的 모델을 情報源이라 한다.[1],[3]

情報源 가운데서 各 記號의 發生이 統計學的으로 獨立인 것을 無記憶 情報源, 各 記號의 發生 確率이 그 以前의 m개의 記號에 의해 주어지는 것을 m次 Markov 情報源이라 하고, 이들의 엔트로피는 各各

$$H(S) \triangleq \sum_{i=1}^{n} P_i \log \frac{1}{P_i} \qquad (1)$$

$$H(S) \triangleq \sum_{S^{m+1}} P(s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jm}, s_i) \times$$

$$\log \frac{1}{P(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \cdots s_{jm})} \qquad (2)$$

로 주어진다.[1], [2], [6]

단,

$$\lim_{P \to 0} P \log P = 0 \qquad (3a)$$

이므로

$$0 \log 0 \triangleq 0 \qquad (3b)$$

으로 하고, 별다른 말이 없으면 對數의 밑수는 2로 하며, 自然 對數는 "ln"으로 쓴다. (윗 式 (2)에서, S^*는 S의 n개의 元素 중에서 k개를 뽑는 重複順列의 모든 경우를 元素로 하는 集合이다.)[1], [3]

한편, Markov 情報源에서 한 記號가 發生되기 바로 前의 m개의 記號를 狀態라하며, 이 狀態들 사이의 遷移를 보여 주는 그림을 狀態圖라 한다.[1],[2]

*準會員, **正會員, 서울大學校 工科大學 電子工學科
(Dept. of Electronics Eng., Seoul National Univ.)
接受日字 : 1982年 9月 28日

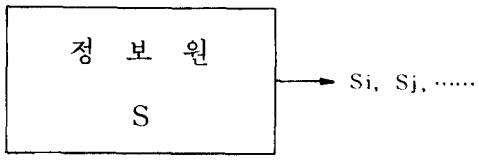


그림 1. 情報源
Fig. 1. An information source.

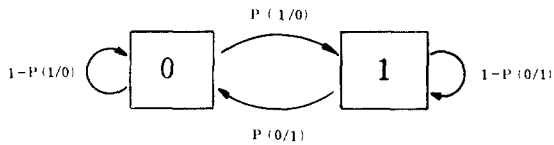


그림 2. 二進 一次 Markov 情報源의 상태도
Fig. 2. State diagram of a binary first order Markov information source.

이 論文에서는 두 條件付 確率 p (0/1), p (1/0) 로 決定되는 二進 一次 Markov 情報源에서,

1) 한 條件付 確率이 주어진 경우, 나머지 하나의 변화에 따른 엔트로피의 分布를 調査하고,

2) 한 平衡狀態 確率이 주어진 경우, 條件付 確率과 엔트로피의 關係를 살피고,

3) 境界 엔트로피(한 平衡狀態 確率이 주어졌을 때, 條件付 確率이 취할 수 있는 最大값에서의 엔트로피)의 分布를 調査한다.

Ⅱ. 二進 一次 Markov 情報源에서의 PFME와 엔트로피

1. 한 條件付 確率이 주어진 경우

二進 無記憶 情報源인 경우, 最大 엔트로피는 $p(0)=p(1)=0.5$ 일때, 1 (bit) 이다.

그러나, Markov 情報源에서의 樣相은 복잡하다. 아래의 二進 一次 Markov 情報源의 狀態圖에서,

$$p(1/0)=\alpha$$
$$p(0/1)=\beta \qquad (4)$$

라 하면, 두 平衡 狀態 確率은 각각

$$p(0)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$$
$$p(1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad (5)$$

가 된다.

그러므로,

$$H(S)=\frac{1}{\alpha+\beta}[(1-\alpha)\beta\log(1-\alpha)+\alpha\beta\log\alpha\beta+(1-\beta)\alpha\times\log(1-\beta)] \qquad (6)$$

가 된다.

