<論 文>

노치(Notch)를 가진 試片의 有限要素法에 의한 彈塑性 極限 荷重解析

李 澤 淳* · 金 東 燮* · 黃 平*

(1983年 6月 10日 接受)

Elastic-Plastic Limit Load Analysis of Notched Specimen by the Finite Element Method

Taik Soon Lee, Dong Sub Kim and Pyung Hwang

Abstract

Many papers have shown limit loads of v-notched tension specimens in plane stress by the elastic-plastic finite element method.

But they are always higher than the theoretical maximum loads.

The present approach tries to find the reasons and formulates correction factor applicable to any notch shape using virtual work principle with triangular elements.

The corrected limit loads are in good agreement with theoretical upper bound solutions and they are little influenced by mesh size and specimen length, which make the computing time save.

기 호 설 명

A_i^e : 요소면적
A_s : 최소 단면의 단면적
a : 최소 단면의 반폭
$[B]$: 절점변위 변형률 행렬
b_i, b_j, b_k : 절점변위—변형률 행렬의 성분
C_f : 수정계수
C_σ : 표면외력 구속경계
C_u : 변위 구속경계
c_i, c_j, c_k : 절점변위—변형률 행렬의 성분
C_{ijkl} : 응력—변형률 비례상수
$[D^e]$: 탄성상태의 응력—변행률 행렬
$[D^p]$: 소성 상태의 응력—변형률 행렬
$\{d\delta\}$: 변위 증분 행렬
$\varepsilon_{ij}, \bar{\varepsilon}_p$: 변형률, 소성 변형률
G : 전단계수
H' : 변형률 경화률
h_e : 한 요소의 길이
$[K]$: 강성형렬
N : 최소단면 주위의 요소수
N_i : 형상함수
P_{cN} : 유한요소법에 의한 극한하중
P_{yl} : 절점하중
T_i : 표면력
t : 두께
U_i : 변위
V_n : 최소 단면부에 있는 요소들의 체적
$\sigma_{ij}, \bar{\sigma}$: 응력, 상당응력
$\triangle$: 삼각형 요소의 면적
δB_i : 체적력

* 正會員, 嶺南大學校 工科大學

1. 緖 論

最近 船舶이나 航空機 等의 構造物에 대한 經濟性追求의 傾向과 아울러 强度에 對한 安全性을 고려한 設計上의 배려가 강력히 要求되고 있다.

實際의 構造物에는 部材의 不連續部, 有孔部 혹은노치部 등에 發生하는 높은 應力으로 塑性變形이 유발되고 이로 인하여 構造物의 耐荷能力이 저하되어 安全性을 위협하는 경우가 적지 않다.

이러한 構造物의 安全率을 정확히 評價하기 위하여 缺陷部의 最小斷面의 最終强度를 決定하는 極限荷重을 구할 必要가 있고 이러한 문제는 線型解析으로는 不可能하여 非線型解析에 관한 많은 노력이 경주되어 왔다.

特히 노치의 경우 Hill[1,12]이 Slip line 理論으로 이 問題를 解析하였으나, 이 方法으로는 노치의 形狀이나 境界條件이 比較的 간단한 경우에만 적용될 수 있었다.

그러나 最近에 이르러 電子計算機의 發達로 인하여 數値解析法의 하나인 有限要素法을 彈性線型解析[3,4]에서 부터 확장하여 非線型解析[5,6,7]에 까지 적용시킬 수 있게 되었다.

Yamada[10]는 이러한 方法으로 V-노치를 가진 彈完全塑性體에 對한 極限荷重解析을 하였으나, 그 값은 理論的 上限値인 Hill의 解[2]보다 다소 크게 나타났고 그후 Zienkiewicz[9]는 塑性域에서 應力修正法을 導入한 해석으로 Yamada의 解보다도 좋은 결과를 얻었으나 역시 Hill의 解보다 큰 값을 나타내었다.

Knothe[11]는 이러한 差異를 有限要素解析의 數式自體에서 發生하는 分割誤差에 依해서 생긴다고 보고 이에 對한 修正係數를 導入하여 V-노치의 경우를 極限荷重解析하여 比較的 좋은 結果를 얻었다.

