

<論 文>

平面應力狀態에서 균열先端의 小規模降伏에
관한 有限要素解析

林 莊 根* · 孟 柱 星* · 金 炳 鎔*

(1983年 2月 28日 接受)

Finite Element Analysis on the Small Scale Yielding
of a Crack Tip in Plane Stress

Jang Keun Lim, Joo Sung Maeng and Byung Yong Kim

Abstract

Plastic plane stress solutions are given for a center cracked strip, characterized by the Ramberg-Osgood plastic index, under bi-axial tension. Using a power law hardening stress-strain relation, an incremental plasticity finite element formulation is developed, and simple formulation is given for computing J-integral with nodal displacements. The near tip angular distribution of von Mises effective stress doesn't differ significantly in magnitude according to the change of loading stress and bi-axial load combination factor. But, for smaller plastic index, the location of its maximum value moves vertically at a head of crack. J-integral value, in the plastic zone near crack tip, decreases with load combination factor for large and small plastic index.

記 號 說 明

d	: 増分表示	r, θ	: 균열先端을 原點으로 한 極座標系
E	: 彈性係數	T_i	: Traction ($=\sigma_i n_i$)
f_i	: 荷重 vector	$u_{i,x}$: i 方向 變位에 대한 微分 ($=\frac{\partial u_i}{\partial x}$)
h	: 板두께	α	: 材料의 塑性定數
J	: 一般 J -積分値	δ_{ij}	: Kronecker's delta
J_e	: y 軸단의 引張에 依한 彈性 J -積分値	σ_0, ϵ_0	: 降伏點에서의 應力 및 變形率
J^*	: 균열先端에서의 彈塑性 J -積分値	σ_e, ϵ_e	: Von Mises 의 有效應力 및 變形率
k	: 荷重組合係數($=f_y/f_x$)	σ_∞	: 負荷應力
h	: 균열 길이	σ_e^*	: $\theta=0^\circ$ 에서의 有效應力
l	: 線要素의 길이	σ_{ij}	: 無次元 應力 tensor ($=\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_e}$)
m	: 積分經路上的의 線要素의 數	ϵ_{ij}	: 無次元 變形率 tensor ($=\frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_e}$)
n	: 塑性指數(plastic index)	Δ	: 要素面積
N_p	: 系의 節點數	ξ	: 無次元 線座標
		ϕ	: x 軸과의 傾斜角

* 正會員, 漢陽大學校 工科大學

- ν : 프와송比
- μ : Lamé 常數 $(= \frac{E}{2(1+\nu)})$
- λ : Lamé 常數 $(= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)})$

1. 序 論

균열板이 荷重을 받을 때 파괴 및 피로거동은 균열先端의 應力과 變形狀態에 따라 달라지며 균열의 진전 기준은 先端의 彈塑性狀態를 明確히 규명하므로써 設定될 수 있다. 이에 關係서는 Hutchinson^{1,2)}과 Rice Rosengren³⁾이 小規模降伏을 전제로 균열先端의 塑性域에서 應力 및 變形率의 分布가

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{J}{r}\right)^{\frac{1}{n+1}} \sigma_{ij}(\theta, n), \quad \epsilon_{ij} = \left(\frac{J}{r}\right)^{\frac{1}{n+1}} \epsilon_{ij}(\theta, n)$$

과 같이 表示됨을 밝힌 바 있다. 이 式에서 J 는 Rice⁴⁾의 經路積分値이며 應力 및 變形率의 特異性(singularity)을 보이는 진폭으로 파괴特性을 支配하는 重要한 因子가 된다. 이와같은 特異性은 塑性域이 균열선이에 比해서 相當히 작은 小規模降伏을 前提로 유도되었기 때문에 塑性域이 확대됨에 따른 이들의 變化과정은 밝혀지지 않았다.

Tracey⁵⁾는 特異要素를 使用한 有限要素 解析으로 小規模降伏 問題를 다루었으나 平面變形을 전제로한 Hutchinson의 結果를 確認한 것에 불과하였다.

