

<論 文>

兩點 境界值 問題設置에 의한 非線型 強制振動의 定常解†

金 玉 鉉* · 李 炳 昊**

(1982년 7월 8일 접수)

Steady-State Solutions for Forced Nonlinear Vibrations by the Formulation of Two-Point Boundary-Value Problem

Ock Hyun Kim and Byung Ho Lee

Abstract

For the steady-state solutions of vibratory systems where the dynamics involves nonlinearity and discontinuity, a method of numerical simulation has been normally used. This paper presents a new approach which may overcome some difficulties in the simulation method. This approach is based on the fundamental assumption that the steady-state forced vibration is periodic, so that the problem is formulated as a two-point boundary-value problem and can be solved by Waner's algorithm. This method is demonstrated through the solutions of a linear system, a system with Coulomb friction and an impact pair. It is found that the method gives true solutions well both for linear and nonlinear systems, which convinces us of the usefulness of the method.

1. 序 論

일반적으로 선형 진동 및 비선형 강제 진동의 간단한 경우는 해석적 방법으로 그 定常解(steady-state solution)를 구하는 것이 가능하다. 그러나 비선형성, 불연속성이 함께 존재하는 등 보다 복잡한 비선형 振動系의 定常解를 해석적 방법으로 구하는 것은 매우 어렵게 되며 이 경우 흔히 컴퓨터를 이용한 數值 시뮬레이션에 의해 그 解를 얻고 있다. 대부분 振動系의 지배방정식은 시간에 관한 상미분 방정식으로 표시되는 初期值 문제이다. 數值 시뮬레이션이란 임의의 초기 조건으로 그 운동방정식을 계속하여 數值 積分해 나가는 중에 어떠한 定常條件이 만족 될 때 수치 계산을 멈추고 그 定常解를 얻는 방법이다.^{1,2)} 이 방법에서는 過多한 수치 계산 시간이 所要되며 또한 系의 지배 방

정식에 불연속성이 존재하는 경우 digital 컴퓨터가 갖는 고유한 성질인 計數化(digitization)에 의해 불연속점에서의 狀態值 계산에 오차가 발생하며 이것이 계속 蓄積되어 잘못된 결과를 가져올 위험이 있음이 문제점으로 指摘되고 있다.^{3,4)} 이러한 이유로 Veluswami는 그의 衝突對(impact pair)에 관한 연구에서 digital 컴퓨터 대신에 analogue 컴퓨터를 사용한바 있다.⁴⁾

本 논문에서는 以上과 같은 數值시뮬레이션에서 발생하는 몇가지 문제점을 극복할 수 있는 새로운 數值 解法을 제시한다. 이 數值 解法에서는 振動系의 定常 운동이 週期的 운동이라는 기본 가정 아래 振動系의 운동이 定常狀態에 도달했을 때 임의의 시간에서의 모든 狀態値는 한週期 後의 모든 狀態値와 같아야 한다는 條件으로부터 兩點 境界值 문제(two-point boundary-value problem)를 세운다. 이와 같은 兩點 境界值 문제를 풀기 위한 방법으로 shooting 방법^{5,6)}이 흔히 이용되고 있으며 그중 특히 Waner's algorithm은 지배방정식이 비선형, 불연속성을 가진 때에도 좋은 결과를 주며 나쁜 推定 初期值(guessing initial value)로도

† 대한기계학회 추계학술대회 (81.11)에서 발표

* 정희원, 한국과학기술원 기계공학과 박사과정

** 정희원, 한국과학기술원 기계공학과

그 解를 잘 주는 것으로 알려져 있다.⁵⁾ 이 理由로 이곳에서는 Waner's algorithm을 사용하여 그 解를 구한다. 몇가지 例題를 통하여 본 논문에서 제시된 數值 解法으로 선형 및 비선형 강제 진동의 定常解를 구해 보였으며, 數值 시뮬레이션에서 發生하는 문제점을 극복할 수 있음을 보였다.

2. 理論 展開

운동 방정식이 아래의 벡터 미분방정식으로 표시되는 振動系를 생각한다.

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

여기서 x 는 n 次 狀態 벡터(state vector), f 는 n 次 함수 벡터(function vector)이다. 이제 振動系의 定常 운동이 週期 T 를 갖는 週期的 운동이라고 가정한다. 이 가정으로부터 임의의 시간 $t=t_i$ 에서의 모든 狀態 値는 한週期 후, 즉 $t=t_i+T$ 에서의 모든 狀態 値와 같아야 한다는 定常 條件이 얻어지며 이것으로부터 定常解를 구하기 위한 다음과 같은 경계조건을 세운다.

$$q(x(0)) = x(x(0), t_i) - x(x(0), t_i+T) = 0 \tag{2}$$

여기서 $x(0)$ 는 眞初期條件 벡터(true initial condition vector)이며 $q(x(0))$ 는 초기 조건이 $x(0)$ 일 때의 境界條件 離脫 벡터(vector of boundary condition misdistance)이다.