한 條件付 確率이 一定할 때 H (S)를 最大로 하는 다른 條件付 確率을 구하기 위해 H (S)를 β에 대해서 미분하면,

$$\frac{\partial H(S)}{\partial\beta}=\frac{-\alpha}{(\alpha+\beta)^2\ln 2}\cdot f(\beta) \qquad (7)$$

를 얻는다.

여기서,

$$f(\beta)=(1-\alpha)\ln(1-\alpha)+\alpha\ln(\alpha\beta)-(\alpha+1)\ln(1-\beta) \qquad (8)$$

이다.

그런데 구간 $0<\beta<1$에서 $f'(\beta)>0$이고,

$$\lim_{\beta\to 0}f(\beta)=-\infty,\quad \lim_{\beta\to 1}f(\beta)=\infty \qquad (9)$$

이므로, 구간 $0<\beta<1$에 $f(\beta)=0$를 만족하는 β는 유일하게 存在한다.

이때, $f(\beta)=0$를 만족하는 해를 β_{max}라고 하면,

$$\frac{\partial H(S)}{\partial\beta}=\frac{-\alpha}{(\alpha+\beta)^2\ln 2}f(\beta)>0,$$

$$0<\beta<\beta_{max}$$

$$\frac{\partial H(S)}{\partial\beta}=\frac{-\alpha}{(\alpha+\beta)^2\ln 2}f(\beta)<0,$$

$$\beta_{max}<\beta<1$$

이므로 H (S)는 $\beta=\beta_{max}$에서 최대값을 가진다.

또한

$$\lim_{\alpha\to 0}f(\beta)=\lim_{\alpha\to 0}[(1-\alpha)\ln(1-\alpha)+\alpha\ln(\alpha\beta)-(\alpha+1)\ln(1-\beta)]$$
$$=-\ln(1-\beta)$$

이므로

$$\lim_{\alpha \to 0} \beta\max = 0 \tag{10}$$

이다. 또한, $\beta\max$ 는 $f(\beta\max) = 0$ 의 解이므로

$$(1-\alpha)\ln(1-\alpha) + \alpha\ln\alpha\beta\max$$

$$= (\alpha+1)\ln(1-\beta\max)$$

이며, 이 식을 (6)식에 대입하면

$$\lim_{\beta \to \beta\max} H(S) = \frac{-1}{\alpha+\beta\max}[(\alpha+1)\beta\max \times$$

$$\log(1-\beta\max) + (1-\beta\max)\alpha\log(1-\beta\max)]$$

$$= -\log(1-\beta\max)$$

가 된다. 따라서,

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to \beta max}} H(S) = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta_{max} \to 0}} H(S) = 0 \tag{11}$$

이다.

한편,

$$\lim_{\alpha \to 1} f(\beta) = \ln\beta - 2\ln(1-\beta)$$

에서 $\lim_{\alpha \to 1} \beta\max = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$$= 0.38197 \tag{12a}$$

이다. (6)식과 (12a) 식에서,

$$\lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \beta \to \beta max}} H(S) = \lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \beta_{max} \to \frac{3-\sqrt{5}}{2}}} H(S)$$

$$= \lim_{\beta_{max} \to \frac{3-\sqrt{5}}{2}} \frac{1}{1+\beta_{max}}[\beta_{max}\log\beta_{max}$$

$$+ (1-\beta_{max})\log(1-\beta_{max})]$$

$$= 0.69424 \tag{12b}$$

를 얻는다.

2. 한 平衡 狀態 確率이 주어진 경우

다음에,

$$p(1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = k,\ 0<k<1 \tag{13}$$

이 주어졌을 때, β의 변화가 엔트로피에 미치는 영향을 考察해 보자.

$$\alpha = \frac{k}{1-k}\beta \tag{14}$$

이므로 (6)식에서,

$$H(S) = -[(1-k-k\beta)\log\frac{1-k-k\beta}{1-k}$$

$$+ k\beta\log\frac{k\beta^2}{1-k} + k(1-\beta)\log(1-\beta)] \tag{15}$$

$$\frac{dH(S)}{d\beta} = -k \cdot g(\beta) \tag{16}$$

이 된다. 여기서, $g(\beta) = \frac{k\beta^2}{(1-\beta)(1-k-k\beta)}$

이다.

