52 大韓機械學會論文集 第7卷 第1號, pp. 52～63, 1983.

<論 文>

有限要素法에 의한 線型彈性體의 特定摩擦接觸問題에 대한 數値解析

宋 永 俊*

(1982年 10月 16日 接受)

Numerical Analysis of a Class of Contact Problems involving Friction Effects in Linear Elasticity by Finite Element Methods

Y. J. Song

Abstract

The purpose of the study is to find development of contact area, contact pressure and friction forces occurring at joints or connection areas inbetween structural members or mechanical parts. The problem has a pair of difficulties intrinsically; a constraint of displacement due to contact, and presence of work term by nonconservative friction force in the variational principle of the problem. Because of these difficulties, the variational principle remains in the form of inequality. It is resolved by penalty method and perturbation method making the inequality to an equality which is proper for computational purposes. A contact problem without friction is solved to find contact area and contact pressure, which are to be used as data for the analysis of the friction problem using perturbed variational principle. For numerical experiments, a Hertz problem, a rigid punch problem, and the latter one with friction effects are solved using Q_2-finite elements.

1. 序 論

本 硏究는 線型彈性體가 거친(rough) 剛體基盤위에 一向的(unilaterally)으로 놓여진 상태에서 荷重이 작용하여 변형이 일어날 때 생기는 새로운 접촉부위를 결정하고 이에 따른 접촉압과 마찰력을 유한요소법을 이용하여 수치해석하는데 있다.

이러한 문제는 근본적으로 두가지의 어려운 점을 안고 있다. 이는 강체기반의 존재로 인한 부등식 형태의 접촉구속조건과 미분불가능형 범함수로 주어지는 마찰력이 한 가상일이 변분원리(variational principle)에 나타나므로 해서 변분원리가 부등식의 형태를 갖게 된다는 점이다. 이는 수치해(解)를 구하기 위한 실제적인 계산을 행한다는 측면에서는 바람직하지 못한 상태이다.

본 연구에서는 부등식의 형태로 주어지는 변분원리를 等式化 하기 위하여 기하학적인 구속조건(접촉조건)은 벌칙법(penalty methods)을 사용하고 절대치연산을 포함하고 있는 가상일항은 정규화(regularization) 과정을 사용하여 수치해석 기법상의 어려움을 해소시킨다. 취급되는 변형체 자체는 선형탄성체이나 어려움으로 지적되는 것은 未知의 접촉면을 찾아내야 하는 移動境界問題(moving boundary problem)와 마찰로 인한 非保存性힘이 한 가상일은 미분불가능형식이므로 이의 변분식화(variational formulation)는 본질적으로 고도의 非線型的인 요소를 지니고 있다. 이러한 類의 문제는 고체역학분야에서 많은 연구를 요하는 난제중의 하나로 남아 있다.

이러한 문제의 解를 완전한 閉鎖形(closed form)으

* 正會員, 陸軍士官學校

로 구한다는 것은 불가능한 일이며 따라서 수치해석만 이 유일한 방법으로 받아들여지고 있다. 본 연구에서는 먼저 마찰효과를 무시한 상태에서의 단순접촉문제를 다루고 이의 解를 데이터로 하여 마찰효과를 포함한 접촉문제를 수치해석한다. 마찰효과를 무시한 접촉문제에서 취급할 모델은 Signorini 문제로 1963년에 Fichera[1]에 의하여 연구된 바 있다. 解의 存在性이나 唯一性, 正規性(regularity)와 같은 수학적인 해석은 Duvaut와 Lions[2], 그리고 Kalker[3]의 연구가 있으며 변분부등식(variational inequality)을 사용하여 Signorini 문제를 정의하고 이를 유한요소법으로 해석한 예는 *Hlavaček*와 *Lovišek*[4] 그리고 Kikuchi와 Oden[5], Song[6]의 연구가 있다.

그 중에서 解를 찾아내려고 하는 對象인 適合變位(admissible displacements)는 부등식으로 주어지는 변위에 대한 구속조건에 의하여 제한을 받음으로 解를 구하기 위해서는 부등형식(inequality)의 방정식을 직접 풀어야 된다. 부등형식은 Glowinski, Lions와 Trémolières[7]가 보인 바와 같이 projection map을 이용한 여러가지 勾配法(gradient methods)으로 풀수는 있지만 실제적으로 계산하는 입장에서는 바람직 하지 못한 상태이다. 이와 같은 적합집합에 가해지는 구속조건을 풀어주기 위해 쓰이는 가장 보편적인 방법은 Uzawa의 반복 알고 리듬을 사용한 Lagrange 乘數法(multiplier method)이다. 탄성체의 접촉문제 해석에 이와 같은 방법을 사용하여 유한요소법으로 수치해석한 예는 Paczell[8]과 Kikuchi와 Song[9], Chan과 Tuba[10] 그리고 Hughes & al[11] 등이 있다. 그러나 Lagrange 승수법은 변위함수에는 아무런 구속조건이 가해지지 않으나 乘數의 역할을 하는 접촉스트레스의 부호가 마이너스(즉 압축력)이어야 한다는 제한조건 때문에 Uzawa의 반복 알고 리듬은 그 수렴속도가 느린 단점이 있다.

부등형식의 구속조건을 해제하기 위한 또 다른 방법으로는 Courant, Friedrich와 Lewy[12]에 의해 소개된 외부벌칙법(exterior penalty methods)이 있으며 이는 *Zangwill*[13]에 의해 더욱 연구 발전되었다. Courant[14]은 Dirichlet 경계조건 $u=0$을 벌칙법의 개념을 이용하여 변위의 고정조건(fixed condition) 대신에 대단히 강한 스프링帶가 설치되어 있는 것으로 대치하였다. 이는 Dirichlet 경계조건을 혼합경계조건인 $\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{1}{\varepsilon_1}u=0$으로 근사시키는 결과가 되겠다. 여기서 ε_1은 대단히 작은 陽의 實數로 벌칙매개변수(penalty parameter)라 하면 $\frac{1}{\varepsilon_1}$은 물리적인 量으로 나타낸다면 스프링常數가 되겠다. 본 연구에서는 變位에 대한 접촉구속조건을 해소하기 위하여 벌칙법을 사용한다.

變形體가 기반에 맞닿게 되면 접촉압과 아울러 Coulomb 법칙에 따르는 마찰력이 발생하게 된다. 마찰력에 의한 가상일을 변분식화 한다면 미분불가능의 형을 갖게 되며 문제의 변분원리에 따른 서술은 부등식의 형태로 남게 된다. 이러한 난점은 마찰력에 의한 정규화형식(regularized form)으로 근사하여 이완시킨다. 즉 미분불가능항에 원활한 섭동(smooth perturbation)을 도입시켜 미분가능한 형태로 바꾸어 변분등식을 얻을 수 있게 한다. 정규화형식은 그 근사의 정도가 섭동매개변수(perturbation parameter) ε_2에 좌우되며 ε_2가 零에 가까워짐에 따라 원래의 미분불가능형의 마찰항이 재생된다. 마찰접촉에 대한 解의 일반존재성론(existence theory)은 아직도 미개척 분야이며 따라서 완성된 근사론(approximation theory)은 펴지지 않은 상태이다. 解의 존재성이 입증되더라도 解의 유일성은 더욱 까다로운 문제로 등장하게 되며 실제로 유일성은 증명할 수 없는 경우가 대부분이다. 변형체의 경계에 연직접촉압이 주어지고 사전에 접촉면도 알려져 마찰력에 의한 영향만이 문제점으로 남아있는 특별한 경우에 대해서는 Davaut와 Lions[2]에 의해 存在論이 연구되었다. 마찰효과를 고려한 탄성체의 접촉문제에 대한 유한요소법에 의한 해석은 Kalker[15], Sewell[16], Panagiotopoulos[17] 등에 의해 시도되었다.

본 연구에서는 마찰효과를 무시한 경우의 Signorini 문제에서 i) 벌칙법에 의한 근사해의 수렴도를 벌칙매개변수 ε_1의 항으로 推定하고 ii) 문제를 유한요소법으로 풀었을 경우에 벌칙유한요소근사해의 오차추정을 ε_1과 요소크기 매개변수 h의 항으로 구하며 iii) 연직경계접촉압이 주어진 Coulomb 마찰문제의 정규화解의 수렴도를 섭동매개변수 ε_2의 항으로 추정하며 iv) 위의 결과를 일반마찰접촉 문제에 적용시킬 수 있는 알고 리듬을 구성하고 v) 이들 방법의 실제문제에의 적용가능성을 보여 줄 수치실험을 행한다.

2. 벌칙법에 의한 마찰을 고려하지 않은 접촉문제

2.1. 접촉문제의 서술

고전적 의미에서 일반적인 Coulomb 마찰접촉문제는

다음과 같은 제어방정식 체계로 나타낼 수 있다.

$$\left.\begin{array}{l} \Omega \text{에서} \begin{cases} \sigma_{ij}(u),_j + f_i = 0 \\ \sigma_{ij}(u) = E_{ijkl}\epsilon(u)_{kl} \end{cases} \\ \Gamma_D \text{에서 } u_i = 0 \\ \Gamma_F \text{에서 } \sigma_{ij} n_j = t_i \\ \Gamma_C \text{에서} \begin{cases} u_n < s \text{ 면 } \sigma = 0, \ \sigma_T = 0 \\ u_n = s \text{ 이고 } \begin{cases} |\sigma_T| < \nu_f |\sigma| \text{면 } \sigma < 0, u_T = 0 \\ |\sigma_T| = \nu_f |\sigma| \text{면 } \sigma < 0 \text{이고} \\ u_T = -\lambda \sigma_T \text{ 인 } \lambda > 0 \text{ 가 존재} \end{cases} \end{cases} \end{array}\right\} \quad (2.1)$$

여기서 사용된 기호는 다음과 같이 정의된다.