이제 문제를 간단히 하기 위하여 식 (2)에서 $t_i=0$ 로 한다. 또한 편의상 $x(x(0), 0)$ 를 $x(0)$ 로 $x(x(0), T)$ 를 $x(T)$ 로 표시한다. 그러면 식 (2)는 아래와 같이 간단히 쓰여진다.

$$q(x(0)) = x(0) - x(T) = 0 \tag{3}$$

振動系의 定常 運動이 週期的이라는 가정으로부터 定常解를 구하는 것은 한 週期 동안(즉, $0 \leq t \leq T$)의 $x(t)$ 를 구하는 것으로 충분하다. 결국 振動系의 定常解는 境界條件, 식 (3)을 만족시키는 $x(t)$, $0 \leq t \leq T$ 를 구하는 문제로 歸着된다. 이렇게하여 식 (1)로 주어지는 振動系의 定常解를 구하는 문제는 식 (1)과 (3)으로 주어지는 兩點 境界值 문제로 變換되었다. 식 (3)은 시간軸 상의 두점, 즉 $t=0$ 와 $t=T$ 에서의 境界條件이므로 著者は '兩點 境界值 問題'라는 용어를 사용하였다. 보통의 境界值 문제에서는 境界條件이 固定된 常數값으로 주어지고 있으나 이곳에서의 境界條件, 식 (3)은 두점에서의 狀態值 間의 相關 關係로 주어지고 있음이 일반적인 境界值 문제와 다른 점이다. 선형 및 비선형 振動系의 운동 방정식은 모두 식 (1)의 형태로 표시되며 또한 定常解를 구하기 위한 境界條件,

식 (3)은 振動系의 定常운동이 週期的인 때 系의 特性에 관계없이 成立된다. 따라서 以上에서 설명한 바와 같은 접근 방법은 振動系의 선형, 비선형 또한 연속, 불연속성에 制約 받지 않게 되며 선형 진동 解析에도 역시 이용될 수 있다. 附錄에 본 논문의 이해를 돕기 위하여 Waner's algorithm에 의해 解를 구하는 단계를 설명하였다.

3. 適用 例

앞 節에서 설명한 바와 같은 數值 解法으로 몇가지 특징적인 振動系의 定常解를 구함으로써 선형 및 비선형 진동 해석에 應用될 수 있음을 보였으며 振動系의 特性이 數值解에 미치는 영향을 검토하였다.

3.1. 선형 2자유도계

Fig. 1에 선형 1자유도계의 모델을 보이고 있다. 그림에서와 같이 減衰 係數 c , 스프링 常數 k 로 壁에 연결되어 있는 質量 m 은 外力 $F_0 \cos \omega t$ 에 의해 아무런 저항없이 수평선 상을 움직이고 있다. 이 系의 靜的 平衡 狀態를 原點으로 하여 質量 m 의 變位를 x 로 할 때 다음과 같은 운동 방정식을 얻는다.

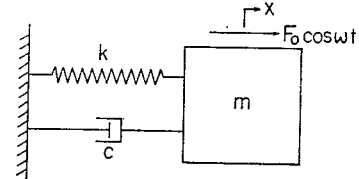


Fig. 1 Linear system having single degree of freedom.

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \delta_{st} \omega_n^2 \cos \omega t \tag{4}$$

여기서 $\zeta = c/2\sqrt{mk}$ 는 減衰比, $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 은 固有振動數, $\delta_{st} = F_0/k$ 는 靜變位이다. 이제 이 系의 定常運動이 外力과 같은 週期, 즉 $T=2\pi/\omega$ 를 갖는 週期的 운동이라고 하면 식 (3)으로부터 다음과 같은 境界條件을 얻는다.

$$q(x(0)) = \begin{Bmatrix} x(0) - x(2\pi/\omega) \\ \dot{x}(0) - \dot{x}(2\pi/\omega) \end{Bmatrix} = 0 \tag{5}$$

여기서 $x^T(0) = [x(0), \dot{x}(0)]$ 이다.

또한 행렬 Q, X (附錄 단계 3)는 다음과 같이 構成된다.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & x^1(0) - x^1(2\pi/\omega) & \dot{x}^1(0) - \dot{x}^1(2\pi/\omega) \\ 1 & x^2(0) - x^2(2\pi/\omega) & \dot{x}^2(0) - \dot{x}^2(2\pi/\omega) \\ 1 & x^3(0) - x^3(2\pi/\omega) & \dot{x}^3(0) - \dot{x}^3(2\pi/\omega) \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$X = \begin{bmatrix} x^1(0) & \dot{x}^1(0) \\ x^2(0) & \dot{x}^2(0) \\ x^3(0) & \dot{x}^3(0) \end{bmatrix} \tag{7}$$

이제 解를 取하기 위한 許容 誤差(附錄 단계 7)를 $\max. \{q_i\} < 1 \times 10^{-6}$ (8)

으로 하여 本節에서의 例題에 公同적으로 適用한다.