本 硏究에서는 任意形狀의 노치를 가진 평판의 平面應力問題에 對하여 彈塑性有限要素解析[7,13]을 하고, 그 노치에 適用될 수 있는 분할오차에 대한 修正係數를 가상일의 原理[8]로 부터 數式化하여 解析結果를 修正함으로써 材料의 極限荷重値를 求하였다.

2. 基本理論

2.1. 彈塑性 理論

物體가 彈性限界를 넘으면 塑性變形이 일어나고 이때에 應力과 變形率의 관계는 彈性에서의 경우와 달라진다. 그러므로 이 彈性限界를 定하는 降伏條件 및 構成方程式을 決定하기 위하여 다음과 같은 假定을 한다.

1) 材料는 均質이며 等方性이다.
2) Von Mises 降伏條件式을 適用한다.
3) 增分理論(incremental theory)을 사용한다.
4) 應力과 變形率 관계에 Prandtl-Reuss 假說을 적용한다.

2.2. 有限要素解析

(1) 形狀函數(shape function)

임의의 要素에 節點變位와 節點力이 作用한다면 要素 내부의 變位를 간단한 變位 mode로 假定할 수 있다. 즉 要素內部의 임의의 점(x, y)에서의 變位(u, v)를 그 要素의 節點變位로 나타내면 다음과 같으며

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \left\{N(x,y)\right\}^T \left\{\delta\right\}^e \tag{1}$$

三角形 要素에 대해서 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} du_i \\ dv_i \\ du_j \\ dv_j \\ du_k \\ dv_k \end{Bmatrix} = [N]\{d\delta\} \tag{2}$$

여기서

$$\begin{aligned} &Ni=(a_i+b_iX+c_iY)/2\Delta \\ &N_j=(a_j+b_jX+c_jY)/2\Delta \\ &N_k=(a_k+b_kX+c_kY)/2\Delta \\ &a_i=X_jY_k-X_kY_j,\ b_i=Y_j-Y_k,\ c_i=X_k-X_j \\ &a_j=X_kY_i-X_iY_k,\ b_j=Y_k-Y_i,\ c_j=X_i-X_k \\ &a_k=X_iY_j-X_jY_i,\ b_k=Y_i-Y_j,\ c_k=X_j-X_i \\ &\quad (i,j,k:1,2,3 \text{ permutation}) \end{aligned} \tag{3}$$

다음, 要素의 變位增分과 變形率 增分 사이에는 아래와 같은 단계가 있다.

$$\{d\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ dr_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial(du)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial(dv)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial(dv)}{\partial x}+\dfrac{\partial(du)}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

위의 式에 式 (2)를 代入하면

$$\{d\varepsilon\} = \begin{pmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} du_i \\ dv_i \\ du_j \\ dv_j \\ du_k \\ dv_k \end{Bmatrix} = [B]\{d\delta\} \tag{5}$$

로 된다.

式 (5)의 matrix $[B]$는 彈性과 塑性을 통하여 同一하다.

(2) 構成方程式

가. 彈性領域

材料가 彈性일 때의 構性方程式은 Hook의 法則에 의

하면

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{6}$$

으로 되고, 이를 平面應力問題(plane stress)로 單純化하여 增分型으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ dr_{xy} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

$$\{d\sigma\}=[D^e]\{d\varepsilon^e\}$$

나. 塑性領域

塑性領域에서 全變形率 增分을 彈性變形率 增分과 塑性變形率 增分의 合으로 다음과 같이 表示된다.

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}^e+d\varepsilon_{ij}^p \tag{8}$$

塑性變形率 增分 $\{d\varepsilon^p\}$는 plastic potential에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d\varepsilon^p=h\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}df \tag{9}$$

여기서 h는 응력, 변형률, loading history에 의존하는 비례상수이다.

式 (8)과 증분이론으로부터

$$\{d\sigma\}=[D^e]\{d\varepsilon^e\}=[D^e]\{d\varepsilon\}-[D^e]\{d\varepsilon^p\} \tag{10}$$

이 成立되고 式 (10)에 式 (9)를 代入하면 다음과 같다.

$$\{d\sigma\}=[D^e]\{d\varepsilon\}-h[D^e]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}df \tag{11}$$

다음에 塑性變形으로 인한 塑性일은 다음과 같고

$$dW^p=\{\sigma\}^T\{d\varepsilon^p\}=h\{\sigma\}^T\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}df \tag{12}$$

이를 相當應力과 相當變形率增分으로 表示하면 다음과 같다.

$$dW^p=\{\sigma\}^T\{d\varepsilon^p\}=\bar{\sigma}d\bar{\varepsilon}^p \tag{13}$$

式 (13)에 式 (12)를 代入하여 hdf를 求하면

$$hdf=\frac{\bar{\sigma}}{\{\sigma\}^T\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}}d\varepsilon^p \tag{14}$$

으로 表示된다.

