특이함수에 의한 보의 처짐 및 부정정 보 문제의 풀이

沈 載 憲
〈韓國重工業(株) 熱交換器 設計室〉

1. 머 릿 말

보의 처짐(deflection of beam) 및 부정정(不靜定)보(statically indeterminate beam)의 문제는 수문(水門)이나 압력용기(壓力容器)등을 비롯한 각종 구조물(構造物)의 강도 계산(强度計算)에서 설계자가 자주 부딪치는 문제이다.

일반적으로 분포하중(分布荷重)이나 집중하중(集中荷重)또는 집중 모우멘트가 작용하는 보, 특히 부정정 보의 경우 해석(解析)하기 쉬운 방법을 찾아 「모우멘트—면적법」, 「중첩법」, 「3-모우멘트의 방정식」등을 사용하여 반력(反力)이나 반력 모우멘트, 처짐량 등을 계산하고 있다.

그러나 이들 방식들은 일률적으로 어느 경우에나 적용하기에 적합한 것은 아니고 복잡한 각종 정리나 공식들을 사용하여야 하며 공액(共軛)보 (conjugated beam)의 반력을 구한다든가, 선도(線圖)의 면적을 구하기 위하여 힘든 계산을 행하여야 하는등 쉽지 않아, 부정정 보를 풀어야 할 경우가 발생할 때마다 좀 더 쉬운 접근방법이 없을까 하는 애로를 느껴왔다.

그러던 차 특이함수(特異函數)를 도입하여 문제의 해결을 시도하여 본 바, 복잡한 공식들을 외울 필요 없이 규칙적이고 일률적인 방법으로 쉽게 문제의 해결이 가능하기에 여기 간단히 풀이 방법을 소개하고자 한다.

2. 평형 미분 방정식(平衡微分方程式)

세장부재(細長部材)에 작용하는 내력(內力)과 내부 모우멘트를 계산하기 위하여, 보의 미소요소(微小要素)를 자유물체(自由物體)로 생각한다.

평형조건(平衡條件)과 극한(極限)의 개념(概念)을 생각하면 하중(荷重), 전단력(剪斷力) 및 휨모우멘트 등에 관한 미분 방정식(微分方程式)을 얻게된다. 주어진 경우에 대하여 이들 관계식(關係式)을 적분(積分)하면, 전단력(剪斷力)과 휨모우멘트를 산출할 수 있다.

그림 1에는 길이 Δx인 보의 요소(要素)가 표시되어 있다. 그 요소에 작용하는 외력(外力)은, 그림 1(b)에서 보는 바와 같이, 길이 Δx상에 작용하는 세기 q의 분포하중(分布荷重)과 두 측면상(側面上)에 작용하는 전단력과 휨모우멘트이다.

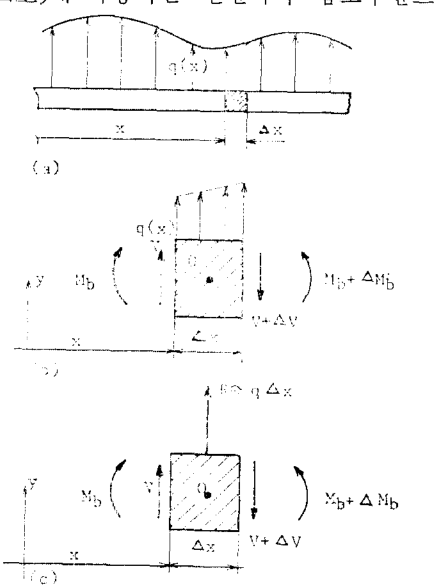


그림 1 분포하중을 받는 보로부터 분리시킨 미소요소의 자유물체

그림 1(c)에서는 분포하중이 그 합력(合力) R로 대치(代置)되어 있다. 엄격히 말하면, R의 크기와 작용점은 다음 식(1)에서 구해야한다.

$$R=\int_0^L q dx,$$

$$\bar{x}=\int_0^L \frac{xqdx}{R} \tag{1}$$

그러나 만일 $q(x)$의 변화가 완만하고, Δx가 대단히 작으면, R을 $q(x)\Delta x$와 거의 같다고 볼 수 있으며, R의 작용선(作用線)은 요소의 중점(中點) 0를 지난다고 생각할 수 있다.

