

<論 文>

變位 凍結法에 의한 應力擴大係數의 實驗的 決定法

崔善浩* · 權在度* · 金鍾周** · 徐仁輔**

(1983年 7月 27日 接受)

Experimental Determination of Stress Intensity Factors by Displacement Freezing Method

Sun Ho Choi, Jae Do Kwon, Joung Joo Kim and In Bo Suh

Abstract

For the determination of stress intensity factors, three methods have been used conventionally; the photoelastic method, the compliance method and the electrical resistance method. These methods, however, have common short coming upon experimental performance; the difficulty of cutting out sharp crack tips and arbitray crack forms similar to the practical one on the specimen. To eliminate this flaw, one of the author previously presented new methods, that is, for the determination of K_{II} mode, the membrane analogy was applied and the slab analogy was used for the determination of K_I and K_{II} . These two methods based on independent theories and performed on different experimental devices.

In this paper, above two different methods are related each other by the membrane analogy by introducing compensating factors k_1 and k_2 which were induced by theoretical and experimental analysis. As a result, the experimental device prepared for the memorane analysis became available too for the determination of K_I and K_{II} . The validity of this method was proved through the performance of a series of experiments of which theoretical solution are known.

1. 緒 論

實驗的으로 應力擴大係數를 決定하는 方法으로서는 (1) 光彈性法¹⁾²⁾³⁾⁴⁾ (2) 컴프라이언스(compliance)法⁵⁾ (3) 電氣 저항법⁶⁾ 등이 그 代表的인 方法으로 종래 널리 사용되어 왔다. 그러나 이 方法들의 共通的 短點인 實物과 같은 銳利한 크랙(crack)尖端的 加工 및 任意型 크랙 加工의 難點을 解決하기 위하여 薄膜相似理論⁷⁾에 의한 K_{II} 의 決定法⁸⁾⁹⁾ 및 슬랩 相似(slab analogy)

法에 의한 K_I , K_{II} 의 決定法¹⁰⁾¹¹⁾이 本論文의 先行論文으로서 發表되어 자기 그 實効性을 證明한 바 있었다. 위의 두 實驗法은 理論上 各各 膜의 張力과 垂直 壓力의 均衡 및 板의 彈性 굽힘에 근거를 두고 있어 實驗方法 및 荷重裝置가 전혀 別個의 것으로서 別個의 理論에 의한 別個의 實驗으로써 綜合的 應力擴大係數 K_I , K_{II} , 및 K_{III} 를 얻는다. 이에 반하여 光彈性 實驗法은 일관된 理論의 바탕에서 同一 實驗裝置를 使用하여 K_I , K_{II} 및 K_{III} 를 測定할 수 있어 實驗過程의 理解가 용이하고 實驗裝置의 單一性을 지니고 있는것이 그 長點이다. 이를 감안하여 本論文에서는

1) 슬랩 相似 理論의 變位를 薄膜相似(membrane analogy) 理論의 方法으로 얻을 수 있는 變位로 代替시

* 정희원, 영남대학교 공과대학 기계설계학과

** 정희원, 영남공업전문대학 기계과

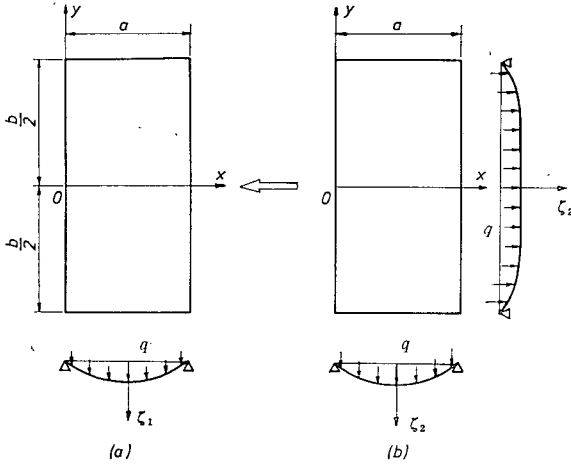


Fig. 1 Displacement of slab analogy and membrane analogy

될 수 있는 方法을 理論上으로 검토하고

2) 薄膜相似法에서 개발된 變位凍結法을 슬랩 相似에 適用할 수 있게하여 홀로그래피(holography) 등의 光學的 測定을 용이하게 하고

3) 單一 實驗裝置에 의한 K_I , K_{II} 및 K_{III} 의 綜合的 應力擴大係數의 決定 可能性을 검토하였다.

