

<論 文>

# Slit 近傍의 Stokeslet 에 의한 2次元의 느린 粘性流動

高亨鍾\* & 金文彦\*

(1983年 6月 11日 接受)

## Two-Dimensional Slow Viscous Flow Due to a Stokeslet Near a Slit

Hyung-Jong Ko and Moon-Uhn Kim

### Abstract

Two-dimensional slow viscous flow due to a stokeslet near a slit is investigated on the basis of Stokes approximation. Velocity fields and stream function are obtained in closed forms by finding two sectionally holomorphic functions which are determined by reducing the problem to Riemann-Hilbert problems. The force exerted on a small cylinder is calculated for the arbitrary position of the cylinder translating in an arbitrary direction. The features of fluid flow are also investigated.

### 1. 서 론

느린 粘性流動은 유체내의 微粒子의 運動, 微生物의 운동, 모세혈관에서의 血液의 흐름과 관련하여 활발히 研究되고 있다.

느린 粘性流動의 경우, 경계면의 존재는 흐름에 대단히 큰 영향을 미친다. 경계면이 있는 경우의 粒子의 운동에 의한 느린 粘性流動은 解析的인 엄밀해를 求하기가 어렵기 때문에, 粒子和 壁面간의 거리가 粒子의 크기에 비해 클 때 잘 맞는 “reflection의 방법”을 써서 경계면의 효과를 고려하는 것이 보통이다<sup>1,2,3</sup>. 이때 흐름의 第1近似는 物體를 點力(point force) 즉 stokeslet로 代치함으로써 얻어질 수 있다. 최근에 경계면 근방의 stokeslet에 의한 느린 粘性流에 대한 解를 구성함으로써 流動의 剝離, 粘性 eddy 등을 포함하는 유동 특성에 미치는 경계면의 효과를 考察하는 연구들이 이루어지고 있다<sup>4-7</sup>.

본 논문에서는 폭 2인 slit 근방의 任意 위치에 있는 任意 세기의 stokeslet에 의해 생겨나는 2차원의 느린

粘性流動에 대해 연구한다. 이러한 流動은 同一한 기하학적 배치하에서 壁面까지의 거리에 비해서 매우 작은 半徑을 갖는 圓柱가 stokeslet의 위치에서 느린 並進運動을 할 때의 유동과 거의 일치한다. 본 논문에서 고찰하는 흐름에 대응하는 축대칭 흐름은 Davis et al<sup>3</sup>, Hasimoto<sup>6</sup>가 解析한 圓形 구멍이 있는 平面 근방에서의 stokeslet에 의한 축대칭 흐름이다. 본 연구의 결과는 축대칭이 깨질 때의 일반적인 3차원 흐름에 대한 경향을 예상할 수 있도록 하는 端緒를 제공해 줄 것이다.

본 논문의 2절에서는 속도 분포를 2개의 解析函數로 表現하고 경계조건으로부터 Riemann-Hilbert 문제를 구성하여 2개의 解析函數를 결정한다. 3절에서는 이 2개의 解析函數로부터 流動場을 初等函數로 表現하여 원하는 物理量(예를 들면 slit를 통과하는 流量, 圓柱에 작용하는 抵抗力)들을 求하고, slit 근방의 stokeslet에 의한 흐름의 特徵을 自細히 조사한다.