이때, $\frac{dH(\cdot S)}{d\beta} = 0$

의 解를 β_{max}라 하면,

$$\beta_{max} = 1-k \tag{17}$$

이 되고, 식 (14)에서

$$\alpha_{max} = \frac{k}{1-k}\beta_{max} = k \tag{18}$$

이 된다.

그런데, 구간 $0<\beta<1$에서 $g'(\beta)>0$ 이고,

$$\lim_{\beta \to 0}\frac{dH(S)}{d\beta} = \infty,\ \lim_{\beta \to 1}\frac{dH(S)}{d\beta} = -\infty$$

이므로 $H(S)$는 $\beta = \beta_{max} = 1-k$ 일 때 最大가 된다.

즉, (15)식에 $\beta = 1-k$ 를 대입하면,

$$H(S)_{max} = -[(1-k)^2\log(1-k)$$

$$+ k(1-k)\log k(1-k)$$

$$+ k^2\log k]$$

$$= -[(1-k)\log(1-k)$$

$$+ k\log k] \tag{19}$$

가 된다.

한편,

$$0 < \alpha = \frac{k\beta}{1-k} < 1$$

에서

$$0 < \beta < \frac{1}{k} - 1 \qquad (20)$$

을 구할 수 있는데, 確率의 定義에서,

$$0 < \beta < 1 \qquad (21)$$

이므로, (20), (21)을 간단히 다음과 같이 쓰자.

$$0 < \beta < \beta_{per} \qquad (22\,a)$$

$$\beta_{per} = \min\left(1,\ \frac{1}{k} - 1\right) \qquad (22\,b)$$

이제 $\beta \to \beta_{per}$ 로 될 때의 엔트로피를 境界 엔트로피 H_b라 하고, 이의 변화를 살펴보자.

먼저, $0 < k < 0.5$이면 $\beta_{Per} = 1$ 이므로 (15)식에서,

$$H_b = \lim_{\beta \to 1} H(S) = -\left[(1-2k) \times \log\frac{1-2k}{1-k} + K\log\frac{k}{1-k}\right] \qquad (23)$$

이 된다.

다음에 $0.5 < k < 1$이면 $\beta_{Per} = \frac{1}{k} - 1$ 이므로(15)식에서,

$$H_b = \lim_{\beta \to \frac{1}{k}-1} H(S) = -\left[(1-k)\log\frac{1-k}{k} + (2k-1)\log\frac{2k-1}{k}\right] \qquad (24)$$

가 된다.

이제, H_b의 最大 값을 구하자.

$0 < k < 0.5$인 경우에는 (23)식에서,

$$\frac{dH_b}{dk} = -\log\frac{k(1-k)}{(1-2k)^2}$$

가 되는데,

$$\frac{dH_b}{dk} = 0,\quad 0 < k < 0.5$$

의 解를 k_{M1}이라 두면,

$$k_{M1} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cong 0.27639$$

가 되고, $0.5 < k < 1$인 경우에는 (24)식에서,

$$\frac{dH_b}{dk} = -\log\frac{k(1-k)}{(1-2k)^2}$$

가 되는데,

$$\frac{dH_b}{dk} = 0,\quad 0.5 < k < 1$$

의 解를 k_{M2}라 두면

$$k_{M2} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cong 0.72361$$

$$k_{M1} + k_{M2} = 1$$

이 된다.

이때, 最大 H_b는,

$$H_{b,max} = \lim_{\substack{k \to k_{M1} \\ \beta \to 1}} H(S) = \lim_{\substack{k \to k_{M2} \\ \beta \to \frac{1}{k_{M2}}-1}} H(S) \cong 0.69424$$

이다.