2. 基礎 理論

2.1. 拘束條件에 따른 슬랩 相似의 變位

슬랩 相似理論¹²⁾¹³⁾은 二次元 彈性 解析에서 어떤 拘束條件下의 均一壓力을 받는 板의 曲率分布와 에어리(Airy) 應力函數 φ 로 표현되는 微分 方程式 사이에 相似가 成立하는데 基礎를 두고있다.(Fig. 1 참조)

Fig. 1과 같이 單純支持된 슬랩이 均一壓力을 받을 때 슬랩 중립면의 垂直變位 ζ 는 다음의 方程式을 만족하여야 한다.

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1)$$

여기서 D 는 剛性係數($D = Eh^3/12(1-\mu^2)$)이고 q 는 슬랩의 單位 面積當 作用하는 荷重이다. Fig. 1(a)와 같이 두변이 단순지지원 슬랩이 等 分布荷重 q 를 받을 때 變位 ζ_1 은 다음과 같다¹⁴⁾.

$$\zeta_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_n \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (2)$$

$(n=1, 3, 5, \dots)$

이는 또한 q 가 적을 경우 $\zeta = (k_x/2)x^2$ 의 슬랩 相似上의 理論變位와 充分한 精密度를 가지고 一致한다. 여기서 $k_x = \partial^2 \zeta / \partial x^2$ 이다. 또 Fig. 1(b)와 같이 4변이

單純支持된 슬랩의 轉變位 ζ_2 는 다음과 같은 級數로 表示하면 구할수 있다¹⁵⁾.

$$\zeta_2 = \sum_n Y_n \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3)$$

$(n=1, 3, 5, \dots)$

여기서 Y_n 는 y 의 函數로 表示되는 係數이다. Fig. 1(b)에서 $x=0$ 및 $x=a$ 에서만 單純支持 되었다고 가정하면 式(3)은 두 境界에서의 境界條件 $\zeta=0$ 및 $\partial^2 \zeta / \partial x^2 = 0$ 를 만족하므로 境界 $y = \pm \frac{b}{2}$ 에서의 境界條件과 평형 방정식(1)을 만족하도록 Y_n 을 決定하면

$$Y_n = -\frac{qa^4}{D} \left(A_n \cos h \frac{n\pi y}{a} + B_n \frac{n\pi y}{a} \sin h \frac{n\pi y}{a} + C_n \sin h \frac{n\pi y}{a} + D_n \frac{n\pi y}{a} \cos h \frac{n\pi y}{a} \right) \quad (4)$$

이다. 슬랩의 變位 ζ 는 x 축에 대해서 대칭이므로 y 의 偶函數가 되어 $C_n = D_n = 0$ 이다. 따라서

$$\zeta_2 = -\frac{qa^4}{D} \sum_n \left(\frac{4}{\pi^5 n^5} + A_n \cos h \frac{n\pi y}{a} + B_n \frac{n\pi y}{a} \times \sin h \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (5)$$

$(n=1, 3, 5, \dots)$

로 나타낼 수 있다. 式(5)는 평형 方程式(1) 및 $x=0$, $x=a$ 에서의 境界條件을 만족하며 積分常數 A_n 및 B_n 의 값은 $y = \pm \frac{b}{2}$ 에서의 $\zeta_2=0$ 및 $\partial^2 \zeta_2 / \partial y^2 = 0$ 의 境界條件에서 決定할 수 있다. 즉,

$$A_n = -\frac{2(\alpha_n \tanh \alpha_n + 2)}{\pi^5 n^5 \cosh \alpha_n}, \quad B_n = -\frac{2}{\pi^5 n^5 \cosh \alpha_n} \quad (6)$$