그리고 變形率 硬化假說에 의하면 塑性變形의 기울기 H'는

$$H'=\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p} \tag{15}$$

로 되며 式 (15)를 式 (14)에 代入하고 Von-Mises 항복조건식 $f=\bar{\sigma}$를 적용하여 hdf를 구하면

$$hdf=\frac{\bar{\sigma}}{\{\sigma\}^T\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}}\cdot\frac{\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T\{d\sigma\}}{H'} \tag{16}$$

이고 式 (16)을 式 (11)에 代入하여 다시 hdf를 구하면 다음과 같다.

$$hdf=\frac{\{\partial f/\partial\sigma\}^T[D^e]\{d\varepsilon\}}{H'/C+\{\partial f/\partial\sigma\}^T[D^e]\{\partial f/\partial\sigma\}} \tag{17}$$

여기서 $\frac{\bar{\sigma}}{\{\sigma\}^T\{\partial f/\partial\sigma\}}=C$ 이다.

式 (17)을 式 (11)에 代入하면

$$\{d\sigma\}=\left([D^e]-\frac{[D^e]\{\partial f/\partial\sigma\}\{\partial f/\partial\sigma\}^T[D^e]}{H'/C+\{\partial f/\partial\sigma\}^T[D^e]\{\partial f/\partial\sigma\}}\right)\{d\varepsilon\}$$

$$\text{즉 } \{d\sigma\}=[D^p]d\varepsilon \tag{18}$$

으로 쓸 수 있다.

Von Mises 降伏條件式은 다음과 같고

$$f^2=\frac{1}{2}[(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+(\sigma_x-\sigma_y)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)]=\bar{\sigma}^2 \tag{19}$$

이를 利用하여 式 (18)의 各 項들을 計算하여 $[D^p]$ 行列을 나타내면 다음과 같다.

$$[D^p]=[D^e]-\frac{9G^2}{S_0}\begin{pmatrix} \sigma_x'^2 & & \text{SYM.} \\ \sigma_x'\sigma_y' & \sigma_y'^2 & \\ \sigma_x'\tau_{xy} & \sigma_y'\tau_{xy} & \tau_{xy}^2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

여기서 $S_0=(H'+3G)\bar{\sigma}^2$ 이다.

다. 剛性行列(stiffness matrix)

任意의 物體에 對하여 平衡方程式

$$\delta\sigma_{ij,j}+\delta B_i=0 \tag{21}$$

및 境界條件

$$T_i=\bar{T}=\sigma_{ij}n_j\ ;\ C_\sigma \text{ 상} \qquad U_i=\bar{U}\ ;\ C_u \text{ 상} \tag{22}$$

를 滿足하는 假想일의 原理는 다음과 같다.

$$\int_D B_i\delta u_i dtdxdy+\int_{C\sigma}T_i^{(\nu)}\delta u_i tds=\int_D\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV \tag{23}$$

式 (23)에 各 節點變位와 節點力을 代入하면

$$\{\delta F\}=\int_D[B]^T[D][B]tdxdy\{d\delta\} \tag{24}$$

로 나타낸다. 즉

$$\{\delta F\}=[K]\{d\delta\} \tag{25}$$

로 表示하면 剛性行列(stiffness matrix) $[K]$는 다음과 같다.

$$[K]=\int_V[B]^T[D][B]tdxdy \tag{26}$$

(3) 荷重 增分法

式 (26)에서 要素의 剛性行列이 定하여지면 이들을 組立하여 構造全體의 剛性行列 및 剛性方程式 $\{dF\}=[K]\{d\delta\}$를 얻는다.