Ω =선형탄성 변형체

Γ =탄성체의 경계 $\Gamma = \overline{\Gamma}_C \cup \overline{\Gamma}_F \cup \overline{\Gamma}_C$

Γ_F=외부하중이 작용하는 경계

Γ_D=변위량이 주어진 경계

Γ_C=변형후 접촉가능면을 포함하고 있는 접촉경계

u=변위벡타, u_i 변위성분

σ_{ij}=스트레스 텐서

E_{ijkl}=탄성계수 텐서

$\epsilon(u)_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$, $\phi_{i,j} = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_j}$

f_i =체적력 성분

t_i =경계하중 성분

n =탄성체경계에서의 단위법선벡타

$u_n = u_i n_i$, Γ_C에서의 변위의 법선성분

$\sigma = \sigma_{ij} n_j n_i$, 접촉압

σ_T=마찰력

s =탄성체 Ω와 강체기반간의 최초間隙을 나타내는 거리함수

ν_f=마찰계수

여기서 보편적으로 통용되는 합기호법(summation convention)이 사용되고 있다.

먼저 마찰효과를 무시한 접촉문제를 정의한다. 이 경우의 일향적 접촉조건은 다음과 같이 정의된다.

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma_C \text{에서 } u_n - s \leq 0, \ \sigma < 0 \\ \qquad (u_n - s)\sigma = 0 \end{array}\right\} \quad (2.2)$$

조건 (2.2)는 탄성체 Ω의 변위는 강체기반이 있음으로 해서 제한된 범위내에서 일어나야 하며 접촉압 σ는 Ω가 강체기반과 접촉이 있을 때에만 발생한다는 뜻이 된다.

前述한 바와같이 강체기반을 스프링常數가 대단히 큰 역속적인 스프링帶로 대체하여 근사한다.

대단히 작은 常數 $\epsilon_1 > 0$을 사용하여 스프링상수를 $\frac{1}{\epsilon_1}$로 표시한다면 $\epsilon_1 \to 0$에 따라 스프링대는 강체기반이 된다. 따라서 조건 (2.2)는 다음과 같이 대치될 수 있겠다.

$$\sigma_E = -\frac{1}{\epsilon^1}(u_{\epsilon n} - s)^+, \ b^+ = \max(0, b) \quad (2.3)$$

조건 (2.2)을 (2.3)으로 대치함은 경계 Γ_C상의 변위가 강체기반의 존재로 인한 구속조건 $u_n - s \leq 0$을 위반하게 될 때에는 그 지점에서 강력한 스트레스가 벌칙으로 발생하게 되는 결과가 된다. 체적력 f_i가 탄성체 Ω에 작용하고 있고 Γ_D는 고정되어 있고 경계하중 t_i가 경계 $\Gamma_F = \Gamma - \Gamma_D - \Gamma_C$에 작용하고 있다고 가정하자. 그러면 계의 평형방정식은

$$\begin{array}{ll} \Omega \text{에서} & -\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \\ \Gamma_D \text{에서} & u_i = 0 \\ \Gamma_F \text{에서} & \sigma_{ij} n_j = t_i \end{array} \quad (2.4)$$

이 된다. 변형체 Ω가 선형탄성체라면 Hooke의 탄성계수텐서 E_{ijkl}은 解의 存在性을 가능케 하는 다음과 같은 성질을 가진다.

$$E_{ijkl} = E_{klij} = E_{ijlk} \quad (2.5)$$

$$m > 0; \ E_{ijkl} X_{ij} X_{kl} \geq m X_{mn} X_{mn}, \ X_{mn} = X_{nm}$$

이와 같은 벌칙화문제에 대한 변분원리는 다음과 같이 표현된다.

$$u_\epsilon \in V, \ B(u_\epsilon, v) + \frac{1}{\epsilon_1}((u_{\epsilon n} - s)^+, v_n) = f(v), v \in V \quad (2.6)$$

여기서

$$V = \{v \in H'(\Omega) : \Gamma_D \text{에서} \quad v = 0\} \quad (2.7)$$

$$B(u, v) = \int_\Omega E_{ijkl} \epsilon(u)_{ij} \epsilon(v)_{kl} \, dx \quad (2.8)$$

$$f(v) = \int_\Omega f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_F} t_i v_i \, d_s \quad (2.9)$$

$$H'(\Omega) = \{v : v_i \in L^2(\Omega), \ v_{i,j} \in L^2(\Omega)\}$$

$$L^2(\Omega) = \{v : \int_\Omega v_i v_i dx < \infty\}$$

Sobolev 놈(norm) $\|\circ\|_1$은

$$\|v\|_1 = \{\int_\Omega (v_i v_i + v_{i,j} v_{i,j}) dx\}^{1/2}$$

로 정의되며 함수 $(\circ, \circ)$는 $L^2(\Gamma_C)$ 內積으로 $(\tau, v_n) = \int_{\Gamma_C} \tau v_n \, ds$이며 이의 놈 $|||\circ|||$은 $|||\tau||| = (\tau, \tau)^{1/2}$로 정의된다. 量 $\frac{1}{2}B(v, v)$는 系의 스트레인 에너지범함수이며 $f(v)$는 하중계의 위치에너지 함수로 $f(\circ)$는 일차형식이며 $B(\circ, \circ)$는 쌍일차형식(bilinear form)이다.

2.2. 벌칙화문제의 존재성

변분원리 (2.6)로 주어지는 벌칙화 문제에 解가 존재하는가 하는 점은 다음과 같이 전개된다. 연산자 $A : V \to V'$(V의 雙對空間(dual space))를 다음과 같이 정의한다.

$$\langle A(u), v \rangle = B(u, v) + \frac{1}{\epsilon_1}((u_n - s)^+, v_n) \quad (2.10)$$

경계 Γ_D의 측도가 meas$(\Gamma_D) > 0$이라는 가정아래 Korn의 부등식

$$\int_\Omega \epsilon_{ij}(v) \epsilon_{ij}(v) dx \geq c_m \|v\|_1^2, \ v \in V$$

을 이용하면 스트레인에너지 함수의 블록성(convexity) 가정 (2.5)에 의해 B는 강한 의미로 단조(strongly monotone)하게 된다. 즉,

$$B(u-v,\ u-v)\geq cm\|u-v\|_1^2 \tag{2.11}$$

또한

$$((u_n-s)^+,\ u_n-v_n)-((v_n-s)^+,\ u_n-v_n)\geq$$
$$|||(u_n-s)^+-(v_n-s)^+|||^2\geq 0$$

이 만족하므로 모든 $u,\ v\in V$에 대하여

$$\langle A(u)-A(v),\ u-v\rangle\geq m\|u-v\|_1^2 \tag{2.12}$$

인 어떤 상수 $m>0$이 존재한다. 이는 곧 연산자 A가 공간 V에서 강한 의미로 단조함을 뜻한다. 또한 얻을 수 있는 관계는 모든 $u,\ v,\ w\in V$에 대하여

$$\langle A(u)-A(v), w\rangle\leq M\|u-v\|_1\|w\|_1+\frac{1}{\varepsilon_1}|||u_n-v_n|||\ |||w_n|||$$

으로 상수 M은 다음과 같다.

$$M=(\max_{i,j,l,k}\ \max_{x\in\Omega}|E_{ijkl}(X)|)\mathrm{meas}(\Omega) \tag{2.13}$$

Trace 정리를 이용하면

$$|||w_n|||\leq c\|w\|_1$$

이므로

$$\langle A(u)-A(v),\ w\rangle\leq(M+\frac{C}{\varepsilon_1})\|u-v\|_1\|w\|_1 \tag{2.14}$$

로 有界(bound) 지울 수가 있다. 이는 곧 연산자 A가 강한 의미로 연속함을 뜻하며 非線型單調演算子論(nonlinear monotone operator theory)[18]의 해의 존재성 조건을 만족시키게 된다.

정리 2.1. 조건(2.5)와 (2.13)이 성립한다고 가정하자. 이러한 경우 다음의 조건

$$f\in L^2(\Omega),\ t\in L^2(\Gamma_F),\ s\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C) \tag{2.15}$$

이 만족한다면 벌칙화문제 (2.6)은 唯一解를 가진다. 뿐만아니라 解 u_ε은 ε_1에 대해 평등하게 유계(uniformly bounded)된다. 즉

$$\|u_\varepsilon\|_1\leq\|f\|_*/m \tag{2.16}$$

여기서

$$\|f\|_*=\|f\|_0+\{\textstyle\int_{\Gamma_F}t_i t_i\, ds\}^{1/2}\ \square$$

Sobolev 공간 $H^1(\Omega)$의 再歸性(reflexivity)에 의해 (2.16)으로 주어진 유계는 $\varepsilon_1\to 0$에 따라 공간 V의 어떤 요소 u에 약수렴(weakly convergent)하는 부분수열(subsequence) $\{u_\varepsilon\}\in V$가 존재함을 보장하게 된다. 편의상 이 부분수열도 $\{u_\varepsilon\}$로 표기하도록 한다. 다음은 이의 극한(limit) u가 집합 K,

$$K=\{v\in V;\ \Gamma_C\text{에서 } v_n-s\leq 0\} \tag{2.17}$$

에 속하며 또한, u는 다음의 변분부등식

$$u\in K;\ B(u,v-u)\geq f(v-u),\ v\in K \tag{2.18}$$

의 해가 됨을 보이도록 한다. 부등식 (2.18)은 접촉조건 (2.2)를 구속조건으로 갖는 一向性문제의 변분원리이며 系의 에너지범함수 (energy functional) Π를

$$\Pi(v)=\frac{1}{2}B(v,\ v)-f(v) \tag{2.19}$$

로 정의하면 (2.18)은 Π를 최소화하는 함수 u의 특성방정식으로 물리적인 의미에서 볼때 $v-u$는 가상변위이며 (2.19)는 곧 가상일의 원리가 된다.