이고 여기서 $\alpha_n = \frac{n\pi b}{2a}$ 이다. 式(6)의 積分常數 A_n 및 B_n 을 式(5)에 代入하여 정리 하면

$$\zeta_2 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_n \frac{1}{n^5} \left(1 - \frac{\alpha_n \tanh \alpha_n + 2}{2 \cos h \alpha_n} \cos h \frac{2\alpha_n y}{b} + \frac{\alpha_n}{2 \cosh \alpha_n} \frac{2y}{b} \sin h \frac{2\alpha_n y}{b} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (7)$$

$(n=1, 3, 5, \dots)$

이다. 여기서 두 變位の 比 $k_1 = \frac{\zeta_1(x)}{\zeta_2(x, y)}$ 를 구하여 實驗的으로 $\zeta_2(x, y)$ 를 얻으면 $\zeta_1(x)$ 를 계산할 수 있다. 여기서

$$k_1 = \sum_n \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{a} / \sum_n \frac{1}{n^5} \left(1 - \frac{\alpha_n \tanh \alpha_n + 2}{2 \cos h \alpha_n} \cos h \frac{2\alpha_n y}{b} + \frac{\alpha_n}{2 \cos h \alpha_n} \frac{2y}{b} \sin h \frac{2\alpha_n y}{b} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (8)$$

$(n=1, 3, 5, \dots)$

이다.

2.2. 薄膜相似의 裝置에 의한 無限길이 슬랩의 變位 決定

薄膜相似의 裝置에 의하여 變位凍結을 하기 위하여서는 우선 境界에 따라 밀폐 부착시킨 高分子 薄板을 글라스 轉移域까지 加熱한 후 微壓을 주어 變形시켜야 한다⁹⁾. 이 裝置를 그대로 使用하여 슬랩 相似에 알맞는 變位를 얻기 위해서는 理論上 板의 길이가 無限大의 境界를 만들어야 하며 이는 實驗上 불가능한 일이다. 따라서 두번 固定의 장방형 板를 굽히는 대신 有限한 4번고정의 판으로 薄膜相似 理論에 의한 解析解와 같이 變位를 凍結한 후 理論上의 變位비의 式(8)을 곱하여 슬랩 相似의 變位로 변환시키는 과정을 밟으면 된다. 이때의 凍結薄板의 變位는 엄밀히 말해서 4번 固定의 경우가 될 것이지만 薄板의 剛性係數 D 가 글라스 轉移溫度(glass transition point)에서는 매우적고 또한 境界를 따라 얇은 슬릿(shallow slit)를 주면 充分한 精密度로 式(2)의 境界條件과 一致 시킬수 있다.

2.3. 슬랩 相似 및 薄膜相似에 의한 應力擴大係數 K 의 決定法^{9,11)}

Fig. 2와 같은 크랙 尖端의 特異應力場에서 垂直應力 σ_0 를 $\theta=0^\circ$ 에 對해서 슬랩 相似의 理論을 適用시키면¹¹⁾

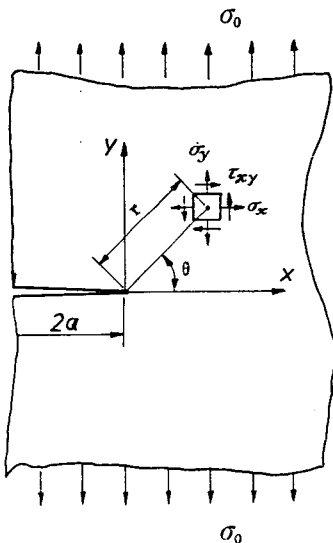


Fig. 2 Singular stress notation of crack tip

$$R_x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_I}{\sigma_0} x^{-1/2} \tag{9}$$

가 된다. 이것을 2회 積分하여 境界條件을 代入하여 정리하면

$$\frac{K_I}{\sigma_0} = \frac{3}{4} \sqrt{2\pi} \frac{R_x \zeta}{x^{3/2}} \tag{10}$$

을 얻을 수 있다.

여기서 R_x 는 슬랩 變位 曲線의 曲率半徑이다. 式(9)에서 크랙 尖端에서 x 만큼 떨어진 點에서 垂直變位 ζ 와 曲率半徑 R_x 만 測定하면 $\frac{K_I}{\sigma_0}$ 을 구할 수 있다.