즉 평형 방정식(平衡方程式)을 쓸 때, Δx가 대단히 작으므로, R의 크기는 $q\Delta x$와 같고, 0점을 지난다고 가정(假定)한다. 그림 1(c)에 평형조건(平衡條件)을 적용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\Sigma F_y = V+q\Delta_x-(V+\Delta V)=0,$$

$$\Sigma M_o = M_b+\Delta M_b-(V+\Delta V)\frac{\Delta_x}{2} - V\frac{\Delta x}{2}-M_b=0 \tag{2}$$

극한(極限)을 취하기 전에 식 (2)를 다음과 같이 고쳐쓴다:

$$\frac{\Delta V}{\Delta x}=q, \quad \frac{\Delta M_b}{\Delta x}=V+\frac{\Delta V}{2} \tag{3}$$

여기서 Δx가 0에 접근하면, ΔV와 ΔM_b 도 또한 0에 접근한다.

따라서 식 (3)의 비(比)는 미계수(微係數)가 된다. 즉 Δx가 0에 접근할 경우 식 (3)은 극한으로서 다음과 같아진다:

$$\frac{dV}{dx}=q, \tag{4}$$

$$\frac{dM_b}{dx}=V \tag{5}$$

이들은 하중의 세기 $q(x)$, 보에 걸리는 전단력 $V(x)$, 및 휨모우멘트 $M_b(x)$사이의 관계를 표시하는 미분 방정식이다.

식 (4)와 식 (5)를 적분하면 다음과 같이된다:

$$V=\int q dx+C_1, \tag{6}$$

$$M_b=\int V dx+C_2 \tag{7}$$

하중에 의하여 보는 변형(變形)을 일으키고 휘게 된다. 이 휨에 의하여 생기는 경사각과 처짐량들을 구하기 위하여, 본래 직선형인 보가 변형을 일으켜 어떤 곡선형으로 될 것이므로 미리 곡률(曲率 : curvature)의 개념을 도입하기로 한다.

평면곡선(平面曲線)의 곡률은 그 곡선의 경사각(傾斜角)의 그 곡선에 연(沿)한 거리에 관한 변화율(變化率)로써 정의(定義)된다. 그림 2는 xy평면상에 있는 곡선 AD의 곡률을 설명하기 위한 것이다.

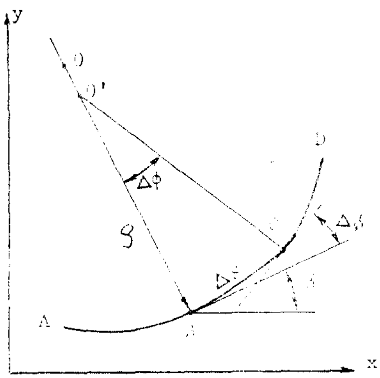


그림 2 곡선 AD의 점 B에서의 곡률은 $d\phi/ds=1/\rho$이며, 여기서 ρ는 점 B에서의 곡률반경이다

점 B와 C에서의 그 곡선의 법선(法線)들은 점 O'에서 만나고 있다. 점 B와 C 사이에서의 경사각의 변화는 $\Delta\phi$이다.

$\Delta\phi$가 작을 경우에는 호(弧) ΔS는 근사적으로 $O'B\Delta\phi$와 같다.

점 C가 B에 접근하는 극한, 즉 $\Delta S\to 0$되는 경우를 생각하면 점 B에서의 곡률은 다음과 같이 된다:

$$\frac{d\phi}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{O'B}=\frac{1}{\rho} \tag{8}$$

여기서 $\rho=OB$는 점 B에서의 곡률반경(曲率半徑 : radius of curvature)이다.