Shih, Hutchinson⁷⁾은 有限균열판의 大規模降伏문제 를 다루면서 J 값을 小規模降伏이나 大規模降伏에 關係없이 有效하게 計算할 수 있는 補間公式를 提示하고 有限要素解析으로 評價하였다. 그러나 이 論文에서도 σ_{ij} , ϵ_{ij} 의 變化에 대해서는 아무런 言及이 없으며 특히 兩軸引張下에서의 이들 特性이 결여되어 있다.

Yagawa⁸⁾ 등은 補償函數를 導入한 非線形 有限要素 解析으로 非線形 破壞因子를 計算하여 n 가 작은 범위 ($n \leq 3$)에서 Shih, Hutchinson이 提示한 結果를 評價하였다. 특히 이 論文에서는 균열先端에서의 應力과 變形率이 小規模降伏이나 大規模降伏에서 同一하게 上記 式으로 表示됨을 言及하고 있으나 구체적인 實證資料는 提示하지 못하였다.

兩軸引張 문제로는 Shih⁹⁾가 균열 mode I, II가 組合된 狀態에서 균열先端의 彈塑性 應力擴大係數 및 應力의 分布狀態를 n 와 荷重組合係數의 함수로서 提示한 바 있으나 平面變形狀態로 制限한 점에 아쉬움이 있다.

따라서 本 論文에서는 平面應力狀態에서 有限균열판이 兩軸引張荷重을 받을 때 균열先端에서의 應力分布

와 J -積分값을 有限要素法에 依한 彈塑性 解析으로 決定하고 荷重組合係數와 塑性指數 및 塑性域이 擴大됨에 따른 破壞特性의 變化를 규명하고자 한다.

2. 彈塑性 問題의 有限要素法

균열板의 彈塑性 解析은 von Mises의 降伏條件을 適用하여 應力과 變形率의 關係式에만 非線形을 假定하고 平衡方程式 및 變形率과 變位の 關係式은 線形으로 생각하였다.

2.1. 應力과 變形率의 關係式

線形 彈性論에서 等方性 材料에 대한 應力과 變形率의 關係式은 다음과 같이 表示할 수 있다¹¹⁾.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (1)$$

이 式에 編差應力(s_{ij})를 導入하면

$$E\epsilon_{ij} = (1+\nu)s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2)$$

로 쓸 수 있다. 非線形 彈性論에서는 Ramberg, Os-good¹²⁾이 提示한 塑性指數 n 을 使用하면 式 (2)는 다음과 같이 一般化 된다^{13,14)}.

$$E\epsilon_{ij} = (1+\nu)s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \sigma_e^{n-1} s_{ij} \quad (3)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (4)$$

한편, 增分塑性理論에 依한 增分應力($d\sigma_{ij}$)과 增分 變形率($d\epsilon_{ij}$) 사이의 關係式은 式 (3), (4)를 利用하여 다음과 같이 얻어진다.

$$E d\epsilon_{ij} = (1+\nu) d s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3} d \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \sigma_e^{n-1} d s_{ij} + \frac{9}{4} \alpha (n-1) \sigma_e^{n-3} s_{ij} s_{kk} d s_{kk} \quad (5)$$

이 式은 負荷狀態에서 適用되고 除荷狀態에서는 式 (2)의 增分形이 使用된다.

$$E d\epsilon_{ij} = (1+\nu) d s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3} d \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (6)$$

이제 平面應力狀態를 假定하고 式 (5), (6)을 行列로 表示하면 다음 關係를 얻을 수 있다.

$$\{d\sigma\} = [D] \{d\epsilon\} \quad (7)$$

$$[D] = \begin{cases} [D_{ep}] = [c]^{-1} & \text{(loading)} \\ [D_e] & \text{(unloading)} \end{cases} \quad (8)$$