또한 薄膜相似 理論에 의하면 $\tau = -\frac{M_x}{2V\lambda^3} \frac{\partial \zeta}{\partial v}$ 이고 最大剪斷應力 $\tau_{max} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}$ 이다^{7,9)}.

위의 두式에서 $\frac{K_{II}}{M_x}$ 는 다음과 같다.

$$\frac{K_{II}}{M_x} = -\sqrt{2\pi r} \frac{1}{2V\lambda^3} \frac{\partial \zeta}{\partial v} \tag{11}$$

式(11)에서 薄膜의 기울기(slope) $\frac{\partial \zeta}{\partial v}$ 와 薄膜의 체적 V 만 測定하면 $\frac{K_{II}}{M_x}$ 를 구할수 있다. 式(10)과 式(11)에서 應力擴大係數를 單一 薄膜相似 實驗裝置에서 얻는것이 本 論文의 主題이다.

2.4. 曲率半徑 R_x 의 決定法

式(10)의 曲率半徑 R_x 는 크랙에서 充分히 떨어진 遠方에서의 曲率半徑에 해당하므로 크랙의 영향을 받지 않는 곳에서의 變位曲線을 眞圓으로 가정하면 다음과 같다. (Fig. 3 참조)

$$R_x = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2} \tag{12}$$

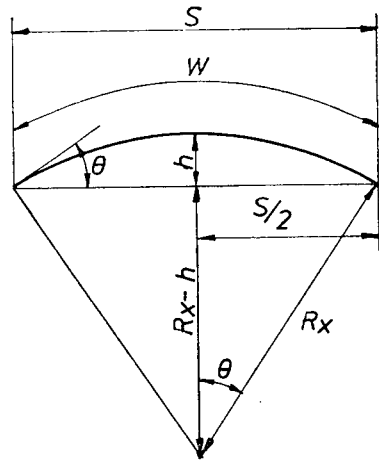


Fig. 3 Determination of radius of curvature

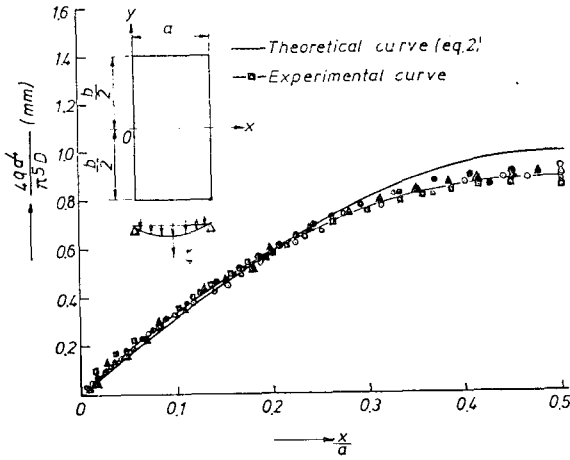


Fig. 4 The difference between theoretical curve and experimental curve without crack

式 (12)의 曲率半徑 R_x 가 實驗오차에 미치는 영향은 매우 크기 때문에 이에 對한 測定은 精밀을 요한다.

Fig. 4는 x 의 變化에 따라 變位 ζ 를 나타낸 그래프이다. 이 그래프의 實線은 式 (2)의 슬랩 相似의 理論 曲線을 타나낸 것이고 파선은 4변이 단순지지된 경우의 高分子 薄板을 凍結한 變位에 式 (8)의 보정계수 $k_1 = \zeta_1/\zeta_2$ 을 곱한 값을 나타낸 것이다. 한편 最小자승법으로 이 曲線의 式을 구하면 다음과 같다.

$$\zeta_{exp} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} (0.06499x - 1.18016 \times 10^{-3}x^2) \quad (13)$$

式 (13)에서 材料의 剛性係數 $D=1.2014\text{kgmm}$ 이다. 이 두 曲線은 理論上 完全히 一致하는 것이 原則이나 Fig. 4에서 보는 바와 같이 最大높이에서 13% 정도의 오차를 나타내고 있다. 이 오차의 原因은