서로 다른 加振 주파수에 대해 그 解를 구하였으며 變位 $x(t)$ 의 軌跡을 Fig. 2에 보이고 있다. 그 결과는 해석적 방법으로 구해지는 定常 運動의 振幅, 位相과 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한 Table 1에는 몇개의 서로 다른 推定 初期值로 얻어지는 실제의 數值 解析 결과를 보이고 있다. Table에서 NIT는 境界 條件의 허용 오차, 식 (8)을 만족할 때까지 수행된 반복 횟수(附錄 단계 7)이며 $\|L\|$ 은 推定 初期值가 眞 初期值에 얼마나 근접한 값인가를 定量的으로 비교하기 위하여 아래와 같이 定義된 값이다.

$$\|L\| = \left(\sum_{i=1}^n q_i^2 \right)^{1/2} \quad (9)$$

Table 1의 결과를 보면 本 數值 解法이 나쁜 推定 初期值(즉, 큰 $\|L\|$)로도 매우 적은 NIT로 그 解를 주고 있으며 $\|L\|$ 에 의해 NIT는 별로 영향받지 않고 있음을 알 수 있다.

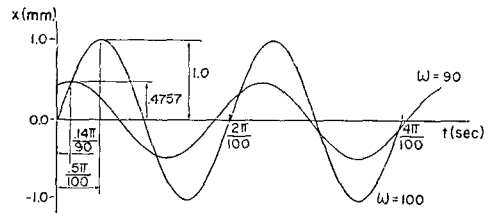


Fig. 2 Steady state motion for $\zeta=0.05$, $\omega_n=100$ rad/sec, $\delta_{st}=0.1$ mm.

Table 1 Results of problem 3.1. $\zeta=0.05$, $\omega_n=100$, $\delta_{st}=0.1$, $\nu=\omega/\omega_n=1$

	Initial guessing values		Terminal values		$\ L\ $	NIT
	$x^*(0)$	$\dot{x}^*(0)$	$x^*(2\pi/\omega)$	$\dot{x}^*(2\pi/\omega)$		
Case 1	1.0000	150.00	.727219	137.11	12.895	2
	1.0100	151.50	.734434	138.21	13.293	
	1.0201	153.02	.741721	139.32	13.695	
True solutions : $x(0) = .21032 \times 10^{-10}$ $\dot{x}(0) = .10000 \times 10^3$						
Case 2	100.00	900.00	72.963	742.01	160.29	2
	101.00	909.00	73.693	749.16	162.16	
	102.01	918.09	74.430	756.38	164.05	
True solutions : $x(0) = -.13529 \times 10^{-8}$ $\dot{x}(0) = .10000 \times 10^3$						
Case 3	10000	90000	7295.8	71534.3	18662.7	3
	10100	90900	7368.7	72249.4	18849.6	
	10201	91809	7442.4	72971.6	19038.3	
True solutions : $x(0) = -.85932 \times 10^{-11}$ $\dot{x}(0) = .10000 \times 10^3$						

Analytic solutions; $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=100$

3.2. 乾摩擦 저항이 존재하는 振動系

Fig. 3과 같은 振動係에서 質量 m 을 重力 下에 바닥과 접촉하며 수평선 상을 운동하고 있다. 바닥과 質量 사이에는 摩擦 저항이 존재하며 그 크기는 일정하고 수직 방향의 힘 mg 에 비례한다. 그러나 摩擦 力의 방향은 質量 m 의 운동 방향이 바뀔 때 따라 그 운동을 妨害하는 방향으로 바뀐다.

이 系의 운동 방정식을 구하면, $\dot{x} \neq 0$ 일 때

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x + \text{sign}(\dot{x})\mu g = \delta_{st}\omega_n^2 \cos \omega t \quad (10)$$

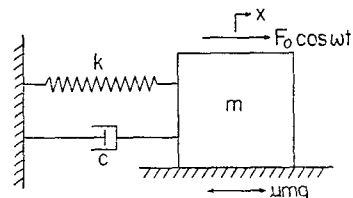


Fig. 3 Single degree of freedom system with Coulomb friction.

여기서 μ 는 摩擦 係數, g 는 重力 가속도, $\dot{x} > 0$ 일 때

$\text{sign}(\dot{x})=1$ 이며 $\dot{x}<0$ 일때 $\text{sign}(\dot{x})=-1$ 이다.

$\dot{x}=0$ 일때, 즉 質量의 순간적 靜止 상태에서는 質量이 곧 계속해서 움직이는 경우와 靜止 상태가 얼마간 계속되는 경우의 두가지 可能性이 존재한다. 이의 判定은 그 순간적 靜止 상태에서 質量 m 에 더해지는 外力과 스프링력의 합과 摩擦力的 크기를 비교함으로써 다음과 같이 결정된다.