길이에 연하여 균일한 휨 모우멘트 만을 전달하는 순수한 휨(pure bending)하에서의 변형에 대한 기하학적 고찰에서 대칭평면(對稱平面)내 에서의 순수 휨의 경우에는 평면단면은 변형 후에도 평면을 유지한다. 또 본래 평행이던 평면단면들은 한 점에서 만나게 되며 따라서 그 보는 그 교점(交點)을 중심으로 하는 원호(圓弧)의 꼴로

휘게된다.

그림 3(a)는 변형 전의 보의 한 부분을 보여주며, 그림 3(b)는 대칭면 내에서의 보의 변형 상태를 보여주고 있다. 변형이 일어나도 단면들은 평면을 유지하므로, 본래 직선이던 종선(從線)들은 원호의 꼴로 휘게된다. 이때 어떤 종선들은 늘어나고, 어떤 종선들은 줄어든다. 따라서 길이가 변화하지 않는, 한 종선이 그 보의 대칭면상에 반드시 존재한다. 그것을 중립축(中立軸 : neutral axis)이라고 부르고, 변형전의 보의 중립축과 x축이 일치하도록 좌표축(座標軸)을 잡는다. 그때 xy 면은 그 보의 대칭면이고, xz 면은 중립면(中立面 : neutral surface)이라고 불리운다.

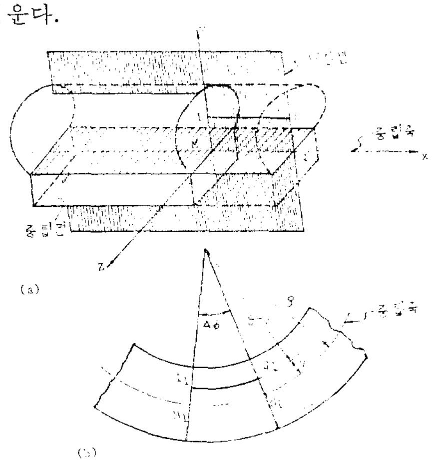


그림 3 (a)변형전의 보
(b)대칭면내에서 변형된 보

그림 3(a)와 같은 변형 전의 보속에 있는 거리 y만큼 떨어진 두 종선 IJ와 MN은 그림 3(b)에서 보는 바와 같은 동심원호(同心圓弧)I_1J_1과 M_1N_1으로 변형되지만, 그것들의 곡률반경의 차는 아직 y와 같다고 볼 수 있다. 따라서 변형된 중립축 M_1N_1의 곡률반경을 기호 ρ로 표시하기로 하면 I_1J_1의 곡률 반경은 $\rho-y$와 같다.

여기서 $IJ=MN=M_1N_1$이므로, I_1J_1의 변형도(變形度)는 다음과 같다 :

$$\epsilon_x=\frac{I_1J_1-IJ}{IJ}=\frac{I_1J_1-M_1N_1}{M_1N_1} \tag{9}$$

그림 3(b)의 원호들을 각 $\varDelta\phi$의 항으로 표시하면 다음과 같다.

$$M_1N_1=\rho\varDelta\phi,\ I_1J_1=(\rho-y)\varDelta\phi \tag{10}$$

식 (10)을 식 (9)에 대입하고, 곡률의 정의 식 (8)을 쓰면 다음 식을 얻는다 :

$$\epsilon_x=-\frac{y}{\rho}=-\frac{d\phi}{ds}y \tag{11}$$

따라서 등방성 선형 탄성재료(等方性 線形 彈性材料), 즉 Hooke의 법칙을 따르는 재료에서는 다음 식이 성립하게 된다 :

$$\epsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\gamma(\sigma_y+\sigma_z)\right]=-\frac{y}{\rho} \tag{12}$$

보의 평형조건은 보의 단면(斷面)위에 분포하는 응력의 합력이 모우멘트 M_b와 꼭 같아야 한다는 것이다.