- 1) 變位凍結과정에서 냉각速度的 영향
- 2) 凍結시 분위기 溫度 分布의 不均等
- 3) 材料두께의 불균일 등으로 추측할 수 있다. 이를 보정하기 위하여 實驗 수정係數 k_2 를 생각하면 다음의 式으로 나타낼 수 있다.

$$k_2 = \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_{exp}} \right)_{x=a} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi}{2}}{4a(0.129986 - 1.18016 \times 10^{-3}a)} \quad (14)$$

$(n=1, 3, 5, \dots)$

따라서 R_x 決定시 必要한 h 는 다음 式으로 決定된다.

$$h = k_1 k_2 h_{exp} \quad (15)$$

여기서 h_{exp} 는 凍結實驗에서 얻은 薄板 變位曲線의 最大높이이다.

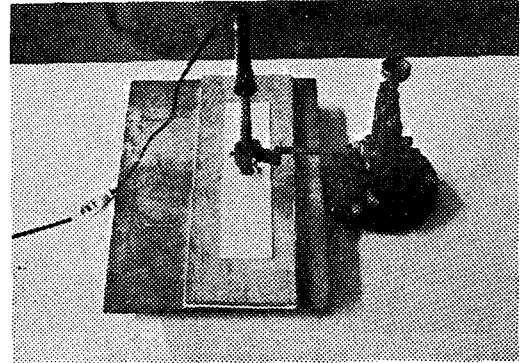


Fig. 5 Heating device

3. 實 驗

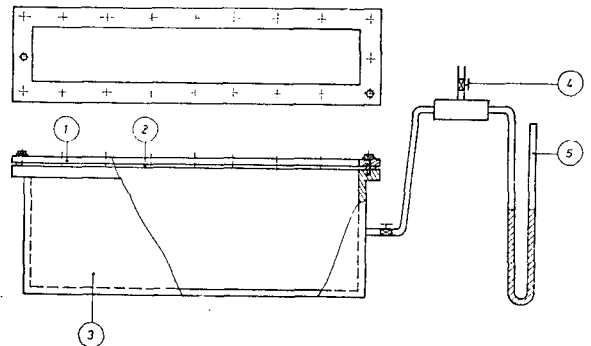
3.1. 試驗片의 製作

試驗片의 材料는 材質 및 두께가 均一하고 彈性이 큰 硬質 비닐판을 使用하였고 그 두께는 0.5mm이다. 새 도우 모아레 (shadow moire)法으로 變位 ζ 를 測定하기 위하여 表面에 白色 水性페인트를 均일하게 도포하였고 또 단순지지 境界條件을 만족하게 하기 위하여 試驗片의 境界에 0.3mm 內외의 홈을 팠다.

剛體 크랙은 두께 0.15mm의 鋼板을 使用하여 解析 對象과 同一한 모양으로 만들고 이를 加熱하여 비닐板의 소정의 위치에 壓入 슬릿 (slit)를 만든후 강력접착제로 부착하였다. Fig. 5은 加熱裝置를 나타낸 것이다.

3.2. 凍結裝置 및 方法

Fig. 6은 試驗片의 等 分布荷重을 加하기 위하여 제작한 荷重裝置이다.



- ① Holding plate of specimen
- ② Specimen
- ③ Body
- ④ Pressure control valve
- ⑤ Manometer