정리 2.2. 정리 2.1.에서의 조건이 모두 만족한다고 가정하자. 그러면 벌칙화문제 (2.6)의 해로 구성되는 수열 $\{u_\varepsilon\}\in V$는 $\varepsilon_1\to 0$에 따라 변분부등식 (2.18)의 유일해 u에 수렴한다.

(증명) 식 (2.6)으로부터 모든 $v\in V$에 대해

$$B(u_\varepsilon,\ v-u_\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon_1}((u_{\varepsilon n}-s)^+,\ v_n-u_{\varepsilon n})=f(v-u_\varepsilon)$$

이다. 또한 모든 $v\in K$에 대해 $(v_n-s)^+=0$이므로

$$B(u_\varepsilon,\ v-u_\varepsilon)\geq B(u_\varepsilon,\ v-u_\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon_1}((v_n-s)^+ -(u_{\varepsilon n}-s)^+, v_n-u_{\varepsilon n})=f(v-u_\varepsilon)$$

즉 $$B(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon)\geq f(v-u_\varepsilon)\ \ v\in K \tag{2.20}$$

Mapping $v\to B(v,\ v)$가 강한 의미로 블록하고(strictly convex) V에서 Gâteaux 미분이 가능하므로

$$\liminf_{\varepsilon_1\to 0}\ B(u_\varepsilon,\ u_\varepsilon)\geq B(u,\ u)$$

인 u가 존재하며 $v\to f(v)$는 선형이고 연속하므로 $\varepsilon_1\to 0$에 따라 (2.20)의 극한을 취할 수 있어 다음을 얻는다. 즉,

$$B(u,v-u)\geq f(v-u),\ v\in K$$

다음은 $u\in K$임을 보인다. 경계 Γ_C에서 $v_n=s$인 v를 (2.6)에 대입하면

$$((u_{\varepsilon n}-s)^+,\ (u_{\varepsilon n}-s)^+)=((u_{\varepsilon n}-s)^+,\ u_{\varepsilon n}-s)$$
$$=\varepsilon_1\{B(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon)-f(v-u_\varepsilon)\}$$
$$\leq\varepsilon_1\{B(u_\varepsilon,\ v)-f(v-u_\varepsilon)\}$$
$$\leq\varepsilon_1\{M\|u_\varepsilon\|_1\|v\|_1+C\|f\|_*(\|v\|_1+\|u_\varepsilon\|_1)\}$$

이다.

$\varepsilon_1\to 0$로 하여 극한을 취하면

$$|||(u_n-s)^+|||\leq\lim_{\varepsilon_1\to 0}|||(u_{\varepsilon n}-s)^+|||=0$$

이는 곧 $u_n-s\leq 0$임을 뜻한다. 따라서 $u\in K$. 변분부등식 (2.18)의 해의 유일성은 다음의 부등식

$$B(u-v,u-v)\geq m\|u-v\|_1^2$$

으로 부터 증명되므로 $\{u_\varepsilon\}$의 부분수열 중 수렴하는 것들은 (2.18)의 해인 $u\in K$를 같은 극한으로 가진다. 따라서 본래의 수열 $\{u_\varepsilon\}$도 평등하게 유계하므로 $\varepsilon_1\to 0$에 따라 극한 $u\in K$에 수렴한다. □

2.3. 접촉압의 存在性

다음은 접촉압 σ를

$$\sigma_\varepsilon=-\frac{1}{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon n}-s)^+ \tag{2.21}$$

로 근사했을 때 $\varepsilon_1\to 0$에 따라 σ_ε가 일향성문제의 접촉압 σ에 수렴함을 보이도록 한다.

정리 2.3. 정리 2.2의 모든 조건이 만족한다고 하자. 그러면 수열 $\{\|\sigma_\varepsilon\|^*_{\frac{1}{2},\Gamma_C}\}$는 ε_1에 무관하게 평등하게 유계하고 $\{\sigma_\varepsilon\}$는 $\sigma\in N$에 수렴한다. 뿐만 아니라 $\{u,\sigma\}\in K\times N$은 다음에 주어지는 Saddle point 문제(또는 mixed formulation)의 解가 된다.

$$\left.\begin{aligned} &B(u,\ v)-[\sigma,\ v_n]=f(v) && v\in V\\ &[\tau-\sigma, u_n-s]\geq 0 && \tau\in N\end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

여기서 $[\circ,\ \circ]$는 $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C))'\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$에서의 雙對 짝(duality pairing)이며 $\|\circ\|^*_{\frac{1}{2},\Gamma_C}$은 $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C))'$의 놈(norm)이며 집합 N의 정의는 다음과 같다.

$$N=\{\tau\in(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C))';\ \tau\leq 0\} \tag{2.23}$$

(증명) (2.21)을 (2.6)에 대입하면 $\tau\in L^2(\Gamma_C)$일 때 $(\tau,\ v_n)=[\tau,\ v_n]$이므로

$$B(u_\varepsilon,\ v)-[\sigma_\varepsilon,\ v_n]=f(v),\ v\in V$$

Trace map은 $H'(\Omega)$으로 부터 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$에 surjective (onto)하다는 Trace 정리에 의하여 다음을 만족시키는 陽의 常數 α가 존재한다.

$$\alpha\|\tau\|^*_{\frac{1}{2},\Gamma_C}\leq\sup_{v\ni H'(\Omega)}\frac{|[\tau,\ v_n]|}{\|v\|_1}$$

따라서

$$\|\sigma_\varepsilon\|^*_{\frac{1}{2},\Gamma_C}\leq(M\|u_\varepsilon\|_1+\|f\|^*)/\alpha \tag{2.24}$$

이는 곧 수열 $\{\|\sigma_\varepsilon\|^*_{\frac{1}{2},\Gamma_C}\}$이 ε_1에 대해 평등하게 유계함을 뜻하며 σ에 약수렴하는 부분수열을 포함하고 있음을 알 수 있다. 다음은 극한 σ가 집합 N에 속하고 있음을 보인다. 이는 $\sigma_\varepsilon\leq 0$와 집합 N의 폐쇄성(closedness)으로부터 얻어진다. 식 (2.6)과 (2.21)로부터

$$B(u_\varepsilon,\ v)-(\sigma_\varepsilon,\ v_n)=f(v),\ v\in V$$

이에 $\varepsilon_1\to 0$에 따른 극한을 취하면

$$B(u,\ v)-[\sigma,\ v_n]=f(v),\ v\in V$$

이고 또한

$$0\geq B(u,\ u)-f(u)-[\sigma,\ s]=[\sigma,\ u_n-s]\geq 0$$

이므로 따라서 $[\sigma, u_n-s]=0$을 얻는다. 따라서 $u\in K$이고 $\sigma\in N$이므로 (2.22)의 두번째식은 당연한 결과이다.

3. 마찰접촉문제

3.1. 마찰접촉문제의 서술

지금까지는 접촉면에서의 접선스트레스 $\sigma_T=0$을 가정한 상태에서 문제가 진행되어 왔다. 여기에 마찰효과를 도입하면 系를 제어하는 식은 (2.4)에 경계조건으로 다음이 부가된다.

$$\Gamma_C\text{에서}\begin{cases} u_n<s\text{면 } \sigma=0,\ \sigma_T=0\\ u_n=s\text{이고}\begin{cases}|\sigma_T|<\nu_f|\sigma|\text{면 } \sigma<0,\ u_T=0\\ |\sigma_T|=\nu_f|\sigma|\text{면 } \sigma<0\\ u_T=-\lambda\sigma_T\text{인 } \lambda>0\text{가 존재}\end{cases}\end{cases} \tag{3.1}$$

Duvaut와 Lions[2]에 따르면 이러한 문제의 변분원리는 다음과 같이 주어진다.

$$u\in K,\ B(u,\ v-u)+g(u,\ v)-g(u,\ u)\geq f(v-u),\quad v\in K \tag{3.2}$$

$$g(u,\ v)=\int_{\Gamma_C}^{\nu_f}|\sigma(u)||v_T|ds \tag{3.3}$$

여기서 $g(\circ,\ \circ)$는 마찰력에 의한 가상일을 나타내고 있다. 그러나 이러한 일반적인 경우에는 解의 存在性을 증명하기가 어렵고 접촉면에서의 수직접촉압 σ이 알려져 있을 경우의 존재경은 Duvaut와 Lions[2]에 의해 증명되었다. 만약 $\sigma=\Sigma$으로 미리 알려져 있다면 접촉경계면 Γ_C도 알려진 상태가 되며 이러한 경우의 경계조건은 다음과 같이 대치되겠다.

$$\Gamma_C\text{에서}\quad T=\nu_f|\Sigma|$$

$$\begin{cases}|\sigma_T|<T\text{면 } u_T=0\\ |\sigma_T|=T\text{면 } u_T=-\lambda\sigma_T\text{인 } \lambda>0\text{가 존재}\end{cases} \tag{3.4}$$

이럴 경우 (3.3)은 다음으로 바뀐다.

$$g_T(v)=\int_{\Gamma_C}T|v_T|ds \tag{3.5}$$

이에 따른 변분원리는 다음 식과 같다.

$$u\in V\ B(u,v-u)+g_T(v)-g_T(u)\geq f(v-u)\ v\in V \tag{3.6}$$

문제 (3.6)은 원래 문제 (3.2)에 비해 대단히 간편화시킨 문제이나 이 문제를 풀 수 있는 방편이 구해졌을 때 문제 (2.6)을 해석하는 방법과 결합하여 일반적인 마찰접촉문제를 수치해석 할 수 있는 알고리듬을 구하고자 한다.