質量에 더해지는 힘의 합의 절대치가 摩擦力보다 클 때, 즉

$$|x - \delta_{st} \cos \omega t| > \mu g / \omega_n^2 \quad (11)$$

일 때 m 은 곧 계속하여 움직이며 그 방향은 다음과 같이 결정된다.

$$x - \delta_{st} \cos \omega t < -\mu g / \omega_n^2 \text{ 일때, 양의 방향} \quad (12)$$

$$x - \delta_{st} \cos \omega t > \mu g / \omega_n^2 \text{ 일때, 음의 방향}$$

質量 m 에 더해지는 힘의 합의 절대치가 摩擦力보다 작을 때, 즉

$$|x - \delta_{st} \cos \omega t| < \mu g / \omega_n^2 \quad (13)$$

일때 m 은 움직이지 못하며 靜止 상태가 계속된다.

이 系の 定常 運動을 外力과 같은 週期를 갖는 週期

의 運動으로 가정하여 境界 條件과 행렬 Q, X 를 앞의 식 (5)~(7)과 同一하게 세운다.

以上과 같은 운동 방정식과 境界條件을 가지고 몇가지 다른 摩擦 係數, μ 값에 관하여 그 解를 구하였으며 그 결과를 Fig. 4에 보였다. 그림에서 보인 軌跡 $x(t)$ 를 살펴 보면 摩擦 係數에 따라 振幅, 位相, 운동형태가 크게 변하며 $\mu=0.07$ 인 경우에만 連續的 運動이 이루어지고 $\mu=0.08, 0.09$ 인 경우에는 靜止상태가 존재하는 不連續 運動이 됨을 알 수 있다. 이와 같이 摩擦力이 존재하는 系の 定常解를 구하는 방법으로 '等價 減衰(equivalent damping)' 개념을 이용하여 振幅의 近似解를 얻는 방법이 있다.⁷⁾ 이 방법은 摩擦力이 충분히 작아 質量의 連續的 運動이 가능한 경우에만 適用할 수 있으며 位相은 파악할 수 없게 된다. Fig.4(a)의 $\mu=0.07$ 인 경우에 等價 減衰 개념을 이용하면 振幅 0.1265mm가 얻어지며 이것은 Fig. 4(a)의 결과와 잘 일치하고 있다. Table 2에 $\mu=0.08$ 일 때의 數值 解析 결과를 보였다. 이 결과는 Table 1의 결과에 비해 많은 NIT가 所要되며 또한 $\|L\|$ 에 의해 영향 받

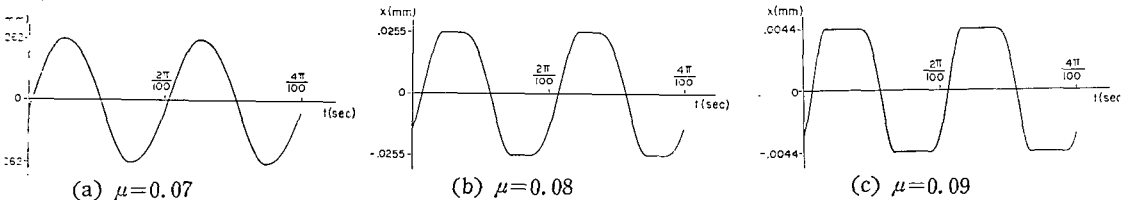


Fig. 4 Steady state motion for $\zeta=0.05, \omega=\omega_n=100$ rad/sec, $\delta_{st}=0.1$ mm, $g=9800$ mm/sec².

Table 2 Results of problem 3.2.
 $\zeta=0.05, \omega_n=100, \delta_{st}=0.1, \nu=1, \mu=0.08, g=9800$

	Initial guessing values		Terminal values		$\ L\ $	NIT
	$x^k(0)$	$\dot{x}^k(0)$	$x^k(2\pi/\omega)$	$\dot{x}^k(2\pi/\omega)$		
Case 1	-0.01400	2.7000	-0.01468	2.7180	.01797	3
	-0.01414	2.7270	-0.01475	2.7292	.00224	
	-0.01428	2.7543	-0.01483	2.7405	.01374	
True solutions : $x(0)=-.01469 \dot{x}(0)=2.7201$						
Case 2	-0.07000	10.000	-0.03030	7.4282	2.5721	15
	-0.07070	10.100	-0.03034	7.5037	2.5966	
	-0.07141	10.201	-0.03038	7.5801	2.6212	
True solutions : $x(0)=-.01469 \dot{x}(0)=2.7201$						
Case 3	-1.1000	15.000	-0.54912	27.035	12.048	
	-1.1110	15.150	-0.55691	27.197	12.060	
	-1.1221	15.302	-0.56478	27.360	12.071	
Do not converge within the limit of NIT, set 50.						

고 있음을 보이고 있다.

3.3. 衝突對(Impact Pair)

衝突對의 모델은 틈새를 갖는 기계적 接合 부분 또는 백래쉬(backlash)가 있는 기어 등 衝突이 발생하는 系의 해석을 위하여 Dubowsky^{2,3)}에 의해 처음으로 소개되었으며 Fig. 5는 그 모델을 보이고 있다. 그림에서 質量 m_1 은 外力 $F(t)$ 에 의해 조화함수적으로 加振되고 있으며 m_1 의 兩壁 사이에 갇힌 質量 m_2 는 兩壁 사이를 아무런 저항없이 움직이며 이 壁들과 衝突한다. Fig. 5에서와 같이 質量 m_1 의 振動 중앙을 原點으로 하여 m_1, m_2 의 變位를 각각 x_1, x_2 로 하면 다음과 같은 운동 방정식이 얻어진다.