Fig. 6 Schematic diagram of loading device

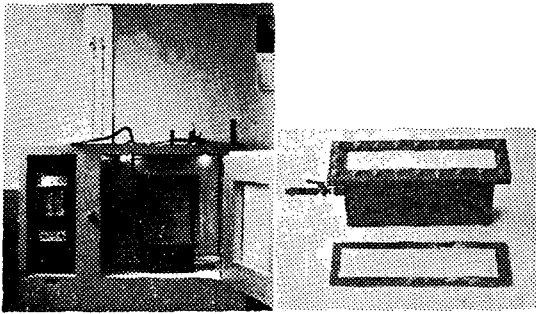


Fig. 7 Furnace of displacement freezing

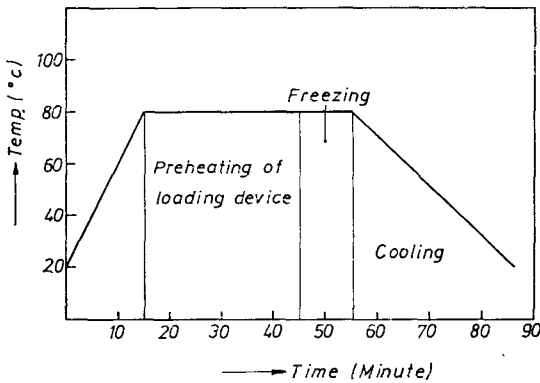


Fig. 8 Displacement freezing cycle

完全한 氣密을 얻기 위하여 試驗片과 접촉하는 면은 연삭 加工을 하였고 시험편의 고정을 위하여 40mm 간격으로 볼트를 체결하였다. 볼트 체결시 試驗片이 均一하게 조이도록 하기 위하여 토오크 렌치(torque wrench)를 使用하였고 壓力 조정 팽브를 통하여 內部壓力을 미소하게 조정할 수 있도록 製作하였다.

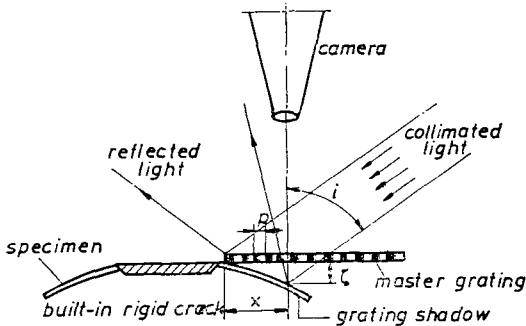


Fig. 9 Schematic arrangement of shadow moire's optical system

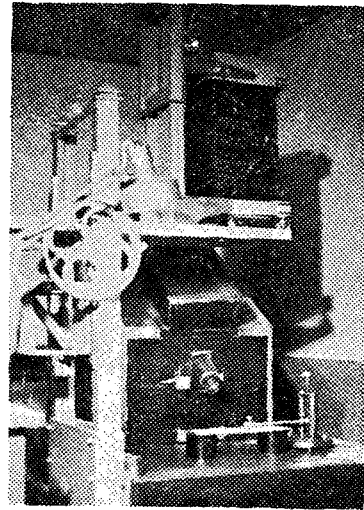


Fig. 10 Optical system of shadow moire

變位凍結시 使用한 加熱裝置는 三次元 光彈性 實驗用 凍結爐(Fig. 7, Temp. range 0~200°C)이고 Fig. 8 과 같은 凍結 사이클에 따라서 凍結하였다. 또 凍結시 加한 壓力은 $q=0.002\text{kg/cm}^2$ 이다.

3.3. 새도우 모아레 光學系

Fig. 9 와 같은 새도우 모아레 光學系를 利用하여 垂直變位 ζ 를 測定하였다.

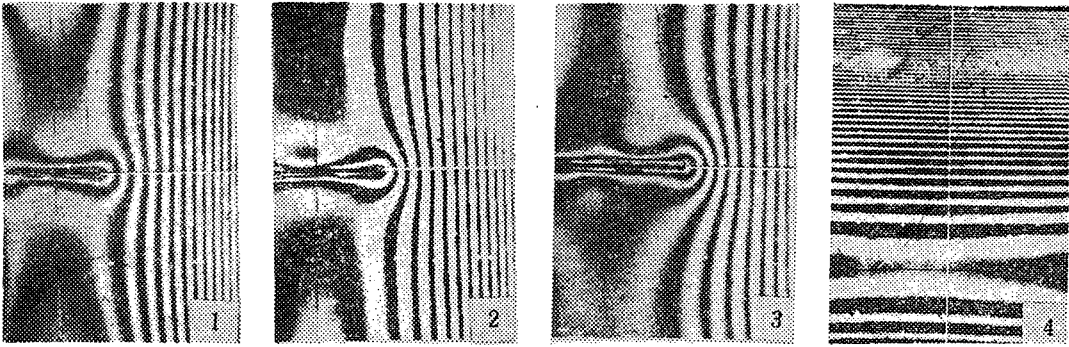
Fig. 9 에서 마스타 그레이팅(master grating)의 피치를 p , 平行 入射光線과 카메라 光軸사이의 角을 i , 무늬수(fringe number)를 N 라하면 變位 ζ 는

$$\zeta = -\frac{pN}{\tan i} \tag{15}$$

이다. Fig. 11 은 촬영된 모아레 무늬 사진이다.