但, $c_{11} = \{1+g+h(2\sigma_x-\sigma_y)^2\}/E$

$$c_{12} = \{-\nu-g/2+h(2\sigma_x-\sigma_y)(2\sigma_y-\sigma_x)\}/E$$

$$c_{13} = 6h(2\sigma_x-\sigma_y)\tau_{xy}/E$$

$$c_{22} = \{1+g+h(2\sigma_y-\sigma_x)^2\}/E$$

$$c_{23} = 6h(2\sigma_y - \sigma_x)\tau_{xy}/E$$

$$c_{33} = \{2(1+\nu) + 3g + 36h\tau_{xy}^2\}/E$$

$$g = \alpha\sigma_e^{n-1}, \quad h = \alpha(n-1)\sigma_e^{n-2}/4.$$

2.2. 有限要素法

Fig. 1 과 같은 3 角形 要素에서 増分變形率, 増分應力 및 増分變位를

$$\{d\varepsilon\} = [d\varepsilon_x \ d\varepsilon_y \ d\nu_{xy}]^T \tag{9}$$

$$\{d\sigma\} = [d\sigma_x \ d\sigma_y \ d\tau_{xy}]^T \tag{10}$$

$$\{du\} = [du_{2i-1} \ du_{2i} \ du_{2j-1} \ du_{2j} \ du_{2k-1} \ du_{2k}]^T \tag{11}$$

로 表示할 때 變形率과 變位사이를 線形關係로 假定하였으므로

$$\{d\varepsilon\} = [B]\{du\} \tag{12}$$

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon\} \tag{13}$$

이 成立한다. 但,

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$b_i = y_j - y_k, \quad c_i = -x_j + x_k \tag{15}$$

이고 $[D]$ 는 式 (7)로 表示되는 線形 또는 非線形的 構成行列이다.

따라서 要素의 剛性行列은

$$[k] = [B]^T [D] [B] h\Delta \tag{16}$$

이 되고 支配方程式은

$$\sum_{\beta=1}^{2N_p} K_{\alpha\beta} du_{\beta} = df_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 2N_p \tag{17}$$

로 된다. 이 式에서 剛性行列 $[K]$ 에 포함되어 있는 $[D]$ 行列은 式 (8)과 같이 現 應力狀態의 함수로 表示되기 때문에 式 (17)은 非線形 連立方程式이 되며 反復法¹⁰⁾에 의해 풀 수 있다.

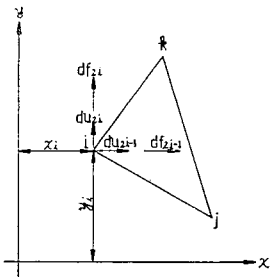


Fig. 1 Coordinate, incremental displacements and forces of *i*th nodal point

$$[\bar{D}] = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \cos\phi\sin\phi & -\nu(1+\cos^2\phi) \\ \nu\cos\phi\sin\phi & -(1+\cos^2\phi) \\ -\frac{1-\nu}{2}(1+\cos^2\phi) & \frac{1-\nu}{2}\cos\phi\sin\phi \end{bmatrix} \tag{18}$$

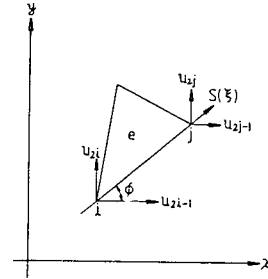


Fig. 2 Local coordinate of integral path

2.3. J-積分法

有限要素의 解로써 J-積分을 計算하는 方法은 여러 가지가 있으나 應力을 基準하면 많은 誤差를 유발하기 쉽다. 反面에 節點變位를 利用하면 比較的 安定된 값을 求할 수 있다.

$$J = \int_{\Gamma_1} \left[\int_0^{\xi} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right] dy - T_i u_{i,x} ds \tag{18}$$

이 式은 直角座標系로의 經路積分의 定義^{4,5)}이고 Γ_1 을 彈性領域에서 취함으로써 線形理論에 依하여 쉽게 이 값을 決定할 수 있다. 이 積分値는 經路獨立의 特性때문에 塑性領域, 즉 균열先端에서 J-積分値와 같게 된다.

$$J^* = J \tag{19}$$

Fig. 2와 같이 經路에 接한 要素의 節點을 *i, j*로 할 때 이 邊上에서 變位는 節點變位로써 다음과 같이 線形分布 한다고 假定할 수 있다.

$$\{u\} = [N]\{\delta\} \tag{20}$$

$$\text{但, } [N] = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & \xi \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\{u\} = [u_1 \ u_2]^T, \quad \{\delta\} = [u_{2i-1} \ u_{2i} \ u_{2j-1} \ u_{2j}]^T \tag{22}$$

이고 $\xi = s/l$ 이다. 式 (20)의 關係를 利用하여 變形率을 節點變位로 表示할 수 있고 變形率과 應力사이의 彈性關係를 利用하면 式 (18)은 다음과 같이 簡單히 表示된다.