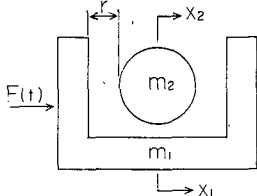


Fig. 5 Impact pair model.

$$|x_1 - x_2| < r \quad (14)$$

일때 衝突은 발생하지 않으며 系의 운동 방정식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -m_1 \omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 A 는 加振 振幅이며 r 은 m_1, m_2 사이의 틈새, ϕ 는 位相, ω 는 加振 주파수이다.

$$|x_1 - x_2| = r \quad (16)$$

일때 衝突이 발생하며 衝突이 순간적으로 이루어진다고 가정하면 衝突時 變位 x_1, x_2 는 不變하나 속도 \dot{x}_1, \dot{x}_2 는 아래와 같이 不連續적으로 바뀌게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,f} &= \frac{1-ue}{1+u} \dot{x}_{1,i} + \frac{u+ue}{1+u} \dot{x}_{2,i} \\ \dot{x}_{2,f} &= \frac{1+e}{1+u} \dot{x}_{1,i} + \frac{u-e}{1+u} \dot{x}_{2,i} \end{aligned} \quad (17)$$

윗식에서 e 는 反發 係數, $u=m_2/m_1$ 는 質量比이며 i 는 衝突 直前, f 는 衝突 直後의 값을 표시한다.

이 系의 定常 운동을 加振 週期와 같은 週期를 갖는 週期的 운동으로 가정하면 境界 條件

$$q(x(0)) = \begin{Bmatrix} x_1(0) - x_1(2\pi/\omega) \\ \dot{x}_1(0) - \dot{x}_1(2\pi/\omega) \\ x_2(0) - x_2(2\pi/\omega) \\ \dot{x}_2(0) - \dot{x}_2(2\pi/\omega) \end{Bmatrix} = 0 \quad (18)$$

을 얻으려 여기서 $x^T(0) = [x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0), \dot{x}_2(0),$

$\phi]$ 이다. 衝突에 의하여 m_1 의 순수한 조화함수적 운동이 깨지므로 ϕ 에 의해 $x_1(0), \dot{x}_1(0)$ 가 결정되지 못함을 주의하라.

이제 Fig. 6에 보이고 있는 바와 같이 衝突對의 어떤 假像의 定常 운동을 생각하자. 그림에서와 같이 $x_1(t) = x_2(t)$ 가 되는 點이 존재하게 될 것이며 이때의 시간을 특별히 $t=0$ 로 擇하자. 그러면 아래와 같은 初期 條件이 세워진다.

$$x_2(0) = x_1(0) \quad (19)$$

또한 식 (A3), (A4)의 행렬 Q, X 는 다음과 같이 결정된다.

$$Q = \begin{Bmatrix} 1 & x_1^1(0) - x_1^1(2\pi/\omega) & \dot{x}_1^1(0) - \dot{x}_1^1(2\pi/\omega) \\ x_2^1(0) - x_2^1(2\pi/\omega) & \dot{x}_2^1(0) - \dot{x}_2^1(2\pi/\omega) \\ 1 & x_1^2(0) - x_1^2(2\pi/\omega) & \dot{x}_1^2(0) - \dot{x}_1^2(2\pi/\omega) \\ x_2^2(0) - x_2^2(2\pi/\omega) & \dot{x}_2^2(0) - \dot{x}_2^2(2\pi/\omega) \\ \dots \\ 1 & x_1^5(0) - x_1^5(2\pi/\omega) & \dot{x}_1^5(0) - \dot{x}_1^5(2\pi/\omega) \\ x_2^5(0) - x_2^5(2\pi/\omega) & \dot{x}_2^5(0) - \dot{x}_2^5(2\pi/\omega) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$X = \begin{Bmatrix} x_1^1(0) & \dot{x}_1^1(0) & \dot{x}_2^1(0) & \phi^1 \\ x_1^2(0) & \dot{x}_1^2(0) & \dot{x}_2^2(0) & \phi^2 \\ \dots \\ x_1^5(0) & \dot{x}_1^5(0) & \dot{x}_2^5(0) & \phi^5 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

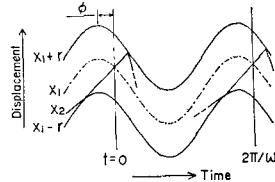
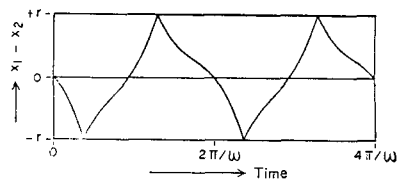


Fig. 6 Steady state motion of an impact pair.