彈·塑性問題에 對하여 荷重을 增分式으로 作用시켜 各 增分 段階에서 얻어진 解를 그때까지의 解에 加算하여 外力에 對한 解를 求하여야 한다.

$$\text{즉 } \begin{aligned} \{F\}_i&=\{F\}_{i-1}+\{dF\}_i \\ \{\delta\}_i&=\{\delta\}_{i-1}+\{d\delta\}_i \\ \{\sigma\}_i&=\{\sigma\}_{i-1}+\{d\sigma\}_i \\ \{\varepsilon\}_i&=\{\varepsilon\}_{i-1}+\{d\varepsilon\}_i \end{aligned} \tag{27}$$

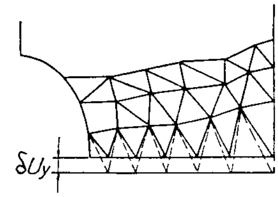


Fig. 1 Discretization error

여기서 i, $i-1$은 各各 場分段階를 나타낸다.

그런데, 荷重增分 $\{dF\}_i$를 取하는 方法은 個個의 要素를 降伏시키는데 必要한 荷重增分量들을 計算하여 그 중 가장 最小의 荷重增分을 擇하여 그 變形段階에서의 荷重增分量으로 擇한 Yamada의 方法[19]과 미리 荷重增分을 주는 Marcal[15]의 方法이 있는데 本 硏究에서는 Yamada의 方法을 使用하였다.

2.3. 修正係數의 數式化

Fig. 1에서 주어진 것과 같이 임의형의 노치를 가진 試片의 노치부근의 要素에 대하여 가상일의 원리를 적용하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{N} P_{yi}\delta U_{yi} = \int_{V_n} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\, dV \tag{28}$$

平面應力狀態(plane stress)에서 노치부근의 요소에 $\delta u_y=1$의 가상변위를 주면 한개의 三角形要素에 걸리는 變形率成分은

$$\delta\varepsilon_{ij}^e = \{\delta\varepsilon_x^e\,\delta\varepsilon_y^e\,\delta r_{xy}^e\} = \{0 \;\; 1/h^e \;\; 0\} \tag{29}$$

와 같이 되고 식 (28)을 한개의 요소에 대하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$P_y^e = \left(\sigma_y \cdot \frac{1}{h^e}\right) dV \tag{30}$$

이를 최소단면적 부근의 전 요소에 대하여 쓰면

$$\sum_{i=1}^{N} P_{yi}^e = \int_V \left(\sigma_y^e \cdot \frac{1}{h^e}\right) dV = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{yi}^e \cdot \frac{1}{h_i^e} t_i A_i^e \tag{31}$$

로 되고 여기서 σ_{yi}를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma_{yi} \le \sigma_{yi\max} = (2/\sqrt{3})\sigma_Y \tag{32}$$

이를 균일두께를 갖는 재료에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$P_{CN} = \sum_{i=1}^{N} P_{yi}^e \le \sum_{i=1}^{N} \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_Y (t \cdot A_i^e / h_i^e)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_Y \sum_{i=1}^{N} \left\{ \left(\frac{A_i^e}{h_i^e} \right) / a \right\} (a \cdot t) \tag{33}$$

式 (33)에 나타난 바와 같이 수식 자체에 Hill의 이론치$\left(P_Y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_Y A_S\right)$보다 큰 값이 내재되어 있음을 알 수 있다.

여기서 분할오차를 고려한 수정계수를 임의 형상에 대하여 각 요소 별로 다음과 같이 정의함으로써 이론치와의 차이를 수정하도록 한다.

$$C_f = P_{CN} \Big/ \left(A_S \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_Y \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{A_i^e}{h_i^e} \right) / a \tag{34}$$

3. 計算例 및 考察

3.1. 프로그램의 構成

프로그램의 構成은 Table 1에서와 같이 일반적인 彈·塑性問題의 有限要素法의 構成과 유사하며, Data Input 작업을 줄이기 위해 절점과 요소의 자동분할의 Subroutine과 극한하중의 修正係數를 구하기 위한 Subroutine이 포함되어 있다.

INPUT에서 節點座標, 境界條件, 要素番號, 材料常數를 入力시키면 降伏되는 순서와 降伏된 요소 그리고 그 상태에서의 荷重値를 出力시킨다.