3.2. 마찰접촉문제의 섭동변분원리(Perturbed Variational Principle)

문제 (3.6)의 부등식은 수치해석을 하기 위하여 유한소법의 기본형식으로는 역시 적합하지 못하며 等式(equality)化의 장애가 되고 있는 항은 미분불가능한 g_T이므로 섭동(perturbation)을 시도하여 Gâteaux 미분이 가능하도록 한다. 미분불가능의 원인이 되고 있는 절대치 연산은 다음과 같은 방법으로 근사할 수 있겠다. 즉 $\phi(v)=|v|$이라면 대단히 작은 陽의 實數 ε_2에 대해

$$\phi_\varepsilon(v)=\begin{cases}|v_T| & (|v_T|>\varepsilon_2\text{면}) \\ \frac{1}{2\varepsilon_1}v_T\cdot v_T+\frac{\varepsilon_2}{2} & (|v_T|\leq\varepsilon_2\text{면})\end{cases} \tag{3.7}$$

로 근사한다. 그러면 섭동 (3.7)을 이용한 g_T의 근사 $g_{T\varepsilon}$은 다음과 같다.

$$g_{T\varepsilon}(v)=\int_{\Gamma_C}T\phi_\varepsilon(v)ds \tag{3.8}$$

연산 $g_{T\varepsilon}$은 解의 존재성조건인 볼록성(convexity)과 弱한 의미로 點列的으로 下半連續함(weakly sequentially lower semicontinuous)을 쉽게 보일 수 있으며 $g_{T\varepsilon}$의 Gâteaux 미분계수 $Dg_{T\varepsilon}$는 다음과 같이 정의된다.

$$<Dg_{T\varepsilon}(u),\ v>=\lim_{\theta\to0+}\int_{\Gamma_C}T\frac{\partial}{\partial\theta}\phi_\varepsilon(u+\theta v)ds$$
$$=\begin{cases}\int_{\Gamma_C}T|v_T|ds & (|v_T|>\varepsilon_2) \\ \int_{\Gamma_C}Tu_T\cdot v_T/\varepsilon_2 ds & (|v_T|\leq\varepsilon_2)\end{cases} \tag{3.9}$$

따라서 주어진 $\varepsilon_2>0$에 대해 변분원리 (3.6)의 섭동변분원리는 다음과 같은 等式의 형태로 나타난다.

$$B(u_\varepsilon,\ v)+<Dg_{T\varepsilon}(u_\varepsilon),\ v>=f(v)\quad v\in V \tag{3.10}$$

이 때의 섭동해 u_ε는 접촉경계 Γ_C의 測度가 meas$(\Gamma_C)>0$일 경우에 유일해가 된다.

섭동 과정의 근접성은 다음과 같이 직접 계산으로 바로 얻어진다.

$$|g_T(v)-g_{T\varepsilon}(v)|=_{\Gamma_C}T(|v_T|-\phi_\varepsilon(v))ds|$$
$$\leq|\int_{\Gamma_C}|\int T|\varepsilon_2 ds|\leq\|T\|_{0,\Gamma_C}\,\mathrm{meas}(\Gamma_C)\varepsilon_2 \tag{3.11}$$

이를 이용하여 (3.10)의 解가 (3.6)의 解에 $\varepsilon_2\to0$에 따라 접근하는 수렴율을 추정하면 다음과 같다.

정리 3.1. 주어진 값 $\varepsilon_2>0$에 대해 u_ε을 (3.10)의 解라 하고 u를 (3.6)의 解라고 하자. 그러면 ε_2의 크기에 無關하게 다음을 만족시키는 常數 C가 존재한다.

$$\|u-u_\varepsilon\|_1\leq C\sqrt{\varepsilon_2} \tag{3.12}$$

(증명) 식 (3.6)과 (3.10)에 각각 $v=u_\varepsilon$과 $v=u_\varepsilon-u$를 대입하고 (3.10)에서 (3.6)을 빼면

$$B(u_\varepsilon-u,\ u_\varepsilon-u)\leq g_T(u_\varepsilon)-g_T(u)-\langle Dg_{T\varepsilon}(u_\varepsilon),\ u_\varepsilon-u\rangle$$

한편 $g_{T\varepsilon}$가 볼록함수(convex function)이고 Gâteaux 미분이 가능하므로

$$g_{T\varepsilon}(u)-g_{T\varepsilon}(u_\varepsilon)\geq\langle Dg_{T\varepsilon}(u_\varepsilon),\ u-u_\varepsilon\rangle$$

여기에 (2.11)을 이용하면

$$\mathrm{cm}\|u-u_\varepsilon\|_1^2\leq|g_T(u_\varepsilon)-g_{T\varepsilon}(u_\varepsilon)|+|g_{T\varepsilon}(u)-g_T(u)|$$

다시 (3.11)을 이용하여

$$C=(2\|T\|_{0,\Gamma_C}\,\mathrm{meas}(\Gamma_C)/\mathrm{cm})^{1/2}$$

을 얻는다.

4. 有限要素近似

4.1. 벌칙화문제의 유한요소근사

편의상 마찰을 무시한 접촉문제를 벌칙화문제(penalized problem)이라 하고 마찰접촉문제를 정규화문제(regularized problem)이라 부르기로 한다. 알고리듬 설명시에 확실해 지겠지만 우선 벌칙화문제의 유한요소근사부터 시도한다. 식 (2.7)로 정의된 공간 V의 有限次元部分空間族(family of finite-dimensional subspace) $\{V_h\}$를 구성한다. 여기서 첨자 h는 통상적인 약정대로 요소크기를 나타내는 매개변수이다.

벌칙화문제를 근사하는데 쓰일 수치적분연산자 $I(\cdot,\cdot)$를 다음과 같이 정의한다.

$$I(f,\ g)=\sum_{e=1}^{E}\sum_{j=1}^{G}W_j^e f(\xi_j^e)g(\xi_j^e) \tag{4.1}$$

여기서 E, 접촉경계 Γ_C에 놓인 요소의 수이며, G는 요소당 수치적분점의수이고 W_j^e와 ξ_j^e는 각 적분점에서의 적분미중계수(weight)와 국지좌표이다. 함수 v의 유한요소근사를 v^h라 하면 이의 法線성분 v_n^h은

$$v_n^h(\xi_j^e)=v^h(\xi_j^e)\cdot n(\xi_j^e)\ (\text{합의 뜻이 아님})$$

로 정의되며 v^h와 같은 차수의 다항식이 된다. 이를 사용하면 벌칙화문제 (2.6)의 근사는 다음과 같다.

$$u_\varepsilon^h\in V_h:B(u_\varepsilon^h,\ v^h)+\frac{1}{\varepsilon_1}I((u_{\varepsilon n}^h-s)^+,\ v_n^h)$$
$$=f(v^h),\ v^h\in V_h \tag{4.2}$$

공간 V_h의 基底函數(base function)가 Lagrange형 補間函數에 의해 生成된다면 식 (2.3)으로 정의되는 접촉압의 근사 σ_ε^h가 속하게 될 근사공간 W_h는 수치적분법 $I(\cdot)$에 좌우된다. 근사접촉압 σ_ε^h를 다음과 같이 정의하자.

$$\sigma_\varepsilon^h(\xi_j^e)=-\frac{1}{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon n}^h-s)(\xi_j^e)^+ \tag{4.3}$$

만약 수치적분점의 위치가 경계 Γ_C에서의 유한요소모델의 절점과 일치한다면 (4.3)과 같은 과정으로 생성되는 W_h는 v_n^h과 같은 차수의 다항식 보간함수에 의해 생성되며 共値有限要素(conforming finite element)가 된다. V_h가 4절점 isoparametric quadrilateral finite element (Q_1-element)에 의해 근사되고 $I(\cdot)$로 梯形率을 적용한다면 공간 W_h는 區分的線形多項式(piecewise linear polynomials)의 집합이 되고 9절점요소(Q_2-element)와 Simpson 法測을 사용하면 구분적 2차다항식의 집합이 된다. 만약 $I(\cdot)$로 Gauss 求積法을 쓰면 積分點이 節點과 일치하지 않게 되어 이렇게 생성되는 W_h는 非共値形(non-conforming) 유한요소群이 된다.

정리 2.1과 유사한 과정을 통하여 다음의 정리를 얻는다.