$$J = \sum_{\alpha=1}^n \{\delta\}^T [\bar{B}]^T [\bar{D}]_{\alpha} \{\delta\}. \tag{23}$$

但,

$$[\bar{B}] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -\cos\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & 0 & \sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} -\cos\phi\sin\phi & \nu(1+\cos^2\phi) \\ -\nu\cos\phi\sin\phi & (1+\cos^2\phi) \\ \frac{1-\nu}{2}(1+\cos^2\phi) & -\frac{1-\nu}{2}\cos\phi\sin\phi \end{bmatrix} \tag{25}$$

3. 計算結果 및 檢討

3.1. 計算모델

數值計算을 위해서 두께가 一定($h=0.5\text{mm}$)하고 $a/b=1/3$, $L/a=0.5$ 인 얇은 矩形 均열판을 使用하고 이 板의 材料特性值를 table 1과 같이 假定하였다. 荷重은 Fig. 3과 같이 對稱으로 作用하고 荷重組合係數 k 를 0., 0.5, 1.0으로 變化시켜 計算함으로써 兩軸荷重에 대한 影響을 보고 n 를 3, 5, 13으로 變更하면서 이의 影響도 檢討 하였다. 빋금친 部分을 454개의 3角形 有限要素로 分割하고 均열先端部에서는 要素의 特性길이와 均열길이의 比가 0.01이 되도록 細分 하였다.

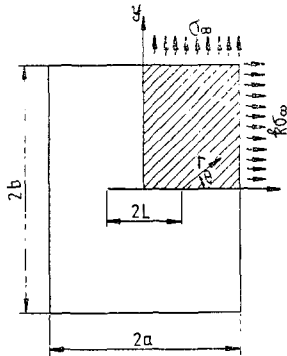


Fig. 3 Center cracked specimen

Table 1 Material properties of specimen

E	7243.3kg/mm^2
ν	0.33
σ_0	38.7kg/mm^2
$\alpha\sigma_0^{n-1}$	6.025

3.2. 均열先端部の 應力分布

Fig. 4는 單軸引張($k=0.$)인 경우에 無次元 有效應力(σ_e/σ_0^*)의 圓周方向 分布를 荷重의 増分에 따라 表示한 것이다. 塑性領域內($r/L=0.06$)에서 應力의 分布形態는 荷重의 크기에 따라서 다소 差異가 있음을 알 수 있다. $\sigma_\infty/\sigma_0=0.05$ 인 경우, 分布形態가 크게 다른 理由는 $r/L=0.06$ 인 位置에 아직 塑性이 생기지 않아서 이 曲線은 實際로 彈性狀態의 應力分布를 表示하기 때문이다. $\sigma_\infty/\sigma_0=0.293, 0.41$ 인 경우는 Hutchinson¹¹⁾의 特異解와 잘 一致하고 있으나 90° 부근에서 約 10% 程度의 誤差가 生기는 理由는 Fig. 5 (a), (b)에서 알 수 있는 바와 같이 같은 塑性域內에서도 r/L 에 따라서 다소 차이가 生기기 때문이다.