3.4. 測定 方法

變位 ζ 의 原點을 크랙 尖端으로 하고 각 무늬까지의 거리 x 를 촬영된 모아레 무늬 사진에서 디지털 마이크로미터가 부착된 옵티칼 콤포레이터(optical comparator)를 利用하여 $\frac{5}{1000}$ mm 까지 精密測定을 하였다. (Fig. 12 참조) 촬영에 使用한 필름은 ASA 20 정도 의 리스필름이다.



1. $\frac{2a}{W} = 0.166$, 2. $\frac{2a}{W} = 0.249$, 3. $\frac{2a}{W} = 0.299$, 4. Contour line for the determination of h_{exp}

Fig. 11 Moire fringe patterns

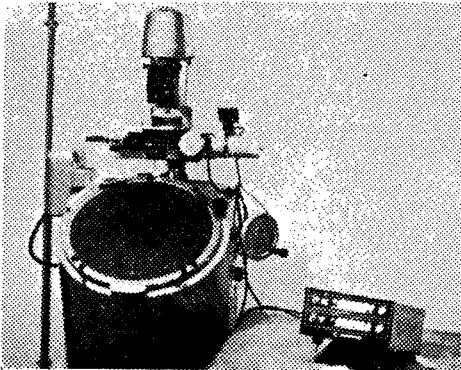


Fig. 12 Optical comparator.

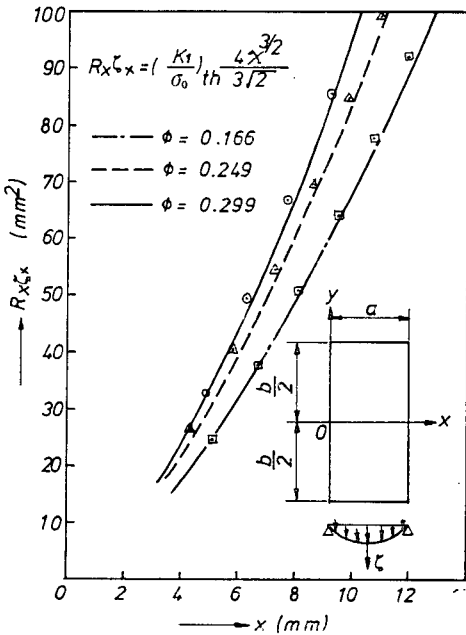


Fig. 13 Deflection curves of slab

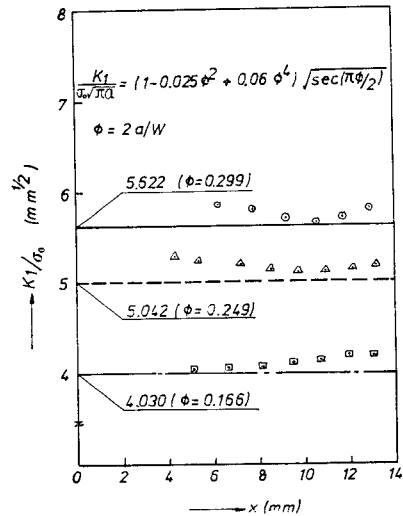


Fig. 14 Stress intensity factors for variable crack length

4. 實驗結果 및 고찰

Fig. 13은 크랙 尖端에서의 거리 x 에 對해서式 (10)에 구한 $R_x \zeta_x$ 의 理論 曲線과 實驗에서 구한 實驗값을 나타낸 그래프로서 잘 一致하는 것을 볼 수 있으며 Fig. 14는 크랙 尖端에서의 거리 x 에 따라 應力擴大係數 $\frac{K_I}{\sigma_0}$ 을 나타낸 그래프이다.