정리 4.1. 정리 2.1에서의 조건들이 만족된다고 하

자. 그러면 $\varepsilon_1 \to 0$에 따라 (4·2)의 解들로 형성되는 수열 $\{u_\varepsilon^h\} \in V_h$는 다음의 변분부등식의 解 $u^h \in K_h$에 수렴한다.

$$u^h \in K_h : B(u^h,\ v^h - v^h) \geq f(v^h - u^h)\quad v^h \in K_h \tag{4.4}$$

여기서

$$K_h = \{v^h \in V_h : (v_n^h - s)(\xi_j^e) \leq 0,\ 1 \leq e \leq E',\ 1 \leq j \leq G\} \tag{4.5}$$

4.2. 마찰접촉문제를 위한 알고리듬

먼저 비선형방정식 (4.2)는 연속반복법(successive iteration)에 의해 풀 수가 있다. 반복회수를 t라 하고 그 알고리듬을 정리하면

i) $t=1$, $({}^1u_{\varepsilon n}^h - s)(\xi_j^e) = 0$

ii) u^h의 t번째 근사의 벌칙항(penalty term)은 다음과 같이 정의한다.

$$({}^{t-1}u_{\varepsilon n}^h - s)(\xi_j^e) > 0 \text{ 면 } ({}^tu_{\varepsilon n}^h - s)(\xi_j^e)^+ = ({}^tu_{\varepsilon n}^h - s)(\xi_j^e) \tag{4.6}$$

$$({}^{t-1}u_{\varepsilon n}^h - s)(\xi_j^e) \leq 0 \text{ 면 } ({}^tu_{\varepsilon n}^h - s)(\xi_j^e) = 0$$

그러면 반복계산시 다음과 같은 선형방정식을 풀게 된다.

$${}^tu_\varepsilon^h \in V_h : B({}^tu_\varepsilon^h, v^h) + \frac{1}{\varepsilon_1} I(({}^tu_{\varepsilon n}^h - s)^+,\ v_n^h) = f(v^h),\ v^h \in V_h \tag{4.7}$$

iii) 위 과정을 상대오차 e_R^t가 주어진 오차허용한계를 넘지 않을 때까지 반복한다.

$$e_R^t = \|{}^tu_\varepsilon^h - {}^{t-1}u_\varepsilon^h\|_1 / \|{}^tu_\varepsilon^h\|_1 \tag{4.8}$$

iv) 오차허용한계를 만족시켰을 경우 접촉압 ${}^t\sigma_\varepsilon^h$는 (4.3)을 통하여 얻는다.

다음은 위의 결과를 이용하여 마찰접촉문제를 수치해석하는 알고리듬을 전개한다.

1) 前述한 알고리듬을 통해 마찰이 없는 접촉문제를 풀고 近似變位 u_ε^h와 접촉압 σ_ε^h를 구하고 접촉면을 확정한다.

2) 3절에서 기술한 Coulomb 마찰문제를 풀기 위해 1)에서 구한 σ_ε^h를 데이터로 사용한다. 또한 (3.8)에서의 T는 T_ε로 다음과 같이 근사한다.

$$T_\varepsilon \equiv v_f |\sigma_\varepsilon^h| \tag{4.9}$$

3) 벌칙해 u_ε^h에 마찰효과를 보정한 解 $u_{\varepsilon\varepsilon}^h$는 다음 방정식을 풀어 구한다.

$$B(u_{\varepsilon\varepsilon}^h, v^h) + \langle Dg r_\varepsilon(u_{\varepsilon\varepsilon}^h), v^h \rangle = \bar{f}(v^h),\ v^h \in V_h \tag{4.10}$$

여기서 $\bar{f}$는 σ_ε^h를 데이터化한 상태이다. 식 (4.10)은 아직도 비선형방정식이나 접촉경계 Γ_C에서 접촉해 u_ε^h의 "접착(stick)" 부분과 미끄러짐(sliding)" 부분을 구분하여 선형화 시킨다. 즉 주어진 정규화매개변수 $\varepsilon_2 > 0$에 대하여 "미끌어짐" 조건을 절점에서의 변위량이 $|u_\varepsilon^h| > \varepsilon_2$일 때로 잡아 (4.9)에서의 마찰항을 하중벡타(데이터)에 포함시키고, $|u_\varepsilon^h| \leq \varepsilon_2$면 마찰항을 강성매트릭스에 포함시킴으로써 선형화 한다.

4) 단계 3)에서 선형화된 식 (4.10)을 풀어 ${}^1u_{\varepsilon\varepsilon}^h$을 구한 다음 접촉면에서의 접선스트레스 $\sigma_{T\varepsilon}^h$를 계산하고 다시 단계 1)로 돌아간다. 이때 $\sigma_{T\varepsilon}^h$는 데이터化하여 마찰이 없는 접촉문제를 풀어 ${}^2u_\varepsilon^h$와 ${}^2\sigma_\varepsilon^h$를 구하고 단계 2), 3), 4)를 거쳐 ${}^2u_{\varepsilon\varepsilon}^h$와 ${}^2\sigma_{\varepsilon\varepsilon}^h$를 얻는다. 위와 같은 과정을 식 (4.9)과 유사한 상대오차 허용기준 도달할 때까지 반복하게 된다.

이렇게 하여 얻은 數値解가 아직은 수학적으로는 명확하게 正解에 수렴함을 보일수는 없으나 실제 어떤 특정한 類의 마찰접촉 문제의 수치해석에 있어서는 타당성이 있는 결과들을 보여주고 있다.

5. 有限要素近似의 收斂

5.1. 매개변수 ε_1, ε_2와 h에 관한 수렴율

사전오차추정(a priori error estimate)을 먼저 벌칙화문제에 대하여 ε_1와 h의 항으로 추정하고 다시 마찰효과로 인한 수정해에 관련된 보정량을 가산하여 나타내도록 한다.

정리 5.1. 정리 2.3과 정리 4.1의 모든 조건이 성립한다고 하자. 그러면 모든 $\sigma^h \in K_h$와 $\tau^h \in N_h$에 대하여

$$\begin{aligned} B(u-u^h,\ u-u^h) \leq\ & B(u-u^h,\ u-v^h) + (\sigma,\ v_n^h - u_n) \\ & + (\sigma - \tau^h,\ u_n - u_{\varepsilon n}^h) + (\tau^h - \sigma,\ u_n - s) \\ & + E_I(\tau^h, u_{\varepsilon n}^h - s) + I(\tau^h - \sigma_\varepsilon^h, \tau^h)\varepsilon_1 \end{aligned} \tag{5.1}$$

여기서

$$E_I(f,\ g) = |(f,\ g) - I(f,\ g)|$$

$N_h = \{\tau^h \in W_h : \tau^h(\xi_j^e) \leq 0,\ 1 \leq \xi \leq G,\ 1 \leq e \leq E\}$이다.

(증명) (2.22)와 (4.2)로부터

$$\begin{aligned} B(u-u_\varepsilon^h,\ u-u_\varepsilon^h) &= B(u-u_\varepsilon^h,\ u-v^h) + B(u-u_\varepsilon^h,\ v^h - u_\varepsilon^h) = B(u-u_\varepsilon^h,\ u-v^h) + (\sigma, v_n^h - u_{\varepsilon n}^h) \\ & \quad - I(\sigma_\varepsilon^h, v_n^h - u_{\varepsilon n}^h) \end{aligned}$$

끝의 두항을 $I(\sigma_\varepsilon^h,\ v_n^h - s) \geq 0$와 $(\tau,\ u_n - s) \geq 0$인 사실을 이용하여 다시 전개하면

$$\begin{aligned} (\sigma, v_n^h - u_{\varepsilon n}^h) - I(\sigma_\varepsilon^h,\ v_n^h - u_{\varepsilon n}^h) &= (\sigma,\ v_n^h - u_n) \\ & + (\sigma - \tau^h,\ u_n - u_{\varepsilon n}^h) + (\tau^h, u_n - s) - (\tau^h,\ u_{\varepsilon n}^h - s) \\ & - I(\sigma / u_{\varepsilon n}^h,\ v_n^h - s) + I(\sigma_\varepsilon^h, u_{\varepsilon n}^h - s) \leq (\sigma,\ v_n^h - u_n) \\ & + (\sigma - \tau^h, u_n - u_{\varepsilon n}^h) + (\tau^h - \sigma,\ u_n - s) \\ & - E_I(\tau^h, u_{\varepsilon n}^h - s) + I(\sigma_\varepsilon^h - \tau^h,\ (u_{\varepsilon n}^h - s)^+) \end{aligned}$$

위의 마지막 항은 다시 다음과 같이 유계된다.

$$I(\sigma_\varepsilon{}^h-\tau^h,\ (u_{\varepsilon n}{}^h-s)^+)=I(\sigma_\varepsilon{}^h-\tau^h-\varepsilon\sigma_\varepsilon{}^h)$$
$$\leq -I(\sigma_\varepsilon{}^h-\tau^h,\ \tau^h)\varepsilon_1$$

이들 결과를 정리하면 추정 (5.1)을 얻는다.

추정 (5.1)의 우변 4번째항은 유한요소법에 의한 보간오차(interpolation error)이며, 5번째와 6번째항은 I의 적용으로 인한 오차이다. 6번째항의 일부는 벌칙근사(penalty approximation)에 의한 오차로 포함되어 있다.