◎ 塑性指數의 影響

Fig. 6 (a), (b)에서 $n=3$ 인 경우 最大 有效應力의 位置는 約 80° 近處가 되지만 $n=13$ 인 경우는 均열의

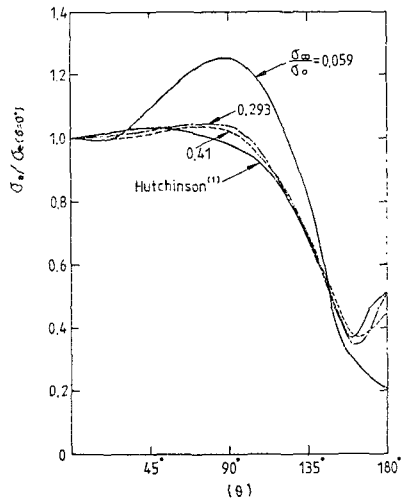
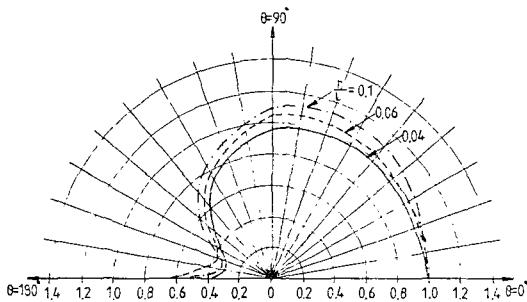
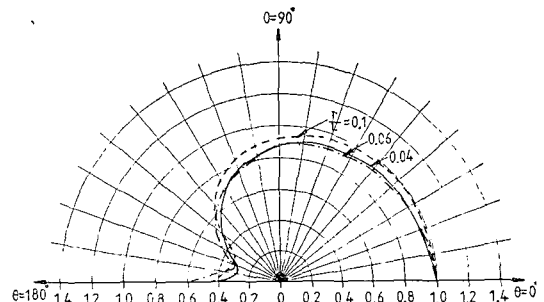


Fig. 4 θ -variation of effective stress near crack tip for various loading ($k=0, n=3$)



(a) $k=0, n=3$



(b) $k=0, n=13$

Fig. 5 θ -variation of effective stress near crack tip

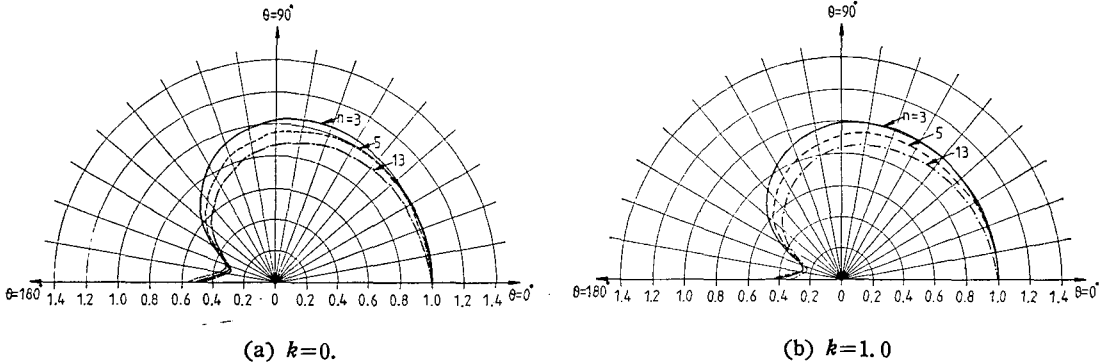


Fig. 6 θ -variation of effective stress near crack tip for various plastic index

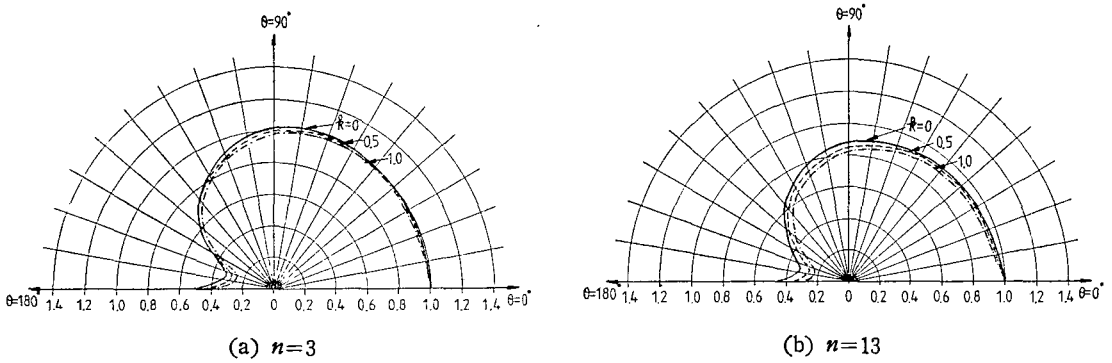


Fig. 7 θ -variation of effective stress near crack tip for various load combination factor

進行方向이 $\theta=0^\circ$ 에서 最大가 된다. 이와 같은 경향은 $k=0$ 인 경우 Hutchinson^{1,2)}의 結果와 一致한다.