衝突對에 관한 실험은 Veluswami에 의해 이미 수행된 바 있다⁹⁾. 그는 兩 판대기 사이에 鋼球를 매달고 그 판대기를 加振機로 加振시켜 定常 狀態에서 그 衝突 형태를 관찰하였다. 이제 이곳에서 구한 定常解와 그의 실험 결과를 비교하기 위하여 그의 실험 내용과 同一하게 $m_1=0.2799 \text{ lb s}^2/\text{in.}$, $m_2=0.000545 \text{ lb s}^2/\text{in.}$, $r=0.028 \text{ in}$ 로 하여 그 解를 구한다.

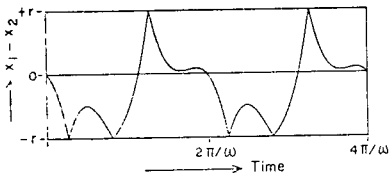
Fig. 7에 本 數值 解法으로 구한 몇가지 衝突 형태의 相對 變位를 보이고 있다. 그림에서 (n, m) mode는 한 週期 동안 한쪽 壁에 n 번 衝突이 발생한 後에



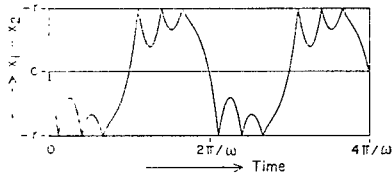
(a) (1,1) mode

Table 3 Results of prpbem 3.3.
 $m_1=0.2799, m_2=0.000545, r=0.028, A=0.189, \omega=50$

	Initial guessing values				Terminal values				L	NIT
	$x_1^k(0)$	$\dot{x}_1^k(0)$	$\dot{x}_2^k(0)$	ϕ^k	$x_1^k(2\pi/\omega)$	$\dot{x}_1^k(2\pi/\omega)$	$\dot{x}_2^k(2\pi/\omega)$	$x_2^k(2\pi/\omega)$		
Case 1	.16188	6.5203	10.372	-.74856	.17556	6.5226	.16196	9.1426	1.2297	11
	.16204	6.5268	10.383	-.74931	.17590	6.5292	.16216	9.1404	1.2423	
	.16220	6.5333	10.393	-.75006	.17623	6.5357	.16237	9.1381	1.2549	
	.16236	6.5398	10.403	-.75081	.17656	6.5423	.16258	9.1359	1.2675	
	.16252	6.5464	10.414	-.75156	.17690	6.5489	.16279	9.1337	1.2802	
True solutions : $x_1(0)=.14716, \dot{x}_1(0)=5.9275, x_2(0)=x_1(0), \dot{x}_2(0)=9.4294, \phi=-.68051$										
Case 2	.61807	24.896	39.603	-2.8581	3.4187	24.928	3.4052	22.981	17.085	25
	.62116	25.020	39.801	-2.8724	3.4537	25.051	3.4434	23.691	16.599	
	.62427	25.145	40.000	-2.8868	3.4890	25.175	3.4812	24.421	16.096	
	.62739	25.271	40.200	-2.9012	3.5245	25.300	3.5186	25.167	15.580	
	.63053	25.397	40.401	-2.9157	3.5603	25.425	3.5555	25.927	15.055	
True solutions : $x_1(0)=.14716, \dot{x}_1(0)=5.9275, x_2(0)=x_1(0), \dot{x}_2(0)=9.4294, \phi=-.68051$										
Case 3	.73580	29.638	47.147	-3.4026	4.7703	29.665	4.7516	32.793	15.441	
	.73948	29.786	47.382	-3.4196	4.8120	29.813	4.7909	33.350	15.163	
	.74318	29.935	47.619	-3.4367	4.8539	29.961	4.8296	33.970	14.829	
	.74689	30.084	47.857	-3.4538	4.8959	30.131	4.8686	23.744	24.812	
	.75063	30.235	48.097	-3.4711	4.9380	30.261	4.9172	34.387	14.926	
Do not converge within the limit of NIT, Set 50.										



(b) (1,2) mode



(c) (3,3) mode

Fig. 7 Relative displacement for $e=0.07, r=0.028\sin$.

다른쪽 벽에 m 번 충격이 발생하는 형태를 말한다. Fig. 8에는 加振 振幅, 週波數에 따른 충격 형태의 변화를 보였으며 Veluswami의 鋼板, 鋼球로 얻은 실험 결과와 비교하였다. Fig. 8의 결과를 보면 加振 振幅이 작은 경우에는 兩壁에 각각 한번씩 충격이 발생하는 (1,1) mode가 되나 振幅이 증가할수록 (1,2),

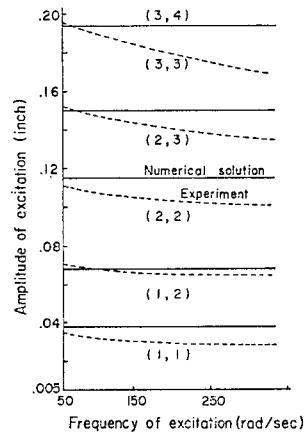


Fig. 8 Regimes of modes for $e=0.07, r=0.028 \sin$.