정리 5.2. 모든 $\tau^h\in N_h$에 대하여 다음을 만족시키는 陽의 상수 α_h와 어떤 $v^h\in V_h$가 있다고 하자.

$$\alpha_h\|v^h\|_1\leq |||\tau^h||| \tag{5.2}$$

그러면 모든 $\tau^h\in N_h$에 대해

$$I(\tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h,\ \tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h)\leq M\|u-u_\varepsilon{}^h\|_1|||\tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h|||/\alpha_h$$
$$+|||\tau^h-\sigma|||\ |||\tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h|||+E_I(\tau^h,\ \tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h) \tag{5.3}$$

(증명) (2.22)와 (4.2)로부터

$$I(\tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h,\ v_n{}^h)=I(\sigma-\sigma_\varepsilon{}^h,\ v_n{}^h)+I(\tau^h-\sigma,\ v_n{}^h)$$
$$=B(u-u_\varepsilon{}^h,\ v^h)+(\tau^h-\sigma,\ v_n{}^h)+E_I(\tau^h,v_n{}^h)$$

여기에 $v_n{}^h=w_n{}^h-u_\varepsilon{}^h$을 대입하고 (5.2)를 적용하면

$$I(\tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h,\ \tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h)\leq M\|u-u_\varepsilon{}^h\|_1|||\tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h|||/\alpha_h$$
$$+(\tau^h-\sigma,\tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h)+E_I(\tau^h,\ \tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h)$$

다시 Schwartz의 부등식을 우변 2번째항에 적용하면 (5.3)의 추정을 얻을 수 있다. □

정리 5.1 및 5.2의 결과와 유한요소법의 補間性質 및 數值積分法이 갖추어야 할 몇가지 조건과 解의 정규성에 대한 가정으로부터 사전오차추정 $\|u-u_\varepsilon{}^h\|_1$와 $|||\sigma-\sigma_\varepsilon{}^h|||$은 곧 얻을 수 있다. 가령 수치적분법 I가 모든 $v^h\in V_h$, $\tau^h,\bar{\tau}^h\in W_h$에 대해 다음 조건을 만족시킨다고 하자.

$$I(v_n{}^h,\ v_n{}^h)\geq C_1|||v_n{}^h|||^2,\ I(\tau^h,\ v_n{}^h)\leq C_2|||\tau^h|||\cdot$$
$$|||v_n{}^h||| \tag{5.4}$$

$$E_I(\tau^h,\ v_n{}^h)\leq C_3h^{\lambda_1},\ E_I(\tau^h,\ \bar{\tau}^h)\leq C^4h^{\lambda_2} \tag{5.5}$$

또한 유한요소모델은 Ciarlet [18]가 편 다음과 같은 보간성질을 가지고 있다고 하자. 즉 모든 $v\in H^q(\Omega)$, $\tau\in H^m(\Gamma_C)$에 대해

$$\begin{aligned}&v^I\in K_h:\|v-v^I\|_1\leq C_{q5}h^{\mu_1}\|v\|_q\\&\tau^I\in N_h:\|\tau-\tau^I\|_{\sigma,\Gamma_C}\leq C_6\,h^{\mu_2}\|\tau\|_{m,\Gamma_C}\end{aligned} \tag{5.6}$$

여기서

$$\begin{aligned}&\mu_1=\min\{k+1-r,\ q-r\},\ r\leq q\\&\mu_2=\min\{\hat{k}+\frac{1}{2}-g,\ m-g\},\ g\leq m\end{aligned} \tag{5.7}$$

이며 k와 $\hat{k}$는 v와 τ를 보간하는데 사용된 다항식의 완전차수(order of complete polynomials)이며 v^I와 τ^I는 유한요소에 의한 v와 τ의 보간이다. 變位解 u와 접촉압 σ의 정규성에 대한 가정으로는 먼저 변형체와 강체기반사이의 間隙을 나타내는 거리함수 s가

$$s\in H^{q-\frac{1}{2}}(\Gamma C) \tag{5.8}$$

라는 가정아래

$$u\in H^q(\Omega),\ \sigma\in H^{q-\frac{1}{2}}(\Gamma C) \tag{5.9}$$

라 하자. 또한 (5.2)의 상수 α_h 다음과 같이 나타낼 수 있다고 하자.

$$\alpha_h=\alpha h^\delta,\ \delta\in R\ (R:\text{실수}) \tag{5.10}$$

위에 열거된 가정아래 추정 (5.1)은 다음과 같다.

$$m\|u-u_\varepsilon{}^h\|_1{}^2\leq M\|u-u_\varepsilon{}^h\|_1\|u-v^h\|_1+\|\sigma\|_{q-1\frac{1}{2},\Gamma_C}$$
$$\|v_n{}^h-u_n\|_{1\frac{1}{2}-q}+\|\sigma-\tau^h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C}\|u_n-u_{\varepsilon n}{}^h\|_{\frac{1}{2},\Gamma_C}$$
$$+\|\tau^h-\sigma_{\frac{1}{2}-q,\Gamma_C}\|u_n-s\|_{q-\frac{1}{2},\Gamma_C}+C_3\,h^{\lambda_1}+|||\tau^h$$
$$-\sigma_\varepsilon{}^h|||\ |||\tau^h|||\varepsilon_1$$

Young의 부등식과 (5.5), (5.6)을 이용하면

$$\|u-u^h{}_\varepsilon\|_1{}^2\leq C(\|u\|_q,\ \|\sigma\|_{q-\frac{1}{2},\Gamma_C})h^{2r_1}+|||\tau^h$$
$$-\sigma_\varepsilon{}^h|||\varepsilon_1+C_3\,h^{\lambda_1} \tag{5.3}$$
$$\gamma_1=\min\{k,\hat{k}+1,\ q-1\}$$

같은 방법으로 (5.3)으로 부터

$$C_1|||\tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h|||^2\leq M\|u-u_\varepsilon{}^h\|_1|||\tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h|||/\alpha_h+|||\tau^h$$
$$-\sigma_\varepsilon{}^h|||\ |||\tau^h-\sigma|||+C_4h^{\lambda_2}$$

를 얻으며 다시 Young의 부등식을 이용하면

$$|||\tau-\sigma_\varepsilon{}^h|||\leq C(\|u-u_\varepsilon{}^h\|_1/\alpha_h+|||\tau^h-\sigma|||)$$
$$+(C_4\,h^{\lambda_2})^{\frac{1}{2}}\varepsilon_1 \tag{5.12}$$

추정 (5.11)과 (5.12)를 결합하면

$$||u-u_\varepsilon{}^h||_1{}^2<C(||u||_q,\ ||\sigma||_{q-1\frac{1}{2},\Gamma_C})(h^{2r_1}+h^{r_2}\,\varepsilon_1)$$
$$+c_3\,h^{\lambda_1}+(c_4h^{\lambda_2})^{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_1$$
$$\gamma_2=\min\left(-\delta,\ q-1\frac{1}{2}\right) \tag{5.13}$$

추정 (5.13)을 다시 (5.12)에 대입하면

$$|||\tau^h-\sigma_\varepsilon{}^h|||\leq c(||u||_q,\ ||\sigma||_{q-1\frac{1}{2}})(h^{r_3}+h^{r_2/2-\delta}\varepsilon_1{}^{\frac{1}{2}})$$
$$+C_3\,h^{\lambda_1/2-\delta}+C_4{}^{\frac{1}{4}}\,h^{\lambda_2/4-\delta}\,\varepsilon_1{}^{\frac{1}{2}}$$
$$\gamma_3=\min\left\{k-\delta,\ \hat{k}+1-\delta,\ q-1-\delta,\ q-1\frac{1}{2}\right\}$$

삼각부등식(triangle inequality)와 위 결과를 이용하면

$$|||\sigma-\sigma_\varepsilon{}^h|||\leq\hat{C}(||u||_q,\ ||\sigma||_{q-\frac{1}{2}})(h^{r_3}+h^{\frac{r_2}{2}-\delta}\varepsilon_1{}^{\frac{1}{2}})$$
$$+C_3\,h^{\frac{\lambda_1}{2}-\delta}+C_4{}^{\frac{1}{4}}\,h^{\frac{\lambda_2}{4}-\delta}\,\varepsilon_1{}^{\frac{1}{2}} \tag{5.14}$$

추정 (5.13)과 (5.14)는 벌칙화문제의 추정오차이며 다음 벌칙해 $u_\varepsilon{}^h$와 마찰효과로 인한 보정해 $u_{\varepsilon\varepsilon}{}^h$는 정리 3.2와 유사한 과정을 거쳐 다음의 추정을 도출할 수 있다.

$$||u_\varepsilon{}^h-u_{\varepsilon\varepsilon}{}^h||_1\leq C_6\,\varepsilon_2{}^{\frac{1}{2}} \tag{5.15}$$

5.2. 상수 α_h 의 결정

추정 (5.13)과 (5.14)에서 보는 바와 같이 상수 α_h 의 값은 수렴에 결정적인 역할을 하고 있음을 알 수 있다. 상수 α_h 의 값은 $\delta=0$ 일 때가 가장 바람직한 경우이나 이는 전적으로 벌칙항을 수치적분하는 I 에 좌우됨을 볼 수 있다. 예를 들어 Q_2-요소를 쓴다면 v^h 의 경계에서의 형태는 구분적 2차 다항식이 된다. 만약 여기에 I 로 Simpson 법칙을 적용한다면 v^h 의 경계치와 마찬가지로 접촉압 τ^h 도 구분적 2차 다항식의 형식이 된다. 따라서 W_h 는 V_h 의 기저함수의 경계치와 동일한 기저함수에 의해서 생성됨을 알 수 있다. 이들 기저함수의 모함수는

$$N_1(\xi)=\xi(\xi-1)/2,\ \ N_2(\xi)=\xi(\xi+1)/2,$$

$$N_3(\xi)=1-\xi^2 \quad -1\leq\xi\leq1 \tag{5.16}$$

여기에 수치적분법으로 Simpson 법칙을 사용하였을 때 조건 (5.4)와 (5.5)가 어떻게 만족되는가를 보기로 한다.