이 그래프를 고찰해보면 最大 오차가 7% 정도이다. 이 오차의 發生원인 중 가장 큰 것으로 생각되는 것은 마스타 그레이팅 設置의 精確성이다. 本 凍結法은 쉽게 이동 취급할 수 있는 凍結 試驗片을 얻을 수 있어 垂直 變位の 測定 精度가 높은 홀로그래피(holography) 測定에 의해서 應力擴大係數 K_I , K_{II} , 및 K_{III} 를 決定할

수 있는 가능성을 엿볼 수 있다.

5. 結 論

이상의 結果에서 다음과 같은 結論을 얻을 수 있다.

- 1) 理論 및 實驗 수정계수 k_1 및 k_2 를 얻어서 薄膜 相似방법에서 얻은 變位를 슬랩 相似의 變位로 변환시킬 수 있었고
- 2) 이에따라 凍結된 變位曲線을 얻을 수 있어 모아레 測定이 슬랩 相似法에 비하여 매우 용이하게 되었고 홀로그래피 測定도 가능하게 되었다.
- 3) 그리고 單一 薄膜相似의 實驗裝置에서 應力擴大係數 K_I , K_{II} , 및 K_{III} 를 綜合的으로 決定할 수 있음을 확인 하였다.

參 考 文 獻

- (1) J.M. Etheridge and J.W. Dally., "A Critical Review of Methods for Determining Stress Intensity Factors from Isochromatic Fringe," Experimental Mechanics, SESA, pp. 248~254(1977).
- (2) E.E. Gdoutos, P.S. Theocaris, "A Photoelastic Determination of Mixed Mode Stress Intensity Factors", Experimental Mechanics, SESA, pp. 87~96 (1978).
- (3) 渡邊勝彦, 北川英夫., "三次元き裂問題の光弾性實驗による解析", 日本機械學會論文集, 第44卷, 第388號 (1978)
- (4) 崔善浩, 黃在錫, 蔡泳哲., "Teflon Molding 法에 의한 S.I.F.의 光弾性 實驗 解析", 大韓機械學會論文集 第7卷, 第1號, pp. 1~10 (1983).
- (5) J.E. Srawley, M.H. Jones and B. Gross., "Experimental Determination of the Dependence of Crack Extension Force on Crack Length for a Single Edge-Notch Tension Specimen", NASA TN D-2396 (1964).
- (6) Rice, J.R., "A Path Independent Integral and Approximate Analysis of strain Concentration by Notchs and Crack", J.Appl. Mech. pp. 379~386 (1968).
- (7) M. Hetenyi., "Handbook of Experimental Stress Analysis", pp. 751~789 John Willey and Sons (1950).
- (8) 崔善浩., "對稱形 中心 노치를 가진 軸의 비틀림 剪斷應力 分布에 관한 研究", (1975).
- (9) 崔善浩, Proceeding of Seoul Sympo. N.D.T., pp. 251~264 (1978).
- (10) 崔善浩, 北川英夫., "모아레와 슬랩아날로지의 組合による 應力擴大係數의 實驗的解析法". 日本機械學會關西支部論文集, 804-7 pp. 160~162 (1980).
- (11) 崔善浩, 權在度, 徐仁輔, 金鍾周, 蔡泳哲., "모아레法과 슬랩相似의 複合에 의한 應力擴大係數의 實驗的 解析法", 大韓機械學會論文集, 第6卷 4號, pp. 315~322 (1982).
- (12) R. D. Mindlin, "The Analogy between Multiply-Connected Slices and Slabs", Quarterly of Applied Mechanics, Vol. 4, pp. 279~290 (1947).
- (13) H. Cranz., "Die experimentelle Bestimmung der Airyschen Spannungsfunktion mit Hilfe des Plattengleichnisses", Ingenieur-Archiv, Vol. 10, pp. 159~166 (1939).
- (14) S.P. Timoschenko., Strength of Materials, 3rd ed., part II, p. 50 (1956).
- (15) S.P. Timoschenko, Theory of Plates and Shell, 2nd ed., pp. 113~124 (1959).