(2,2), (2,3),의 順으로 충격 횟수가 증가하는 多 衝擊이 발생함을 알 수 있다. 이 결과는 그의 실험 결과와 잘 일치하며 또한 各 mode의 領域도 定量的인 면에서 서로 잘 일치하고 있음을 보인다. Table 3의 결과를 보면 例題 3.2와 경우와 마찬가지로 많은 NIT가 所要되며 數值 解法의 수렴도가 推定 初期值에 의해 많은 영향을 받고 있음을 알 수 있다.

4. 討 論

本 논문에서 제시하고 있는 數值解法은 振動의 週系期的 運動이 그 基本 假정이 되고 있으며 그 外의 다른 條件에 의해 應力 범위가 制約 받지 않는다. 따라서 이 數值 解法은 振動系의 運動이 週期性을 가질 때 系의 선형, 비선형성에 관계 없이 이용될 수 있다. 이곳에서와 같이 初期值 문제를 境界值 문제로 바꾸어 해석하는 시도는 衝突이 발생하는 振動系의 해석에서 볼 수 있다^{3,10,11}. 이들은 定常 運動의 구체적인 형태, 예를 들면 衝突對의 경우 定常 運動의 週期성과 (1,1)mode의 특별한 衝突 형태를 가정하여 해석적 방법으로 그 解를 구하고 있다^{10,11}. 그러므로 그 결과는 가정된 특별한 형태에 制限되며, 定常 運動 형태의 예측이 어려워 그 가정을 세우기가 곤란한 경우 또는 그 형태가 복잡한 多衝突의 경우 그와 같은 解를 구하는 것은 매우 어렵게 된다. 그러나 이곳의 접근 방법에서는 定常 運動의 특별한 형태 가정이 필요치 않으므로 그 解의 형태가 制約 받지 않으며, 또한 그 解를 數值 解法으로 구하고 있으므로 복잡한 해석적 계산을 피할 수 있게 된다.

불연속성이 存在하는 振動系를 數值 시뮬레이션으로 解析할 경우 數值 積分은 系의 運動이 定常 狀態에 도달할 때까지 계속 수행되어야 하므로 많은 불연속점을 거치게 된다. 따라서 컴퓨터의 計數化에 의해 불연속점에서 발생한 誤差는 每 불연속점을 지나때마다 계속 累積되어 잘못된 결과를 가져올 위험이 높아지게 된다. 그러나 本 數值解法은 數值 시뮬레이션의 경우에 비해 매우 짧은 한週期만을 다루므로 이와 같은 문제점이 극복된다.

Table 1~3의 결과를 比較하면 Table 1의 선형 振動系의 경우 매우 적은 NIT로 그 解를 주고 있으며 그것은 推定初期值에 별로 영향받지 않음을 알 수 있다. 이해 비해 Table 2,3의 결과는 推定初期值에 의해 數值 解法의 수렴도가 영향받고 있으며 NIT도 Table 1의 경우보다 훨씬 많음을 보이고 있다. 이것으로부터 本 數值 解法의 수렴도는 系의 自由度가 커질수록, 비선형성의 정도가 증가할수록 初期 條件의 推定值에 의해 더욱 영향받으며 수렴 속도가 둔화됨을 알 수 있다. 本 數值 解法의 應用性을 보다 더 높이기 위해서는 수렴도에 관한 有關 연구와 解의 實存 可能性(existability), 唯一性(uniqueness)에 관한 연구가 더욱 필요할 것으로 보인다.

5. 結 論

本 논문에서는 비선형 강제 진동의 定常解를 구하기 위한 數值 解法을 제시하였다. 이 解法에서는 振動系의 定常 運動이 週期的 運動이라는 기본 가정으로 부터 임의의 시간에서의 모든 狀態值는 한週期 後에서의 값들과 같아야 한다는 兩點 境界值 문제를 세워 Waner's algorithm에 의해 그 定常解를 구한다.

이 方法으로써 불연속, 비선형 강제 진동에 흔히 사용되는 數值 시뮬레이션에서 發生하는 問題點을 극복할 수 있으며 선형, 비선형 강제 진동의 定常解를 구하는 데 유용함을 보였다.

附 錄

식 (1)의 미분 방정식에 아래의 境界 條件이 주어졌을 때

$$\phi_i(\underline{x}(x(0), t_i))=0, i=1, 2, \dots, n \tag{A1}$$

여기서 $\underline{x}(0)$ 는 眞 初期 條件 벡타(true initial condition vector)이다.