또,

$$\lim_{k \to 0} H_b = \lim_{k \to 0.5} H_b = \lim_{k \to 1} H_b = 0$$

임도 쉽게 알 수 있다.

Ⅲ. 컴퓨터 시뮬레이션

(8)식에서

$$f(\beta) = 0$$

의 解가 β_{max}이므로 이를 變形시키면,

$$\beta + (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\,\alpha^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\,\beta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} - 1 = 0 \qquad (25)$$

가 되는데, 이 方程式을 Newton 方法으로 풀었다.[4] 아래의 표1, 그림3, 그림4에서 한 條件付 確率이 일정할 때, PFME와 最大 엔트로피는 주어진 確率의 구간 (0, 0.5)에서는 單調 增加하고, 구간(0.5, 1)에서는 單調 減少함을 알 수 있다.

그림5는 $k = p(1)$을 파라미터로 하여 $\beta = p(0/1)$와 엔트로피의 관계를 보여 준다.(식 (15)) 특히, β의 범위가 (22)식으로 한정된다는 점을 주의해야 한다.

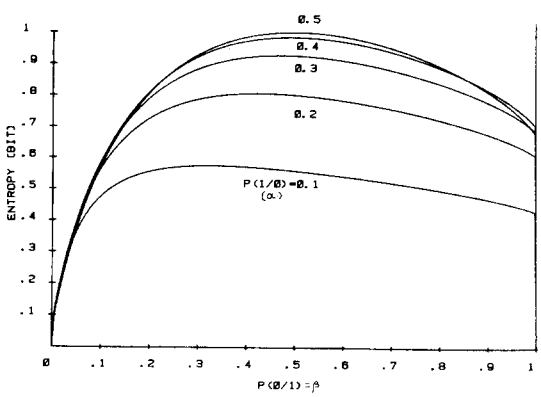
표2, 표3 및 그림6에 $k = p(1)$과 最大 엔트로피, 境界 엔트로피의 관계를 보였다.

그림6(a)는 (19)식에서 알 수 있는 바와 같이, 無記憶 情報源의 確率 對 엔트로피의 그림과 같다. 즉

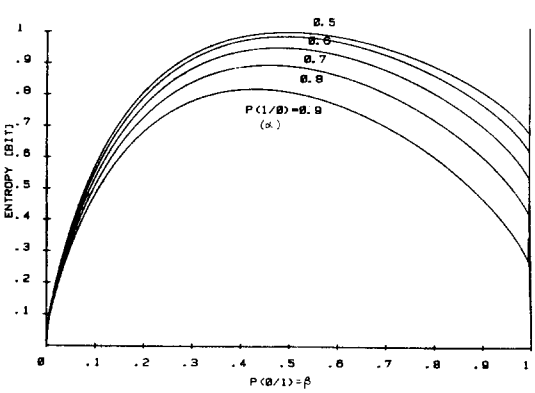
표 1. PFME와 최대 엔트로피

Table 1. PFME and maximum entropy.

주어진확률(α)	PFME(β_{max})	최대 엔트로피
$\alpha \to 0$	$\beta_{max} \to 0$	$H(S) \to 0$
0.1	0.3276	0.57270
0.2	0.4279	0.80571
0.3	0.4739	0,92655
0.4	0.4944	0.98390
0.5	0.5000	1,00000
0.6	0.4954	0.98683
0.7	0.4827	0.95104
0.8	0.4625	0.89556
0.9	0.4331	0.81874
$\alpha \to 1$	$\beta_{max} \to 0.3820$	$H(S) \to 0.69424$