◎ 荷重組合計數의 영향

Fig. 7 (a), (b)에서 n 에 關係없이 k 가 增加하면 有效應力의 크기는 減少하고 있다. 特히, k 의 增加에 따라 균열先端에서 有效應力의 分布形態가 크게 달라지지 않음은 注目할 만하다. $k=1.0$ 인 경우 $k=0$ 에 비해 最大 8~9% 程度의 無次元 有效應力이 減少되지만 이와같은 變化는 Fig. 5(a), (b)에서의 r/L 에 따른 變化幅 보다도 작은 값이다.

◎ 應力振幅

균열의 進行方向($\theta=0^\circ$)으로 有效應力의 크기는 Fig. 8(a), (b)와 같다. Fig. 8 (a)는 $n=3$ 인 경우로서 荷重의 크기에 따라 有效應力이 거의 比例적으로 增加하지만 $n=13$ 인 경우에는 變形率硬化가 적기 때문에 塑性域內에서 應力의 半徑方向 구배가 작아지고 均一한 應力分布가 되려는 경향을 보이고 있다. $r/L < 0.02$ 에서 點線으로 連結한 것은 特異點에서의 값을 外挿시킨 것이다. k 에 대한 영향은 $k=1$ 일 때 應力의 크기는 2% 以下の 작은 값으로 減少되지만 $n=13$ 일 때는 反

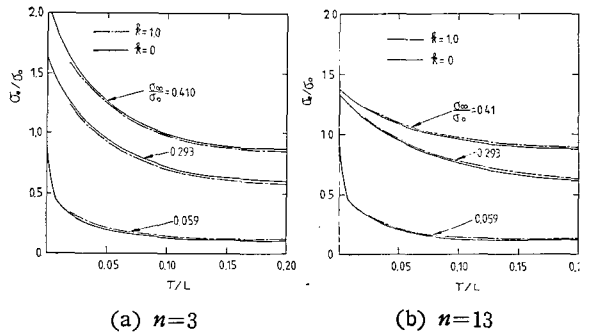


Fig. 8 Variation of effective stress amplitude ahead of crack

對로 약간 增加한다.

3.3. 균열先端部의 J-積分値

式 (23)으로 數值計算한 J -積分値는 Shih, Hutchinson⁷⁾이 提示한 補間公式의 計算結果와 比較하였다. Fig. 9는 $k=0$ 인 경우로서 荷重이 增加할수록 誤差는 多少커지고 있다. 이와같은 誤差는 Shih, Hutchinson이 指摘한 대로 $\sigma_w/\sigma_0 \geq 0.5$ 의 範圍에서 有效균열길이

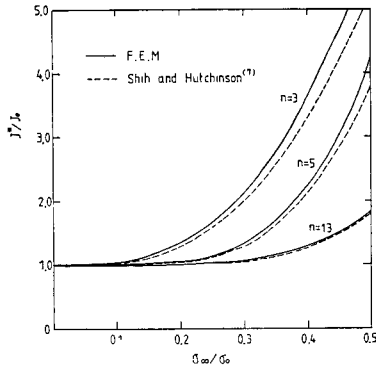


Fig. 9 Elastic-plastic integral value ($k=0$.)

($Leff=L+r_0$)를 修正 하므로써 줄일수 있다고 하였다. 그러나 本 論文에서는 $\sigma_\infty/\sigma_0 \leq 0.41$ 程度이기 때문에 最大荷重에서 誤差가 多少 커진 것으로 생각된다. J_e 는 $k=0$ 인 경우에 線形破壞力學의 立場에서 計算되는 經路積分值⁷⁾이고 J^* 는 Fig. 10 과 같이 세개의 積分經路에서 定해지는 J 값의 平均値이다. 各 經路에 따른 J_I ,

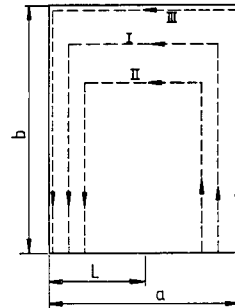


Fig. 10 Integral path

J_{II} , J_{III} 는 經路獨立性의 原則에 따라서 같아야 하지만 數值誤差로 因하여 Table 2 와 같이 平均値의 約 5% 範圍內에서 安定된 값을 얻을 수 있었다.