### 2. 수학적 전개

Fig. 1과 같이 두 半無限 壁면이 폭 2인 slit를 이

\* 正會員, 韓國科學技術院

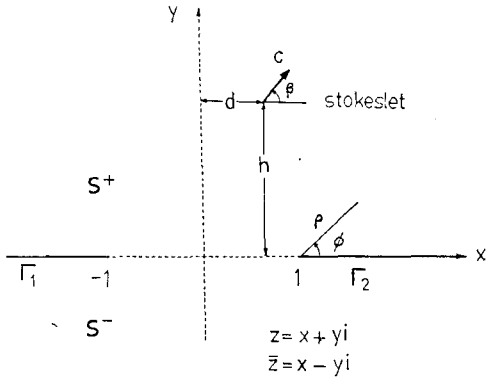


Fig. 1 Definition sketch

를 때, slit 중앙을 원점으로 하고  $x$ -축을 벽면과 일치하게,  $y$ -축을 이와 수직하게 잡는 직교좌표계에서 複素세기  $c=(c_1+ic_2)=|c|\exp(i\beta)$ 인 2차원 stokeslet 가 점  $(d, h)$ 에 있을 때의 느린 粘性流動을 고찰한다(但  $h=0$  일때는  $|d|\leq 1$ ). 경계면의 기하학적 배치를 고려하면  $d\geq 0, h\geq 0$ 으로 두어도 좋다(즉 stokeslet 가 제 1 상한에 있을 때만 고려해도 충분하다). 왼쪽 벽면과 오른쪽 벽면을 각각  $\Gamma_1, \Gamma_2$ 라 하고 上·下 半平面을 각각  $S^+, S^-$ , 벽면을 제외한 전유동장을  $S$ 라 하며  $S^+(S^-)$ 에서 벽면으로 접근할 때의 極限값에 上添字  $+( -)$ 를 붙이기로 한다.

流速이 느리고 粘性이 큰 경우(Reynolds 수가 매우 작은 경우), Navier-Stokes 방정식의 편성항은 무시할 수 있으므로 흐름은 다음의 線形方程式(Stokes 방정식)으로 기술된다<sup>1)</sup>.

$$\mu \nabla^2 u - \frac{\partial p}{\partial x} = -8\pi\mu c_1 \cdot \delta(x-d, y-h), \quad (1. a)$$

$$\mu \nabla^2 v - \frac{\partial p}{\partial y} = -8\pi\mu c_2 \cdot \delta(x-d, y-h),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1. b)$$

여기서  $u, v, p$ 는 각각 유체의  $x, y$  방향의 속도 성분과 압력을 나타내고  $\mu$ 는 유체의 粘性係數,  $\delta(x-d, y-h)$ 는 Dirac의 delta 함수이며, 式(1. a)의 우변은 점  $(d, h)$ 에 세기  $c$ 인 點力 즉 stokeslet 가 있다는 것을 나타낸다. 複素速度  $w=u-iv$ 를 도입하면  $w$ 는 다음의 두 경계조건을 만족해야 한다.

$$w(x, 0) = 0 \text{ for } |x| \geq 1, \text{ (벽면 위)} \quad (2)$$

$$w(x, y) \rightarrow 0 \text{ as } (x^2+y^2)^{1/2} \rightarrow \infty, \text{ (無限遠)} \quad (3)$$

複素變數  $z=x+iy, \bar{z}=x-iy$ 를 도입하면, 방정식(1. a, b)의 해는 다음과 같이 표현할 수 있다<sup>2)</sup>.

$$w = f'(z) + (\bar{z}-z)g'(z) - \bar{g}(z)$$

$$+ 2\bar{c} \log|z-z_0| - c \frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}, \quad (4)$$

$$p = 4\mu \operatorname{Re} \left[ g'(z) - \frac{c}{z-z_0} \right],$$

$$z_0 = d+ih. \quad (5)$$

여기서 overbar “—”는 복소공액(complex conjugate)을 나타내며  $\operatorname{Re}$ 는 실수부분을 나타낸다. 또  $f(z), g(z)$ 는 解析函數로 경계조건(2), (3)을 만족하도록 결정해야 하며 多價函數인  $\log$  함수는 主值(즉  $-\pi < \operatorname{Im}(\log w) \leq \pi$ )를 擇한다.

$z$ 가 벽면으로 接近할 때 속도의 표현식(4)의 극한값을 구하면 경계조건(2)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[f'(t) + \bar{g}(t)]^+ - [f'(t) + \bar{g}(t)]^- = 0, \text{ for } t \in \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (6)$$

$$[f'(t) - \bar{g}(t)]^+ + [f'(t) - \bar{g}(t)]^- = 2H(t), \text{ for } t \in \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (7)$$

여기서  $H(t) = c(t-\bar{z}_0)/(t-z_0) - \bar{c} \log[(t-d)^2 + h^2]$ 이다.