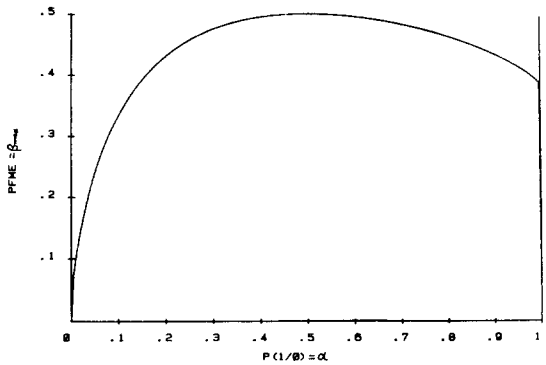
(a)



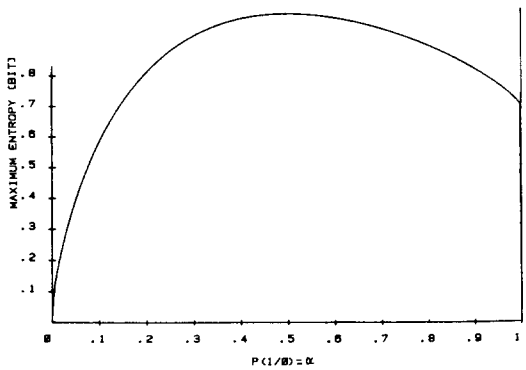
(b)

그림 3. 二進 一次 Markov 情報源의 엔트로피

Fig. 3. Entropy of binary first order Markov information source.



(a)



(b)

그림 4. 最大 엔트로피를 위한 確率(PFME)과 最大 엔트로피

Fig. 4. Probability for maximum entropy and maximum entropy.

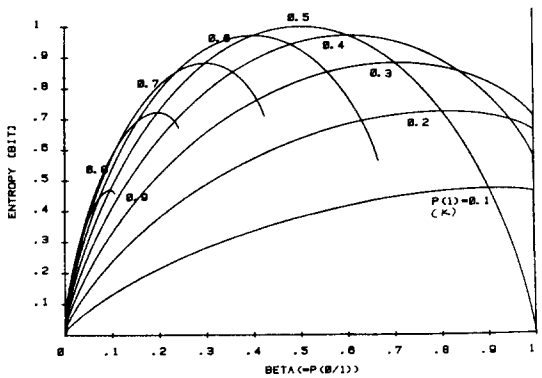


그림 5. P(0/1) ($=\beta$)이 주어졌을 때의 엔트로피

Fig. 5. Entropy when P(0/1) ($=\beta$) is given.

표 2. k가 정해졌을 때의 최대 엔트로피
Table. 2. Maximum entropy (given k).

주어진 확률(k)	(α_{max}, β_{max})	최대 엔트로피
k → 0	(0, 1)	0
0.1	(0.1, 0.9)	0.46900
0.2	(0.2, 0.8)	0.72193
0.3	(0.3, 0.7)	0.88129
0.4	(0.4, 0.6)	0.97095
0.5	(0.5, 0.5)	1.00
0.6	(0.6, 0.4)	0.97095
0.7	(0.7, 0.3)	0.88129
0.8	(0.8, 0.2)	0.72193
0.9	(0.9, 0.1)	0.46900
k → 1	(1, 0)	0

표 3. 境界 엔트로피
Table 3. Boundary entropy.

k	β_{Per}	H_b
k → 0	1	0
0.1	1	0.45293
0.2	1	0.64902
k_{M1}	1	0.69424
0.3	1	0.68966
0.4	1	0.55098
0.5	1	0
0.6	$\frac{2}{3}$	0.55098
0.7	$\frac{3}{7}$	0.68966
k_{M2}	0.3820	0.69424
0.8	$\frac{1}{4}$	0.64902
0.9	$\frac{1}{9}$	0.45293
k → 1	0	0