Fig. 11 (a), (b)는 $n=3$ 과 $n=13$ 인 경우에 k 에 따른 J 값의 變化를 보이고 있다. k 가 클수록 均열先端部의 塑性應力은 J 값이 減少됨으로 因하여 多少 완화된다. 특히 $n=13$ 인 경우 荷重의 크기에 따라서 J -값

Table 2 J -integral value

(unit; 1786.2kg/mm)

n	$\frac{\sigma_\infty}{\sigma_0}$	k=0				k=0.5				k=1.0			
		J_I	J_{II}	J_{III}	J^*	J_I	J_{II}	J_{III}	J^*	J_I	J_{II}	J_{III}	J^*
3	0.059	0.00682	0.00626	0.00718	0.00675	0.00636	0.00586	0.00669	0.0063	0.00591	0.00546	0.00621	0.00586
	0.250	0.1708	0.1619	0.1774	0.1700	0.1536	0.1459	0.1594	0.1530	0.1388	0.1321	0.1439	0.1383
	0.293	0.3579	0.3464	0.3682	0.3575	0.3126	0.3028	0.3212	0.3122	0.2761	0.2676	0.2836	0.2758
	0.352	0.6912	0.6806	0.7046	0.6921	0.5877	0.5789	0.5985	0.5884	0.5084	0.5006	0.5177	0.5089
	0.410	1.2679	1.2670	1.2818	1.2722	1.0527	1.0520	1.0631	1.0559	0.8934	0.8921	0.9021	0.8959
5	0.059	0.00682	0.00626	0.00718	0.00675	0.00636	0.00586	0.00669	0.0063	0.00591	0.00546	0.00621	0.00586
	0.250	0.1263	0.1180	0.1320	0.1254	0.1160	0.1086	0.1211	0.1152	0.1065	0.1000	0.1112	0.1059
	0.293	0.2308	0.2197	0.2392	0.2299	0.2073	0.1973	0.2149	0.2065	0.1874	0.1786	0.1942	0.1867
	0.352	0.4176	0.4071	0.4279	0.4175	0.3618	0.3518	0.3712	0.3616	0.3189	0.3097	0.3274	0.3187
	0.410	0.7962	0.7999	0.8027	0.7996	0.6541	0.6537	0.6631	0.6570	0.5543	0.5518	0.5616	0.5559
13	0.059	0.00682	0.00626	0.00718	0.00675	0.00636	0.00586	0.00669	0.0063	0.00591	0.00546	0.00621	0.00586
	0.250	0.1113	0.1025	0.1169	0.1102	0.1038	0.0959	0.1090	0.1029	0.0963	0.0893	0.1011	0.0956
	0.293	0.1807	0.1675	0.1894	0.1792	0.1680	0.1561	0.1760	0.1667	0.1556	0.1452	0.1629	0.1546
	0.352	0.2898	0.2624	0.2918	0.2813	0.2578	0.2422	0.2689	0.2563	0.2377	0.2238	0.2478	0.2364
	0.410	0.4406	0.4232	0.4548	0.4395	0.3935	0.3765	0.4071	0.3924	0.3567	0.3412	0.3693	0.3557