한편  $g(z)$ 가  $S$ 에서 解析的이므로 Schwarz의 reflection principle에 의해  $\bar{g}(z)$ 도  $S$ 에서 解析的이다. 결국 式(6), (7)은 각각  $S$ 에서 解析的인 두 함수  $f'(z) + \bar{g}(z)$ 와  $f'(z) - \bar{g}(z)$ 에 대한 Riemann-Hilbert 문제<sup>3)</sup>가 되고 이를 풀어서  $f'(z), g(z)$ 를 결정하게 된다. 無限遠( $|z| \rightarrow \infty$ )에서 未知函數는 式(3), (4)로부터

$$f'(z) \rightarrow -\bar{c} \log z, \bar{g}(z) \rightarrow \bar{c} \log z, \text{ as } |z| \rightarrow \infty \quad (8)$$

의 擧動을 보인다는 것을 알 수 있다.

방정식(6)은  $f'(z) + \bar{g}(z)$ 가 전평면에서 解析的이라는 것을 의미하고 있으므로(6)의 해는 常數이고<sup>3)</sup>, 一般성을 잃지 않고 이 常數를 0으로 놓아도 좋다.

$$f'(z) + \bar{g}(z) = 0 \quad (9)$$

또 sharp edge( $z=\pm 1$ ) 근방에서 속도가 有限하며(8)을 만족하는(7)의 解는 다음과 같이 주어진다<sup>3)</sup>.

$$f'(z) - \bar{g}(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{2\pi i} \left( -\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \frac{2H(t) dt}{\sqrt{t^2-1}(t-z)} \right) = -2\bar{c} \log(b-az-iq\sqrt{z^2-1}) + c \left[ \frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0} - i \frac{2h\sqrt{z^2-1}}{m(z-z_0)} \right] \quad (10)$$

$$\text{여기서 } m = \sqrt{z_0^2-1}, b = \left[ \frac{1}{2}(1+d^2+h^2+r_1r_2) \right]^{1/2},$$

$$a = \left[ \frac{1}{2}(1+d^2+h^2-r_1r_2) \right]^{1/2},$$

$$q = \left[ \frac{1}{2}(1-d^2-h^2+r_1r_2) \right]^{1/2},$$

$$r_1 = [(d-1)^2+h^2]^{1/2}, r_2 = [(d+1)^2+h^2]^{1/2}$$

이며  $\sqrt{z^2-1}$ 의 branch cut는 실수축을 따라  $(-\infty, -1)$  및  $(1, \infty)$ 를 擇한다(즉 양쪽 벽면을 branch cut

로 잡는다).

式 (9), (10)으로부터 다음과 같은  $f'(z)$ ,  $g(z)$ 의 표현을 얻는다.

$$f'(z) = c \left[ \frac{1}{2} - \frac{ih(z+z_0)}{m(\sqrt{z^2-1}+m)} \right] - \bar{c} \log(b-az - iq\sqrt{z^2-1}), \tag{11}$$

$$g(z) = -\bar{c} \left[ \frac{1}{2} - \frac{ih(z+\bar{z}_0)}{m(\sqrt{z^2-1}-m)} \right] + c \log(b-az-iq\sqrt{z^2-1}).$$

위의 표현을 식 (4)에 代入하면 흐름의 전영역에서 속도분포를 얻을 수 있다.

### 3. 결과 및 논의

2절에서 구한  $f, g$ 의 표현식을 사용하여 흐름을 구체적으로 記述하자.

#### 3.1. 속도 분포 및 유동함수

複素速度  $w$ 는 (4), (11)로부터 다음과 같이 주어진다.

$$w(z, \bar{z}) = 2\bar{c} [\log|z-z_0| - \log|b-az-iq\sqrt{z^2-1}|] - (\bar{z}-z) \left\{ \frac{c(a\sqrt{z^2-1}+iqz)}{\sqrt{z^2-1}(b-az-iq\sqrt{z^2-1})} + i \frac{\bar{c}h(m\sqrt{z^2-1}+z\bar{z}_0+1)}{m\sqrt{z^2-1}(\sqrt{z^2-1}-m)^2} \right\} - c \left\{ \frac{\bar{z}-z+2ih}{z-z_0} + \frac{ih}{m} \left( \frac{z+z_0}{\sqrt{z^2-1}+m} + \frac{\bar{z}+z_0}{\sqrt{\bar{z}^2-1}+m} \right) \right\} \tag{12}$$

式 (12)로 주어지는 複素速度  $w$ 가 경계조건 (2)를 만족한다는 것은 직접 대입하면 쉽게 확인된다.  $|w|$ 는 無限遠에서  $1/|z|$ 의 order로 0이 되므로 경계조건 (3)을 만족함은 明白하며 sharp edge ( $z=\pm 1$ ) 근방에서는  $|z\pm 1|^{1/2}$ 의 order가 되어 압력과 전단응력이  $|z\pm 1|^{-1/2}$ 의 order로 적분가능하게 發散한다.