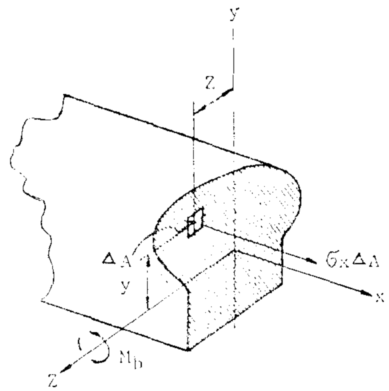


그림 4 보의 미소면적요소 $\varDelta A$에 작용하는 힘

그림 4에서 보는 바와 같은 미소면적요소(微小面積要素)$\varDelta A$에 작용하는 힘을 $\sigma_x\varDelta A$라고 하면, Z축에 관한 모우멘트 평형조건에서 다음식이 성립한다 :

$$M_b=-\int_A y\sigma_x dA \tag{13}$$

두께 $\varDelta x$의 얇은 요소의 외측표면에 수직 응력이나 전단응력이 없다는 사실을 주목하고, 보의 모양이 가느다란 것임을 고려하면 그 내부에서도 횡방향응력(橫方向應力) σ_y, σ_z 및 τ_{yz}가 0이라고 가정(假定)하는 것이 타당하다. 따라서 다음과 같은 가정을 세우기로 한다.

$$\sigma_y=\sigma_z=\tau_{yz}=0 \tag{14}$$

식 (14)와 같이 가정하면 단 하나의 0아닌 응력 성분이 남게 되며, 그것은 식 (12)로부터 다음과 같이 구해진다 :

$$\sigma_x = -E\frac{y}{\rho} = -E\frac{d\phi}{ds}y \qquad (15)$$

이 식은 Hooke의 법칙을 따르는 재료로 만들어진 보가 순수한 휨을 받는 경우에 대하여 종방향 수직응력의 분포상태를 표시하는 식이다.

식(15)를 식(13)에 대입하면

$$M_b = -\int_A y\sigma_x dA = \int_A yE\frac{y}{\rho}dA$$

$$= \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{EI}{\rho} \qquad (16)$$

식 (8)과 식 (16)에서 곡률을 휨 모우멘트의 함수로 표시하면 다음식을 얻는다 :

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{M_b}{EI} \qquad (17)$$

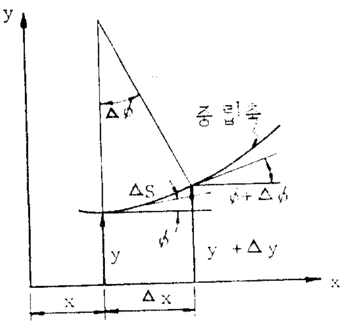


그림 5 xy면 안에서 휜 보의 중립축에 관한 기하학

그림 5에 xy면 내에서 휜 보의 중립면의 중립축을 보이고 있다. 경사각 ϕ가 작다면, ϕ는 근사적으로 그 정접(正接)으로 대치할 수 있다. 그래서 ϕ와 변위(變位) y사이의 관계는 다음과 같이 된다 :

$$\phi \approx \tan\phi = \frac{dy}{dx} \qquad (18)$$

ϕ가 작으므로, 중립축의 길이 Δs를 근사적으로 Δx와 같다고 볼 수 있으며, 각의 변화 $\Delta\phi$는 근사적으로 $x+\Delta x$와 x에서 산정(算定)한 식 (18)의 값의 차와 같다고 놓을 수 있다. 따라서 근사적으로 곡률은 다음과 같이 표시된다 :

$$\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s} \approx \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(dy/dx)_{x+\Delta x} - (dy/dx)_x}{\Delta x}$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (19)$$

식 (19)를 식 (17)에 대입하면 다음 미분 방정식을 얻는다 :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{M_b}{EI} \qquad (20)$$

이 식은 휨 모우멘트와 변위 사이의 관계를 나타낸다.

식 (20)을 적분하여 나가면 기울기를 표시하는 식과 처짐 곡선이 얻어진다 :

$$EI\frac{dy}{dx} = \int M_b dx + C_3 \qquad (21)$$

$$EIy = \iint M_b dx dx + C_3 x + C_4 \qquad (22)$$

식 (6)과 식 (7), 그리고 식 (21)과 식 (22)를 사용하여 하중상태를 알면 전단력, 모우멘트, 기울기와 처짐량을 구할 수 있게 된다.