3.2. 計算例 및 考察

본 프로그램을 使用하여 먼저 Fig. 2에서와 같은 V-노치를 가진 引張試片에 對하여 解析하였다.

그 結果 荷重(P)— 變位(δ)曲線을 Fig. 3에 圖示하였다.

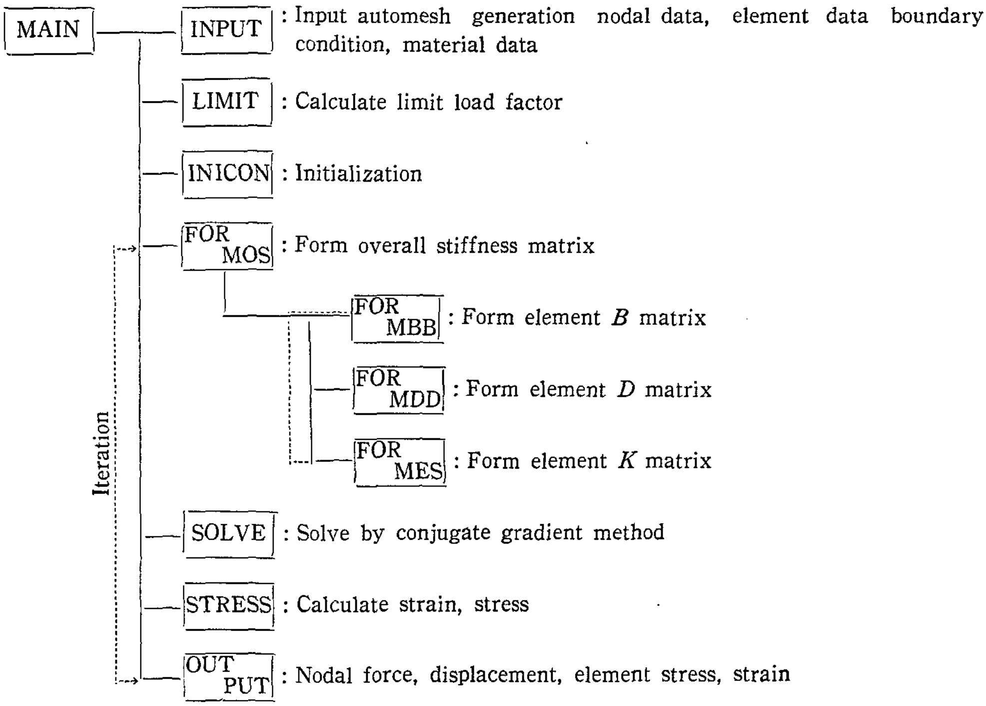
여기서 곡선이 급격히 變하는 점은 塑性域이 傳播되어 처음으로 중앙부에 도달했을 때이다.

그리고 試片의 最小斷面積部分 전체가 塑性域이 되면 그 以上의 荷重增加는 극히 적으므로 이 값을 極限荷重値로 취한다.

이 結果는 Hill이 Slip line theory로 계산한 값과 비교해서 그 값이 다소 크게 나타남을 알 수 있다.

Yamada는 이 結果가 상승된 이유를 誠片의 길이가 有限하기 때문에 End Condition이 노치 주변의 應力분포에 영향을 주게 되어 Hill의 理論値보다 다소 커진다고 했으나, End effect를 조사하기 위하여 시편의 길이를 달리해서 구해본 결과 極限荷重値는 試片의 길이 變化에 따른 영향이 극히 적음을 알 수 있었으며, 이 때 구한 極限荷重値를 Fig. 4에 나타내었고, Fig. 5는 이때의 中央部($C-C'$)의 길이 방향의 應力분포를 나타낸 것이다.