정리 5.1. Q_2-요소를 사용하고 I 로 Simpson 법칙을 쓴다면, 모든 $v^h\in V_h$ 와 τ^h, $\tau^h\in W_h$ 에 대하여

$$I(v_n^h,\ v_n^h)\geq|||v_n^h|||^2 \tag{5.17}$$

$$I(\tau^h,\ v_n^h)\leq2|||\tau^h|||\ |||v_n^h||| \tag{5.18}$$

$$E_I(\tau^h,\ v_n^h)\leq C_3h^4\|\tau^h\|_{1\frac{1}{2},\Gamma c}\|v_n^h\|_{2\frac{1}{2},\Gamma c} \tag{5.19}$$

$$E_I(\tau^h,\ \tau^h)\leq C_4\,h^4\|\tau^h\|_{1\frac{1}{2},\Gamma c}\|\tau^h\|_{1\frac{1}{2},\Gamma c} \tag{5.20}$$

여기서 $r>1$ 에 대하여

$$||\tau^h||_{r,\Gamma c}=\left\{\sum_{e=1}^{E}\|\tau^h\|_{r,\Gamma e}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(증명) v^h 와 τ^h 가 한요소영역내에서 모두 2차다항식임에 유의하면

$$v_n^h=v_0+v_1\xi+v_2\,\xi^2$$

$$\tau^h=\tau_0+\tau_1\,\xi+\tau_2\,\xi^2$$

로 표시된다. 그러면 직접 계산으로부터

$$(\tau^h,\ \tau^h)=\sum_{e=1}^{E}h(6\tau_0^2+2\tau_1^2+6\tau_2^2/5+4\tau_0\,\tau_2)/3$$

$$I(\tau^h,\ \tau^h)=\sum_{e=1}^{E}h(6\tau_0^2+2\tau_1^2+2\tau_2^2+4\tau_0\tau_2)/3$$

v_n^h 과 τ^h 가 같은 형식이고 $I(\tau^h,\ v_n^h)\leq\{I(\tau^h,\tau^h)\}^{\frac{1}{2}}\{I(v_n^h,\ v_n^h)\}^{\frac{1}{2}}$ 의 관계를 이용하면 바로 (5.17)과 (5.18)을 얻을 수 있다. 또한 E_I 를 직접 계산하면 바로 (5.19)를 얻는다. 즉

$$E_I(\tau^h,\ v_n^h)=\sum_{e=1}^{E}4h|\tau_2v_2|/15=\sum_{e=1}^{E}4h^5|(\tau^h|_{\Gamma e})''$$
$$(v_n^h|_{\Gamma e})''|\leq4/15h^4\|(\tau^h)\|_{-\frac{1}{2}\Gamma c}\|(v_n^h)\|_{\frac{1}{2},\Gamma c}$$
$$\leq C_3\,h^4\|\tau^h\|_{1\frac{1}{2},\Gamma c}\|v_n^h\|_{2\frac{1}{2}\Gamma c}$$

여기서 a'' 는 대역좌표계(global coordinate)에서의 2차미 분계수이다. 유사한 방법으로 다음도 얻는다.

$$E_I(\tau^h,\hat{\tau}^{\ h})=\sum_{e=1}^{E}\frac{4}{15}h|\tau_2\,\hat{\tau}_2|\leq\frac{4}{15}h^4\|(\tau^h)\|_{0,\Gamma c}\|(\tau^h)\|_{0,\Gamma c}$$

여기에 부등식 $\|(\tau^h)\|_{0,\Gamma c}\leq\|\tau^h\|_{2,\Gamma c}$ 와 유한요소근사의 逆性質(inverse property) $\|\tau^h\|_{2,\Gamma c}\leq Ch^{\frac{1}{2}}\|\tau^h\|_{1\frac{1}{2},\Gamma c}$ 를 응용하면 추정 (5.20)을 얻을 수 있다. □

다음은 유한요소근사 오차추정이 수렴함을 보이는데 결정적인 역할하는 상수 α_h 를 결정하고자 한다.

보제 5.1. 수치적분법으로 Simpson 법칙을 쓰고 v^h 의 기저함수로 Q_1-요소가 쓰인다면 임의의 $\tau^h\in W^h$ 에 대해

$$I(\tau^h,v_n^h)\geq|||\tau^h|||\ |||v_n^h||| \tag{5.21}$$

인 $v_n^h(=v^h\cdot n,\ v^h\in V_h)$이 존재한다.

(증명) 주어진 τ^h 에 대해

$$v_n^h(\xi_j^e)=\tau^h(\xi_j^e),\ \ 1\leq j\leq G,\ \ 1\leq e\leq E \tag{5.22}$$

인 v^h 를 택한다면 (4.1)로 부터

$$I(\tau^h,\ v_n^h)=\{I(\tau^h,\ \tau^h)\}^{\frac{1}{2}}\{I(v_n^h,\ v_n^h)\}^{\frac{1}{2}}$$

임을 보일 수 있으며 따라서 (5.21)은 정리 5.1의 결과이다.

보제 5.2 보제 5.1과 같은 조건하에서 모든 $v^h\in V_h$ 에 대해 다음을 만족시키는 상수 β 가 있다.

$$\beta h^{\frac{1}{2}}\|v^h\|_1\leq|||v_n^h||| \tag{5.23}$$

(증명) $H^1(\Omega)$에서의 Trace 정리와 유한요소근사의 역성질로부터

$$\|v^h\|_1\leq c\|v_n^h\|_{\frac{1}{2},\Gamma c} \tag{5.24}$$

$$\|v_n^h\|_{\frac{1}{2}}\leq\hat{C}h^{-\frac{1}{2}}|||v_n^h||| \tag{5.25}$$

따라서 (5.24)와 (5.25)로부터 (5.23)을 얻는다. □

위 결과들을 정리하면 다음과 같다.

정리 5.2. 수치적분법으로 Simpson 법칙이 쓰이고 v^h 의 기저함수로 Q_2-요소가 쓰인다면 τ^h 에 대해 다음 부등식을 만족시키는 어떤함수 $v^h\in V_h$ 와 상수 β 가 존재한다.

$$\beta h^{\frac{1}{2}}\|v^h\|_1\leq|||\tau^h||| \tag{5.26}$$

즉 $\alpha_h=\beta h^{\frac{1}{2}}$이다. □

이 결과가 수렴율의 추정 (5.13)과 (5.14)에 바로 쓰이게 된다.

6. 數值實驗

수치실험의 대상은 2차원의 plane 문제와 균질의 등방성 선형탄성체에 국한하여 3개의 例題를 유한요소법으로 수치해석 하였다. 첫번째 예제는 Hertz 접촉문

제를 통하여 벌칙유한유한요소법의 적합성을 Goldsmith [19]에 의한 Hertz解와 비교하여 확인하였다. 두번째 문제는 벌칙매개변수 ε_1과 요소크기매개변수 h에 관한 수렴도를 보이기 위하여 점진적이고 균등한 mesh refinement가 가능한 矩形의 탄성체를 대상으로 한 剛體펀치(rigid punch) 문제를 취급하였다. 세번째 문제는 두번째 문제에 마찰효과를 포함시켰을 경우 마찰력의 크기와 접촉면 및 접촉압의 변화를 비교하였다.

예제 1. 무한히 긴 원형바(bar)가 평탄한 강체기반위에 놓여있고 바로 위쪽에 균일하중이 작용하고 있다고 하자. 이 경우 plane문제로 생각할 수 있으며 유한요소 모델과 치수는 Fig. 6.1과 같다. Young 계수는 $E=1000$이며 Poisson 比는 0.3으로 하였다. St. Venant

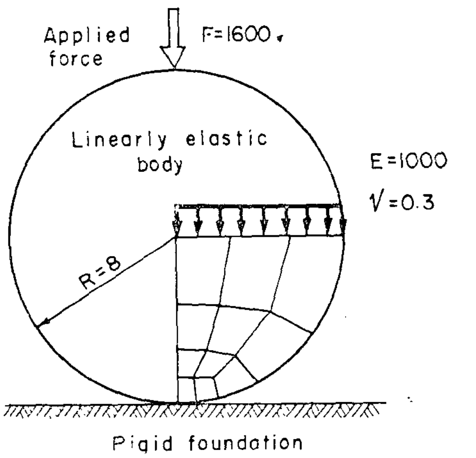

Fig. 1 Finite element model of a Hertz problem.

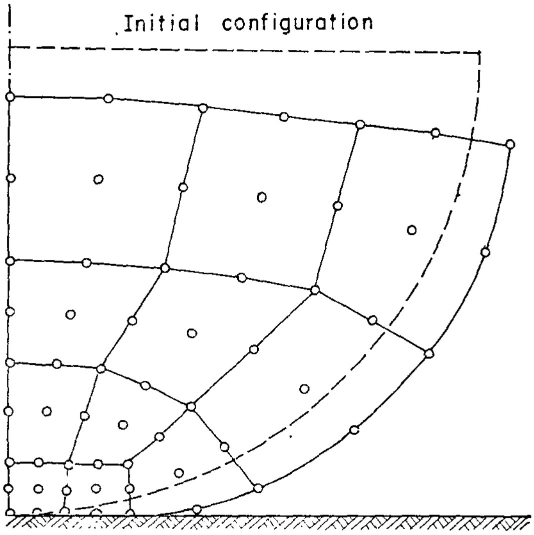

Fig. 2 Deformed configuration of a Hertz problem by Q_2-elements and Simpson's rule.

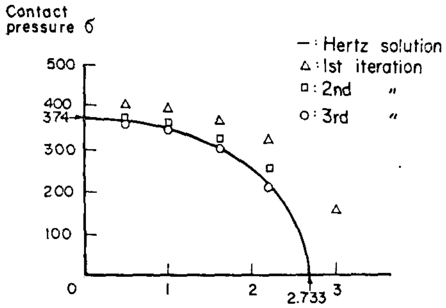

Fig. 3 Contact pressure distribution.

의 원리가 성립된다고 가정하여 단면의 $\frac{1}{4}$을 요소화하여 풀었다. Fig. 6.2는 변형후의 모양이며 Fig. 6.3은 유한요소解와 Hertz解에 의한 접촉압을 비교한 것으로 만족할 만한 결과를 보여주고 있으며 (4.7)에 의한 반복계산과정은 3번째에 수렴함을 보여주고 있다. 유한요소는 11개의 Q_2-요소가 사용되었다.