Waner's algorithm에 의해 解를 얻는 단계는

1. m개의 眞初期 條件(즉, 식 (A1)에서 $t_i=0$ 일 때의 조건)이 주어졌을 때 필요한 나머지 $n-m$ 개의 初期 條件을 推定하여 이것을 要素로 하는 推定 初期 條件 벡타(guessing initial condition vector) $\underline{x}^k(0)$ 를 $n-m+1$ 개 세운다.
2. $\underline{x}^k(0)$ 와 주어진 m개의 初期 條件을 가지고 아래와 같은 境界 條件 離脫 벡타를 구한다.

$$\underline{q}(\underline{x}^k(0))=\underline{\psi}(\underline{x}(\underline{x}^k(0), t_i))=\underline{\psi}(\underline{x}^k(t_i))\approx 0 \tag{A2}$$

3. 아래와 같이 定義된 행렬 \underline{Q} , \underline{X} 를 構成한다.

$$\underline{Q}=\begin{bmatrix} 1, \underline{q}^T(\underline{x}^1(0)) \\ 1, \underline{q}^T(\underline{x}^2(0)) \\ \dots\dots\dots \\ 1, \underline{q}^T(\underline{x}^{n-m+1}(0)) \end{bmatrix} \tag{A3}$$

$$\underline{X}=\begin{bmatrix} \{\underline{x}^1(0)\}^T \\ \{\underline{x}^2(0)\}^T \\ \dots\dots\dots \\ \{\underline{x}^{n-m+1}(0)\}^T \end{bmatrix} \tag{A4}$$

4. 아래와 같은 행렬식으로 부터 새로운 推定 初期 條件 벡타 $\underline{x}(0)$ 를 구한다.

$$\underline{x}^T(0)=\underline{b}^T \underline{Q}^{-1} \underline{X} \tag{A5}$$

여기서 $\underline{b}^T=[1, 0, 0, \dots]$ 이다.

이 $\underline{x}(0)$ 로 단계 2를 수행하여 새로운 $\underline{q}(\underline{x}(0))$ 를 구한다.

5. 단계 3에서 세운 행렬 Q 에서 아래와 같이 定義된 ϵ 를 가장 크게 하는 행(row)을 찾는다.

$$\epsilon^* = \underline{q}^T(\underline{x}^*(0)) \cdot \underline{q}(\underline{x}^*(0)), \quad (A6)$$

6. Q 에서 단계 5에서 찾는 행의 $\underline{q}(\underline{x}^*(0))$ 대신 단계 4에서 구한 $\underline{q}(x(0))$ 를 대입한다. X 에서도 같은 행의 $\{x^k(0)\}^T$ 대신 단계 4에서 구한 $\{x(0)\}^T$ 를 대입한다. 이렇게 하여 새로운 Q , X 가 構成된다.

7. 단계 4~6을 반복 수행하며 每 반복시 단계 4에서 새로히 구한 $\underline{q}(x(0))$ 가 주어진 許容 誤差를 만족할 때 반복을 멈추고 이때의 $x(0)$ 를 眞初期值(true initial value)로 取하여 $x(t)$ 를 구한다.

참 고 문 헌

1. Grubin, C., "On the Theory of the Acceleration Damper", J. of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 23, 1956, pp.373-378.
2. Dubowsky, S. and Freudenstein, F., "Dynamic Analysis of Mechanical Systems with Clearances Part 2: Dynamic Response", J. of Engineering for Industry, Trans. ASME, Series B, Vol. 93, No.1, Feb. 1971, pp.310-316.
3. Sikarskie, D.L. and Paul, B., "Periodic Motion of a Two-Body System Subjected to Repetitive Impact", J. of Engineering for Industry, Trans. ASME, Series B, Vol.91, No.4, Nov. 1969, pp. 931-938.
4. Veluswami, M.A., Crossley, F.R.E., and Horvay, G., "Multiple Impacts of a Ball Between Two Plates Part 2 : Mathematical Modeling", J. of Engineering for Industry, Trans. ASME, Serise B, Vol.97, No.3, Aug. 1975, dp.828-835.
5. Matussek, M.R., "On Waner's Algorithm for the Solution of Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations", J. of Optimization Theory and Applications, Vol.20, No.1, Sep. 1976, pp.37-46.
6. Matussek, M.R., "Direct Shooting Method, Linearization, and Nonlinear Algebraic Equations", J. of Optimization Theory and Applications, Vol.14, No.2, 1974, pp.199-212.
7. Robert, F. Steidel, Jr., An Introduction to Mechanical Vibrations, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1971.
8. Dubowsky, S. and Freudenstein, F., "Dynamic Analysis of Mechanical Systems with Clearances Part 1 : Formulation of Dynamic Model", J. of Engineering for Industry, Trans. ASME, Series B, Vol.93, No.1, Feb. 1971, pp.305-309.
9. Veluswami, M.A. and Crossley, F.R.E., "Multiple Impacts of a Ball Between Two Plates Part 1 : Some Experimental Observations", J. of Engineering for Industry, Trans. ASME. Series B, Vol. 97, No.3, Aug. 1975, pp.820-827.
10. Sadek, M.M. and Mills, B., "Effect of Gravity on the Performance of an Impact Damper Part 1 : Steady-State Motion", J. Mechanical Engineering Science, Vol.12, No.4, 1970, pp.268-277.
11. Masri, S.F. and Caughey, T.K., "On the Stability of the Impact Damper", J. of Applied Mechanics, Trans. ASME, Series E, Vol.33, No.3, Sep. 1966 pp. 586-592.