流動函數  $\phi$ 는 複素速度  $w$ 의 표현 (12)를 한번 적분하여 구할 수 있다. 複素表現으로는  $w=u-iv=2i$

$\frac{\partial\phi}{\partial z}$ 로 주어지므로 적분을 행한 후 편의상 오른쪽 벽면 ( $\Gamma_2$ )에서  $\phi=0$ 이 되도록 하면 간단한 계산 결과

$$\phi = 2Im[\bar{c}(z-z_0)](\log|z-z_0| - \log|b-az-iq\sqrt{z^2-1}|) + 2bc_2 \{Im[\log(\sqrt{z^2-1}-z)] - \pi\} + Re \left\{ \frac{\bar{c}h(\bar{z}-z)(z+z_0)}{m(\sqrt{z^2-1}-m)} \right\} + 2Im \left( \frac{chz_0}{m} \right) Im \left[ \log(\sqrt{z^2-1}+z) \right] + 2Im \left( \frac{ch}{m} \right) Im(\sqrt{z^2-1}) \tag{13}$$

이 된다.

#### 3.2. Slit를 통과하는 流量

Slit를 통과하는 유량  $Q$ 는 (13)에서 쉽게 구할 수 있다. 즉 오른쪽 벽면 ( $\Gamma_2$ )에서  $\phi=0$ 이므로  $Q$ 는 왼쪽 벽면 ( $\Gamma_1$ )에서의  $\phi$ 값과 같다.

$$Q = -\frac{2\pi q}{r_1 r_2} (c_1 a h + c_2 q^2 b) \tag{14}$$

특히  $c_1=0$ ,  $c_2 \neq 0$  일때 (즉 stokeslet가 벽면에 수직일 때)에는 반드시 slit를 통과하는 유량이 있게 된다. 또 點( $d, h$ )에 stokeslet가 있을 때, 유량  $Q=0$ 으로 하는 (즉 slit를 통과하는 유량이 없게 하는) 방향  $\beta$ 는

$$\beta = \frac{1}{2} \tan^{-1} [2hd/(h^2-d^2+1)] \tag{15}$$

로 주어진다.

#### 3.3. 圓柱가 받는 抵抗力

中心이 ( $d, h$ )에 있고 半徑이  $R$ 인 圓柱가  $U=(U, V)$ 의 속도로 느린 並進運動을 할 때,  $R$ 이 壁面까지의 거리  $l$ 에 비해서 매우 작다면 圓柱의 운동은 ( $d, h$ )에 놓인 stokeslet와 doublet의 疊으로 近似시킬 수 있다<sup>2)</sup>. 즉 圓柱의 운동에 의한 複素速度分布  $w_c$ 는

$$w_c = w_s + B/(z-z_0)^2 \tag{16}$$

이 된다.

방정식 (16)에서  $w_s$ 는 세기  $c$ 의 stokeslet에 의한 複素速度를 우변의 第2項은 세기  $B$ 의 doublet에 의한 복소속도를 나타낸다. 여기서 stokeslet 및 doublet의 세기  $c$  및  $B$ 는 圓柱위에서의 경계조건 ( $|z-z_0|=R$ 에서  $w_c=U-iV$ )과 벽면에서의 경계조건을 만족하도록 결정된다. 한편 圓柱 위에서의 경계조건을 만족하도록 하기 위해서는  $B=0[(R/l)^2]$ 이므로  $w_s$ 를 (12)에 의해 주어지는 복소속도를 擇하면 (16)은 벽면 ( $\Gamma_1, \Gamma_2$ )에서의 경계조건을  $R/l$ 의 1次 order까지 만족한다. 圓柱 위에서의 경계조건을 만족하도록  $B, c$ 를 결정하면<sup>10)</sup> 圓柱가 받는 힘  $F=(F_x, F_y)$ 는

$$F_x + iF_y = -8\pi\mu(c_1 + ic_2) \tag{17}$$

$$F = -4\pi\mu K \cdot U$$

로 주어진다. 간단한 계산 결과

$$K_{xx} = \frac{1}{D} \left( \log \frac{1}{R} + f_{yy} \right), \quad K_{xy} = K_{yx} = \frac{1}{D} f_{xy},$$