예제 2. 원통형의 펀치(circular punch)로 容器에 收容된 두꺼운 평판형 변형체를 압착시킨 문제를 해석하였다. 예제 1의 경우와 마찬가지로 Young계수 $E=1000$이며 Poisson 比는 0.3이다. Q_2-요소를 36개(6×6) 사용하여 누름거리 $d=0.6$일때 수치해석한 결과 변형된 모양은 Fig. 6.4와 같으며 접촉압 분포는 Fig. 6.5와 같다. 이 문제는 벌칙화문제의 유한요소근사해의 수렴을 결정하기 위한 것으로 完全解 u와 τ를 얻을 수 없어 系의 스트레인에너지를 비교한 상대오차 E_ε와 E_h를 이용하였다.

$$E_\varepsilon=\Pi(u_\varepsilon^h)-\Pi(u_i^h),\quad E_h=\Pi(u_i^h)-\Pi(u_i^h)$$

여기서 "∧" 표시는 변수의 어떤 고정값이다. 이 경우

$$E_\varepsilon \leq c_1\varepsilon_1+C_2,\quad E_h\leq C_3h^4+C_4$$

임을 보일 수 있으며 Fig. 6.6과 6.7은 위 결과와 일치하고 있다.

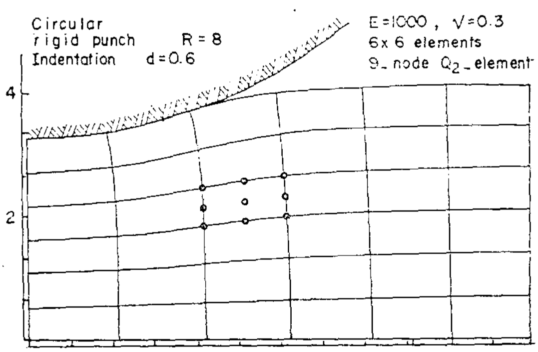

Fig. 4 Rigid punch problem by Q_2-elements and Simpson's rule.

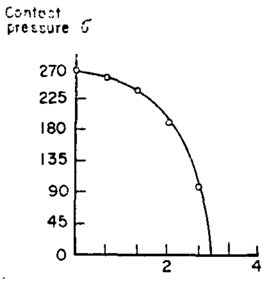

Fig. 5 Contact pressure distribution.

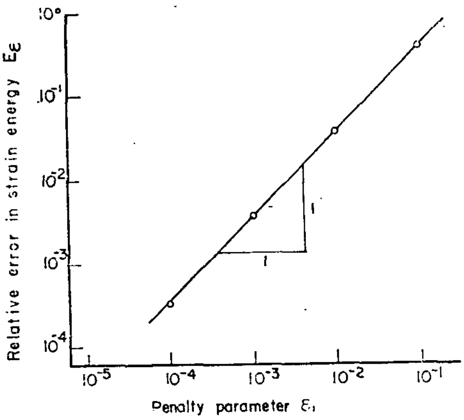

Fig. 6 Convergence of penalty method.

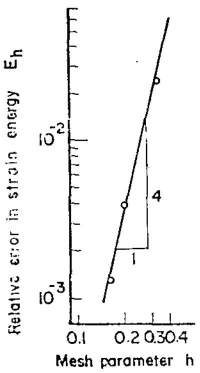

Fig. 7 Convergence of finite element method.

예제 **1**과 2의 경우는 (4.8)로 주어지는 오차한계를 零으로 줄 경우에도 3회 또는 4회반복 계산만에 解를 구할 수 있었으나 Lagrange乘數法을 사용했을 경우는 30회의 반복계산이 필요한 경우가 있었다.

예제 **3.** 예제 2와 같은 경우이나 마찰을 고려한 것으로 마찰계수 $\nu_f=0.6$을 취하였다. 마찰력의 급격한 변화가 예상되는 곳에 요소를 세분하여 40개의 Q_2-요소를 사용하였고 여기서 사용된 벌칙매개변수는 $\varepsilon_1=10^{-10}$이며 정규화매개변수는 $\varepsilon_2=10^{-8}$을 사용하였다. 이의 유한요소모델은 Fig. 6.8과 같으며 Fig. 6.9는 변형

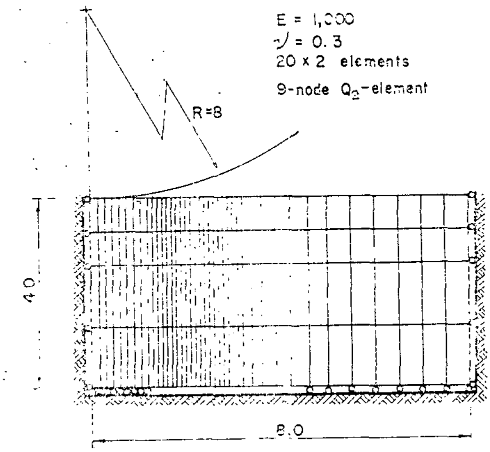

Fig. 8 Finite element model of Example probem 3.

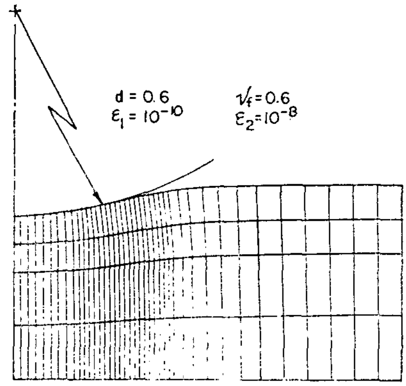

Fig. 9 Deformed configuration of Example problem 3.

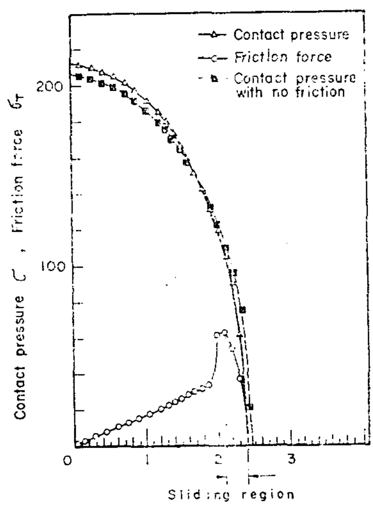

Fig. 10 Contact pressure and friction force distribution.

후의 모양을 보여주고 있다. Fig. 6.10은 마찰력과

접촉압분포를 나타낸다. 미끄러짐(sliding)이 일어나는 부분과 일어나지 않는 부분의 경계는 마찰력의 크기가 反轉되는 곳으로 미끄러짐의 범위내에서는 마찰력이 정확하게 접촉압의 0.6배가 됨을 볼 수 있다. 마찰력을 고려하지 않은 경우와 비교하면 접촉면의 크기는 줄어들고 최대접촉압은 더 커짐을 보여주어 본 알고리듬의 타당성을 가늠할 수 있다. 접촉면과 접촉압을 구하는 과정을 inner iteration이라 하고 마찰효과를 고려한 보정해를 구하는 과정을 outer iteration이라 했을 때 inner iteration은 3~4회이면 충분하나 outer iteration은 15회에 수렴치를 얻을 수 있었다.

後 記

本 硏究는 韓國科學財團의 硏究費 지원으로 수행되었으며 이에 심심한 감사의 뜻을 표합니다.

參 考 文 獻

1. G. Fichera, Un teorema generale di semicontinuita per gli integrali multipli e sue applicazioni alla fisicamatematica, in Atti del convergno, Toronto, 1963.
2. G. Duvaut & J.L. Lions, Inequalities in mechanics and physics, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
3. J.J. Kalker, Variational principles of contact elastostatics, J. Inst. Maths. Applics., 20.
4. I. Hlavaček & J. Lovišek, A finite element analysis for the Signorini problem in plane elastatics, Aplikace Matematiky, 22, 1977.
5. N. Kikuchi & J.T. Oden, Contact problems in elasticity, SIAM, Philadelphia, 1981.
6. Y.J. Song, Reduced integration and exterior penalty methods for finite element approximations of contact problems in incompressible linear elasticity, Ph. D. Dissertation, The University of Texas at Austin, 1980.
7. R. Glowinski, J.L. Lions & R. Trémoliērs, Analyse numerique des inequations variationelles, 2 Vols., Dunod, Paris, 1976.
8. I. Paczell, Solution of elastic contact problems by the finite-element displacement method, Acta Technica, Aca. Sci. Hungaricae, 82, 1976.
9. N. Kikuchi & Y.J. Song, Contact problems involving forces and moments for incompressible linearly elastic materials, Int. J. Eng. Sci., 18, 1980.
10. S.K. Chan & I.S. Tuba, A finite element method for contact problems, Int.J. Mech. Sci., 13, 1971.
11. T.J.R. Hughes, R.L. Taylor, L. Sackman, A. Curnier & W. Kanoknukulchai, A finite element-method for a class of contact-impact problems, Compt. Meth. Appl. Mech. Eng.,8, 1976.
12. R. Courant, K. Friedrich & H. Lewy, On the partial difference equations of mathematical physics, IBM J., 11, 1967.
13. W.I. Zangwill, Nonlinear programming via penalty functions, Management Science, 13, 1967.
14. R. Courant, Variational methods for the solution of equilibrium and vibrations, Bull. Amer. Math. Soc., 49, 1943.
15. J.J. Kalker, The computation of three dmensional rolling contact with dry friction, Int.J. Num. Meth. Eng., 14, 1979.
16. M.J. Sewell, On dual approximation principles and optimization in continuum mechanics, Phil. Trans. R. Lon. A 265, 1977.
17. P.D. Panagiotopoulos, On the unilateral contact problem of structures with nonquadratic strain energy density, Int. J. Solids and Structures, Vol. 13, 1977.
18. P.G. Ciarlet, The finite-element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.
19. W. Goldsmith, Impact, Edawrd Arnold, London, 1960.