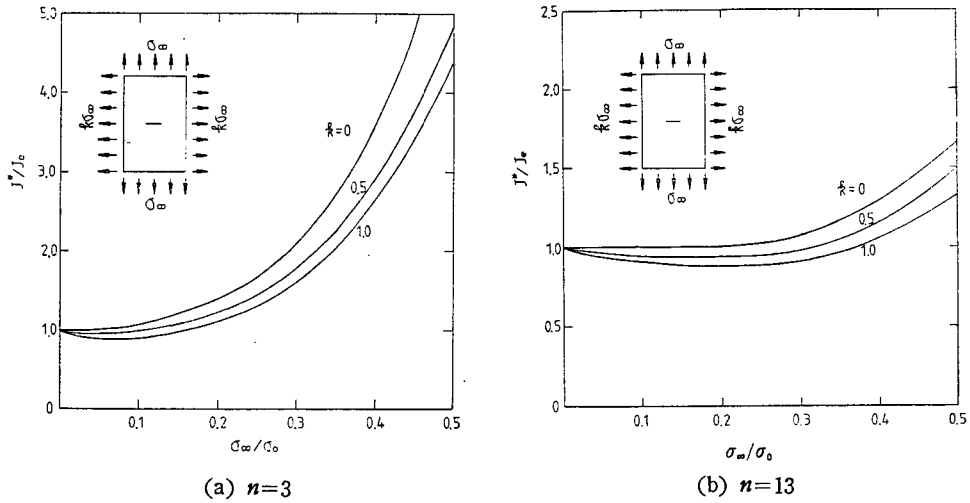


Fig. 11 Variations of J -integral value for various load combination factor

의 변화는 극히 완만하다. $\sigma_\infty/\sigma_0 \leq 0.2$ 에서는 탄성 J 값이 지배적이 되어 k 에 따라서 크게減少되다가荷重在增加됨에 따라 塑性 J 값이 커짐으로써 J^* 는 서서히增加한다. 이와같은 現象은 n 가 작은 경우에變形率硬化가 심하기 때문에 더욱 현저하게 나타난다.

4. 結 論

中央部에 길이가 $2L$ 인 균열을 갖는 矩形平板을 兩軸方向으로 引張시킬 때 균열先端部の 應力分布 狀態와 塑性應力の 크기를 彈塑性 有限要素法 및 J -積分法에 依하여 求하였고 塑性指數($n=3, 5, 13$)와 荷重組合係數($0 \leq k \leq 1$)에 따른 變化를 計算하여 檢討한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 균열先端의 塑性域에서 有效應力の 圓周方向 分布는 荷重의 크기에 關係없이 一定하나 先端에서의 거리와 荷重組合係數에 따라서 多少 變化가 생긴다. 그러나 그 變化幅은 거의 無視할 수 있을 程度이다.

(2) 最大 有效應力の 位置는 k 에 關係없이 n 에 따라 달라지며 n 가 크면(變形率硬化가 작은 경우) 均열의 進行方向($\theta=0^\circ$)과 一致하고 n 가 작을수록 進行方向과 수직으로 移動한다.

(3) 均열先端部の J -積分値는 k 가 클수록 減少한다. 즉 單軸荷重下의 J -積分値는 같은 程度의 荷重을 다른 軸에 加하므로써 減少시킬 수 있다. 그 減少되는 量은 n 에 關係없이 荷重의 크기에 따라서 달라진다.

後 記

이 論文은 1982年度 文敎部 學術研究助成費에 의하여 研究되어진 것이다. 文敎部의 支援에 深心한 謝意를 表한다.

參 考 文 獻

1. J.W. Hutchinson, "Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 16, pp.13-31, 1968.
2. J.W. Hutchinson, "Plastic Stress and Strain Fields at a Crack Tip", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 16, pp.337-347, 1968.
3. J.R. Rice and G.F. Rosengren, "Plane Strain Deformation near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 16, pp.1-11, 1968.
4. J.R. Rice, "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", J. Appl. Mech., Vol. 25, pp.379-386, 1968.
5. A.S. Kobayashi, S.T. Chiu and R.Beeuwkes, "A Numerical and Experimental Investigation on the Use of J-integral", Engng. Fracture Mech., Vol. 5, pp.293-305, 1973.
6. D. M. Tracey, "Finite Element Solutions for

- Crack Tip Behavior in Small-Scale Yielding”, J. Engng. Mater. Techn., Vol. 98, pp. 146-151, 1976.
7. C.F. Shih and J.W. Hutchinson, “Fully plastic Solutions and Large Scale Yielding Estimates for Plane Stress Crack Problems”, J. Engng. Mater. Techn., Vol. 98, pp. 289-295, 1976.
 8. G. Yagawa, T. Aizawa and Y. Ando, “Linear and Nonlinear Elastic Analysis of Cracked Plate; Application of a Penalty Function and Superposition Method”, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 17, pp. 719-733, 1981.
 9. C.F. Shih, “Small Scale Yielding Analysis of Mixed-Mode Plane Strain Crack Problems”, AS TM, STP 560, pp. 187-210, 1974.
 10. J.D. Lee And H. Liebowitz, “Considerations of Crack Growth and Plasticity in Finite Element Analysis”, Comp. and Struct., Vol. 8, pp. 403-410, 1978.
 11. I.S. Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, pp. 70, Mc Graw-Hill, New York, 1956.