$$K_{yy} = \frac{1}{D} \left( \log \frac{1}{R} + f_{xx} \right),$$

$$D = \left( \log \frac{1}{R} + f_{xx} \right) \left( \log \frac{1}{R} + f_{yy} \right) - f_{xy}^2,$$

$$f_{xx} = \log(2q\sqrt{r_1 r_2}) - \frac{h^2}{2q^2 r_1 r_2} - \frac{1}{2} + \frac{q^2(h^2-d^2+1)}{(r_1 r_2)^2},$$

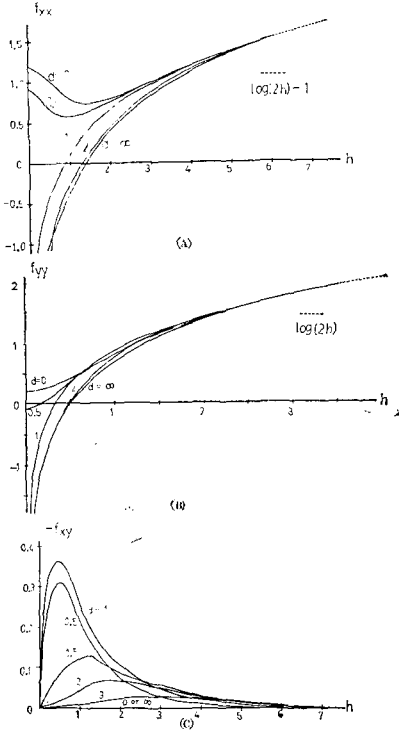


Fig. 2 Force wall-correction factors  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$ ,  $f_{yy}$

$$f_{xy} = -2q^2hd / (r_1r_2)^2,$$

$$f_{yy} = \log(2q\sqrt{r_1r_2}) - \frac{h^2}{2q^2r_1r_2} + \frac{1}{2} \frac{q^2(h^2-d^2+1)}{(r_1r_2)^2}$$

이 된다. Fig. 2에  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$ ,  $f_{yy}$ 를 도시하였다.

圓柱가 받는 힘에 대한 위의 표현식에서  $h \gg 1$ 이면

$$F_x = -4\pi\mu U \left[ \log \frac{1}{R} + \log(2h) + O\left(\frac{1}{h^2}\right) \right]$$

$$F_y = -4\pi\mu V \left[ \log \frac{1}{R} + \log(2h) - 1 + O\left(\frac{1}{h^2}\right) \right]$$

이 된다. 이 결과는 單一無限平面이 존재할 때에 대한 Kim<sup>2)</sup>의 결과와 일치한다. 즉  $h$ 가 클 경우에는 slit의 영향이 거의 없어서 단일 무한평면이 존재할 때와 같아진다.

한편 축대칭의 경우에 대한 결과와 비교하기 위해 圓柱가 slit의 中央線을 따라 움직일 때의 힘을 구해보면

$$F_x = 0,$$

$$F_y = -4\pi\mu V \left[ \log \frac{1}{R} + \log(2\sqrt{h^2+1}) - \frac{(h^2-1/2)}{(h^2+1)} \right],$$

이 되어 軸對稱의 경우와 경향이 일치한다<sup>6)</sup>.

### 3. 4. 유동의 박리 및 粘性 Eddy

Slit 근방의 작은 2次元의 물체(특성길이 가 벽면까지

의 거리에 비해 대단히 작은 물체)의 운동에 의한, 물체로부터 떨어져 있는 곳에서의 흐름은 stokeslet에 의한 흐름만을 생각해도 좋다<sup>2)</sup>. Slit 근방의 stokeslet에 의한 先端 근방의 유동 특성을 조사하기 위해서  $z-1 = \rho e^{i\phi}$ 로 정의되는 局所極座標  $(\rho, \phi)$  (Fig. 1)를 도입한다. 선단 근방에서  $\phi$ 의 漸近表現은 대단히 긴 계산 결과

$$\phi(\rho, \phi) = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{q(a+b)^2}{(r_1r_2)^3} \rho^{3/2} \sin^2 \frac{\phi}{2} \left( S_1 \sin \frac{\phi}{2} - S_2 \cos \frac{\phi}{2} \right) + O(\rho^2), \quad (18)$$

$$S_1 = -c_1h(2bd-a-b) + c_2[(b^2-1)(2ad-a-b) + (a-b)r_1r_2],$$

$$S_2 = 3c_1(a^2+2d^2b-2bd-3ad+a+b) + 3c_2h(2bd-a-b).$$

이 된다.