Table 1 Flow chart



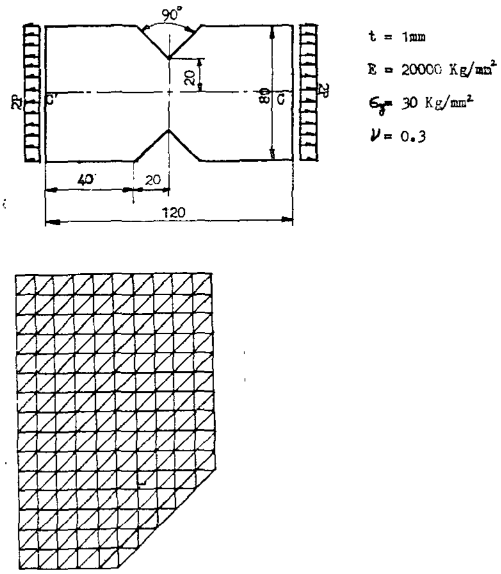


Fig. 2 Notched tension specimen and finite element

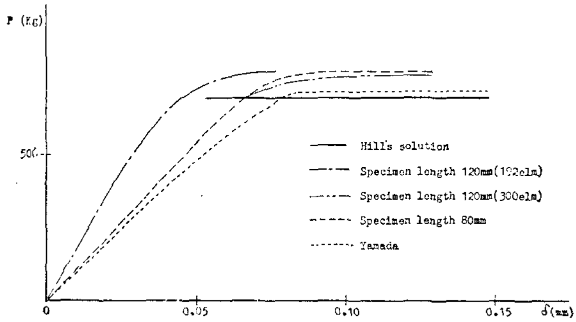


Fig. 3 Load-deflection cuvde of V-notched tension specimen

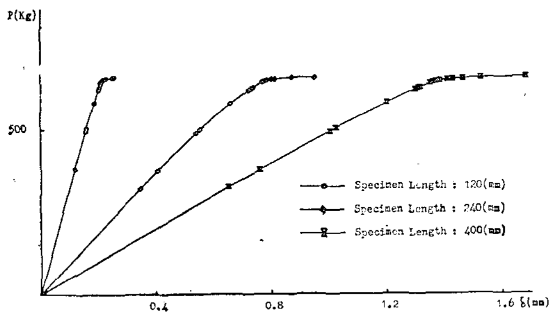


Fig. 4 Load-deflection curve of V-notched tension specimen at various length

또 유한요소법으로 구한 極限荷重値를 式 (34)에 주어진 修正係數로 보정한 값을 Table 2에 나타내었다.

Table 2에서 보는 바와 같이 수정계수로 보정한 극한하중치는 요소의 수에 크게 영향을 받지 않음을 알

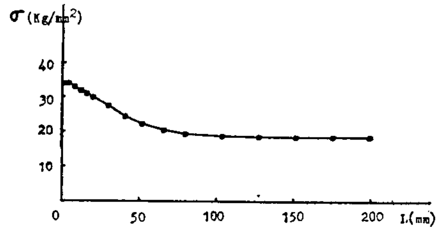


Fig. 5 Stress distribution along $C'-C$ at center line

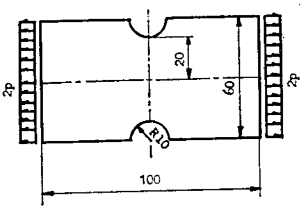


Fig. 6 U-notched tension specimen

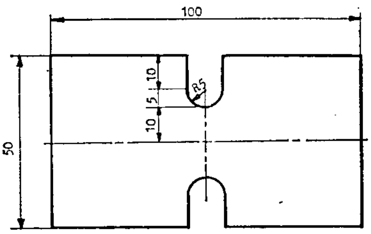


Fig. 7 U-notched tension specimen(deep)

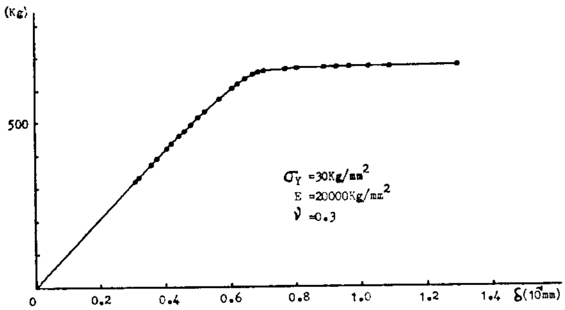


Fig. 8 Load-deflection curve of U-notched tension specimen

Table 2 V-Notched tension specimen comparision of numerical result

Method / Value	Result (300 elm.)	Result (192 elm.)	Yamada's result	Knothe's result	Zienkiewicz's result	Hill's solution
Computed limit load (Kg)	757.4	775.0	715.3	758.8	711.6	692.8
Corrected limit load (Kg)	688.5	688.9	—	686.8	—	
Constraint factor	1.147	1.148	1.192	1.149	1.186	1.152

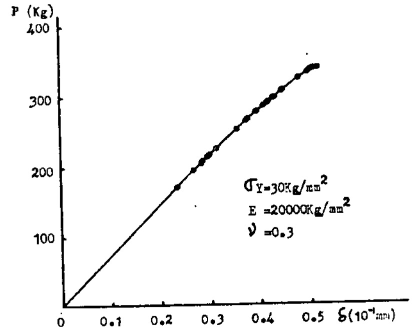


Fig. 9 Load-deflection curve of U-notched tension specimen(deep)

수 있다.