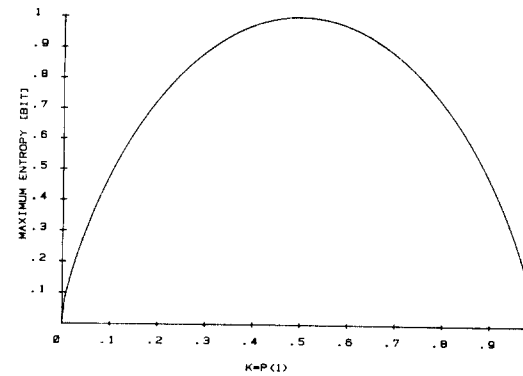
二進 一次 Markov 情報源의 엔트로피는 平衡狀態 確率에 대해 對稱性을 가지고 있으며, 두 平衡狀態 確率이 同等할 때 最大값 1을 가진다.

境界 엔트로피도 그림 6(b)에서 k = p(1) = 0.5를 축으로 對稱임을 볼 수 있다.

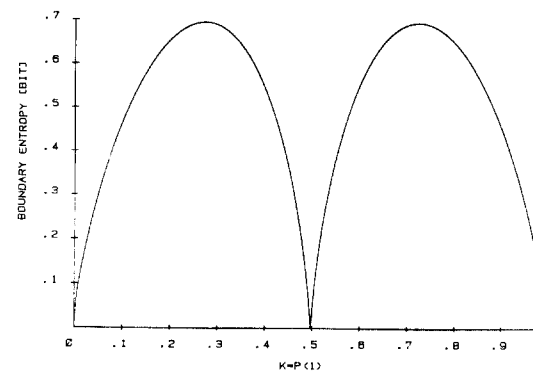
이는 식(23)의 k 대신에 1 − k를 넣으면,

$$H_b = [(2k-1)\log\frac{2k-1}{k} + (1-k)\log\frac{1-k}{k}]$$

곧, (24)식이 되기 때문이다.



(a) 한 平衡 狀態 確率이 주어졌을 때의 最大 엔트로피
(a) Maximum entropy when a steady state probability is given.



(b) 境界 엔트로피
(b) Boundary entropy.

그림 6.
Fig. 6.

Ⅳ. 結 論

二進 一次 Markov 情報源의 엔트로피는 다음 性質을 가지고 있다.

1) 條件付 確率이 하나 정해지면, PFME와 最大 엔트로피는 오직 하나 存在하며, 이 둘은 可變 條件付 確率의 구간(0, 0.5)에서는 單調 增加, 구간(0.5, 1)에서는 單調 減少하지만 非對稱이다.

2) 平衡 狀態 確率이 하나 정해지면, 엔트로피를 最大로 하는 條件付 確率雙(α_{max}, β_{max})와 最大 엔트로피는 오직 하나 存在하며, 이 둘은 모두 平衡 狀態 確率에 대해 對稱性을 가진다.

3) 境界 엔트로피는 平衡 狀態 確率에 대해 對稱性을 가지며, 특히, 境界 엔트로피를 最大로 하는 平衡狀態 確率은 두 雙 存在한다.

V. 謝 意

이 論文을 쓰는 데 여러 가지로 도와주신 閔丙九 박사님, 金喜贊씨, 姜 勳씨, 成太英씨에게 眞心으로 感謝드립니다. 또한 예리한 지적으로 本 論文의 修正을 도와 주신 審査委員들께도 謝意를 표합니다.

參 考 文 獻

[1] N. Abramson, *Information Theory and Coding*. McGraw-Hill, New York, 1963.

[2] John G. Kemeny and J. Laurie Snell, *Finite Markov Chains*. D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, 1960.

[3] Richard W. Hamming, *Coding and Information Theory*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1980.

[4] 金 鍾 鎬, FORTRAN Programming, 螢雪出版社, 서울, 1979.

[5] 1C.E. Shannon and W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*. Univ. of Illinois Press, Urbana, 1949.

[6] 趙 成 皓, "情報理論概說", 電子工學會誌, 第 8 卷 第 1 號, pp. 21-27, 1971.