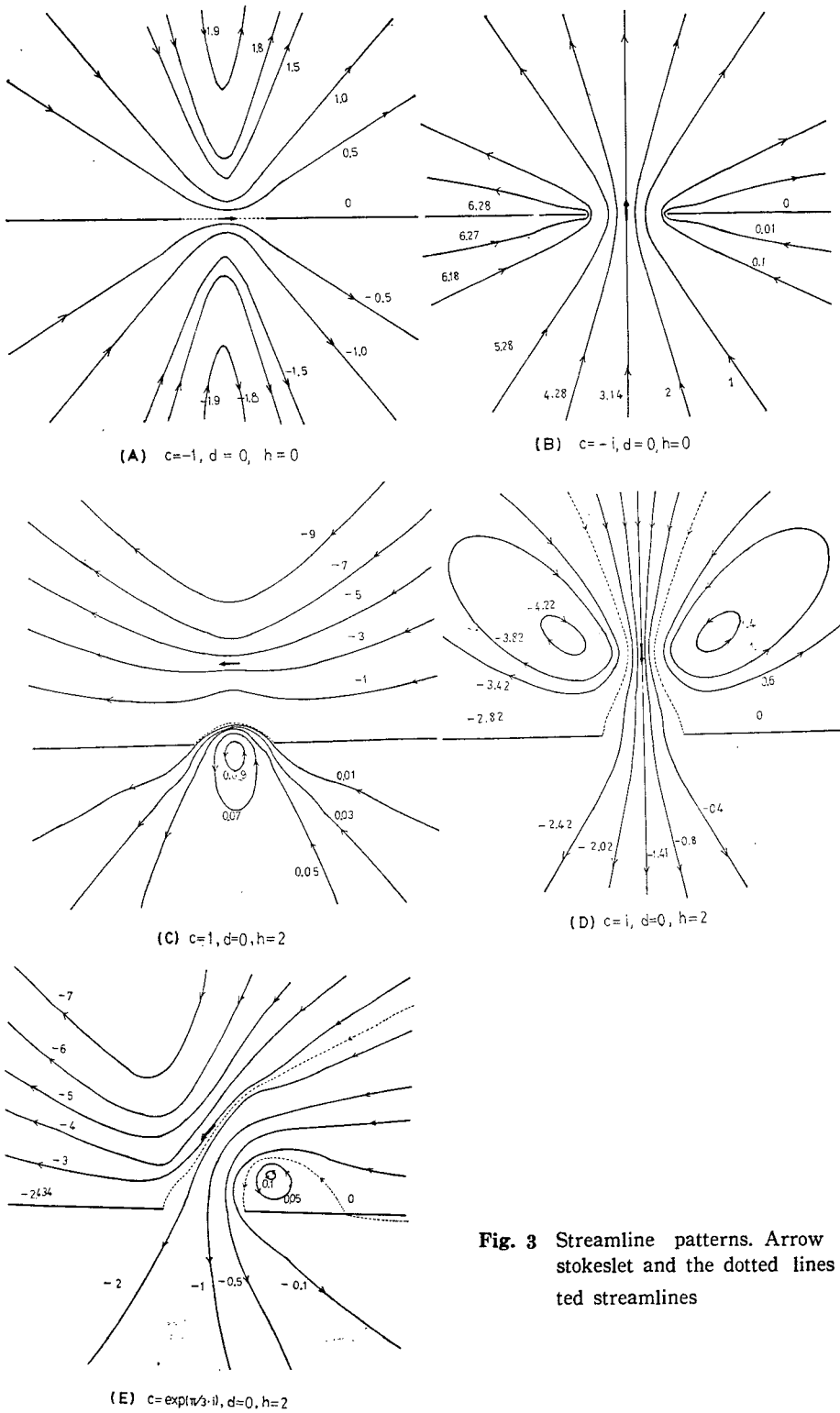
式 (18)은 Michael & O'Neil<sup>11)</sup>에 의해 구해진 sharp edge 근방에서의 일반적인 流動特性的 擧動과 일치한다. 즉  $c_1=0, h=0$ 인 경우(벽면에 수직인 stokeslet가 slit 위에 놓이는 경우)를 제외하고 항상  $z=\pm 1$ 에서 유동의 박리가 일어나고 이때 剝離角은  $2\tan^{-1}(S_2/S_1)$ 이 됨을 쉽게 알 수 있다.