Fig. 6과 Fig. 7은 양측에 반원형을 갖는 U-노치 시편의 형상을 나타내며 U-노치 시편의 荷重—變位曲線은 Fig. 8과 Fig. 9에 나타내고 있다.

Table 3에는 U-노치 시편의 극한하중치를 수정계수로 구한 값을 나타내었다.

Table 3 U-Notched tension specimen comparison of numerical results

Method / Value	Result (1)	Hill's solution	Result (2)	Hill's solution
Computed limit load (Kg)	687.3	678.0	341	339
Computed limit load (Kg)	678.0		337.3	
Constraint factor	1.13	1.13	1.12	1.13

4. 結 論

U-노치와 V-노치를 가진 平板을 有限要素法으로 彈塑性解析을 하고 각각의 形狀에 대한 수정계수로 極限荷重을 修正하여 다음과 같은 結果를 얻었다.

1. 같은 材質의 試片은 노치의 形狀과 a/B가 같으면 試片의 길이에 관계없이 極限荷重値는 同一하다.

2. 有限要素法으로 구한 極限荷重値는 최소 단면적 전체에 塑性域이 傳播되었을 때 걸리는 荷重이다.

3. 有限要素法으로 求한 極限荷重値는 理論値보다 큰 값을 나타내는데 本 硏究에서 求한 修正係數로 보정하면 理論値와 비교적 잘 맞고 要素의 數를 적게하여 계산 시간을 절약할 수 있다.

後　記

本 硏究는 1982年度 文敎部 학술 연구 조성비에 의하여 연구되었으며 이에 감사하는 바입니다.

References

(1) R. Hill, "Mathematical Theory of Plasticity", Chap. 9, pp. 237-261, Oxford, London, 1950.

(2) L.M. Kachanov, "Foundations of the Theory of Plasticity", pp. 256-292, North-Holland Publishing Company, 1971.

(3) C.S. Desai, J.F. Abel, "Introduction to the Finite Element Method", Van-Nostrand Reinhald Company, 1972.

(4) E. Hinton, D.R.J. Owen, "Finite Element Programming", Academic Press, London, 1977.

(5) D.R.J. Owen, E. Hinton, "Finite Element in Plasticity", Pineridge Press, Swansea, 1980.

(6) O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science", pp. 450-478, McGraw-Hill, London, 1971.

(7) 山田嘉昭, 塑性・粘彈性, Chap. 3 pp. 75-147, 培風館, 1980.

(8) F.A.M. McClintock, A.S. Argon, "Mechanical Behavior of Materials", Chap. 10, pp. 359-375, Addision-Wesley, Massachusetts, 1966.

(9) G.C. Nayak, O.C. Zienkiewcz, "Elasto-Plastic Stress Analysis; A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening", Int. J. for Num. Methods in Eng. Vol. 5, pp. 113-135, 1972.

(10) Y. Yamada, N. Yoshimura, "Plastic Stress-Strain Matrix and Its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method", Int. J. Mech. Sci. Vol. 10, pp. 343-354, 1968.

(11) K. Knothe, W. Muller, "Some Remarks on the Elastic-Plastic Limit Load Analysis of a Plane V-notched Specimen", Int. J. Mech. Sci. Vol. 22, pp. 167-172, 1980.

(12) D.J.F. Ewing, R. Hill, "The Plastic Constraint of V-notched Tension Bars", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 15, pp. 115-124, 1967.

(13) J.C. Nagtegal, D.M. Parks, J.R. Rice, "On Numerically Accurate Finite Element Solutions. In the Fully Plastic Range, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering", Vol. 4, pp. 153-177, 1974.