한편 오른쪽 벽면의 윗부분( $\Gamma_2^+$ )에서 剪斷應力  $\tau_{xy}$ 를 求해보면

$$\frac{1}{\mu} \tau_{xy} = \frac{4h}{\sqrt{x^2-1}} Re \left\{ \frac{c(1-z_0x)}{m(x-z_0)^2} \right\} - \frac{4c_1q(bx-a)}{\sqrt{x^2-1}[(x-d)^2+h^2]} - \frac{8h(x-d)[c_1(x-d)-c_2h]}{[(x-d)^2+h^2]^2} \text{ for } x > 1$$

이 되어  $\tau_{xy}$ 의 符號가 바뀌는 點에서 流動의 剝離가 생긴다. 특히  $d=0$ 이고  $h \tan \beta > 1$ 인 경우에는  $x = h \tan \beta$ 에서 박리가 일어남을 알 수 있다<sup>12)</sup>. 유동의 박리와 粘性 eddy의 존재에 관련된 유동특성을 수치계산한 결과는 Fig. 3에 보여진다.

Slit 근방의 stokeslet에 의한 유동의 특징은 sharp corner나 cusped corner에서와 같은 無限히 많은 eddy의 列은 존재하지 않고 eddy의 갯수가 유한하다는 점이다. 이러한 특징은 Liron & Blake<sup>11)</sup>에 의해 밝혀진 stokeslet가 단일 무한평면 근방에 있는 경우와 類似하다. 그러나 무한평면 근방에 stokeslet가 있을 때 eddy의 갯수가 0 또는 2인 反面, slit 근방에 stokeslet가 있을 때 可能的 eddy의 갯수는 0, 1, 2이다. 즉 유동이 上下對稱인 경우에는 eddy가 없으며, 유동이 上下對稱이 아닌 경우에는  $Q=0$ 이면 stokeslet가 없는 쪽 半 평면에 1個의 eddy가 있고  $Q \neq 0$ 이면 eddy의 갯수는 0, 1, 2中의 하나가 된다.



**Fig. 3** Streamline patterns. Arrow denotes the stokeslet and the dotted lines are separated streamlines

## References

- (1) J. Happel & H. Brenner, "Low Reynolds Number Hydrodynamics", Noordhoof-Sijthoff, 1973.
- (2) M-U. Kim, "Two-dimensional slow viscous flow due to the motion of a cylinder on the center-line of a wedge", J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 46, p.1929-1934, 1979.
- (3) H. Brenner, "The Oseen resistance of a particle of arbitrary shape", J. Fluid Mech., Vol. 11, p.604-610, 1961.
- (4) N. Liron & J.R. Blake, "Existence of viscous eddies near boundaries", J. Fluid Mech., Vol. 107, p.109-129, 1981.
- (5) A.M.J. Davis, M.E. O'Neil & H. Brenner, "Axisymmetric Stokes flows due to a rotlet or stokeslet near a hole in a plane wall: filtration flows", J. Fluid Mech., Vol. 103, p.183-205, 1981.
- (6) H. Hasimoto, "Axisymmetric Stokes flow due to a stokeslet near a hole in a planewall", J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 50, p.4068-4070, 1981.
- (7) M-U. Kim, "Axisymmetric Stokes flow due to a point force near a circular disk", J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 52, p.449-455, 1983.
- (8) I. Imai, "Some applications of function theory to fluid dynamics", 2nd Int. JSME Symp. Tokyo, Sept., 1972.
- (9) N.I. Muskhelishvili, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", P. Noordhoof, 1963.
- (10) 고흥중, "Slit 근방의 Stokeslet 에 의한 2차원의 느린 점성 유동", 한국과학기술원 석사논문, 1983.
- (11) D.H. Michael & M.E. O'Neil, "Separation of Stokes flow", J. Fluid Mech., Vol. 80, p.785-794, 1977.