3. 특이함수(特異函數 : Singularity Function)

앞에서 분포하중을 받는 보의 전단력 선도와 휨모우멘트 선도, 기울기식과 처짐곡선을 구하기 위한 적분법을 설명하였다.

그러나 집중 하중이나 집중 모우멘트가 걸리는 경우, 또는 분포하중의 세기가 돌변하는 경우에는 불연속 분포하중(不連續分布荷重)을 취급하는 특수한 수학적 수단을 사용하지 않는 한 대단히 곤란하게 된다.

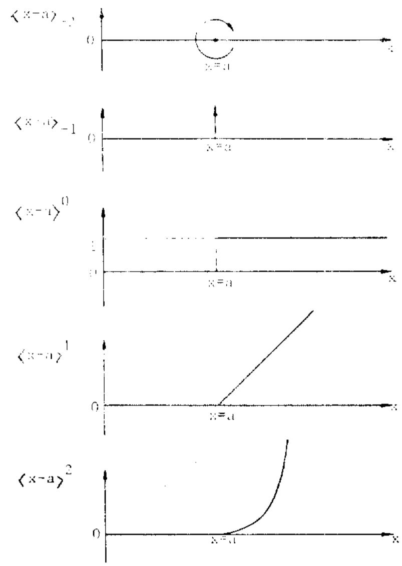


그림 6 특이함수 군(特異函數群)

여기서 그것을 위한 일련(一連)의 특이함수를 도입한다. 그림 6에 그 특이함수의 다섯가지 경우가 표시되어 있다.

$$f_n(x)=\langle x-a\rangle^n \qquad (23)$$

$n\geq 0$ 일때 식 (23)은 다음성질을 갖는다. 꺾임 묶음표 속이 음(陰)이면 (즉 $x<a$ 이면) $f_n(x)$의 값은 0이고, 꺾임 묶음표 속이 양(陽)이면 (즉 $x>a$ 이면) $f_n(x)$는 $(x-a)^n$의 값을 갖는다. 즉 꺾임 묶음표는 음호(陰號)를 가질 수 없다는 것 이외에는 모든 값에 대하여 일반묶음표와 다른 점이 없다.

함수 $\langle x-a\rangle^0$은 $x=a$에서 시작되는 단위계단함수(單位階段函數)라고 불리우며, 함수 $\langle x-a\rangle^1$은 $x=a$에서 시작되는 단위 경사함수(單位傾斜函數)라고 불리운다. 이들 함수의 적분법칙은 다음과 같다:

$$\int_{-\infty}^{x}\langle x-a\rangle^n\,dx=\frac{\langle x-a\rangle^{n+1}}{n+1},\quad n\geq 0 \quad (24)$$

그림 6에 표시된 함수중 처음 두 개는 예외이다. 그것을 강조하기 위하여 지수를 꺾임 묶음표 아래에 붙인다. 이들 함수는 $x=a$에서 무한대이고, 그 이외의 점에서 0이 된다. 그러나 이들은 다음과 같이 적분될 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{x}\langle x-a\rangle_{-2}\,dx=\langle x-a\rangle_{-1}$$

$$\int_{-\infty}^{x}\langle x-a\rangle_{-1}\,dx=\langle x-a\rangle^{0} \qquad (25)$$

$\langle x-a\rangle_{-1}$을 단위 집중 하중함수 또는 단위충격함수라고 부른다. $\langle x-a\rangle_{-2}$는 단위 집중 모우멘트 함수 또는 단위 2중함수라고 불리운다.

식 (23)으로 표시되는 어떤 종류의 하중분포에 대해서도, 그것을 식 (24)와 식 (25)에 표시된 적분법칙에 따라 적분함으로써, 전단력과 휨모우멘트, 기울기와 처짐량을 구할 수 있다.

그림 7에는 하중의 세기의 분포가 예시되어 있으며, 또한 그것들이 특이함수로 표시되어 있다. 거의 모든 보의 실제적인 하중상태는 그림 7에 포함된 여러경우를 중첩(superposition)함으로써 표시할 수 있다.

지점(支點)에서의 반력과 반력 모우멘트는

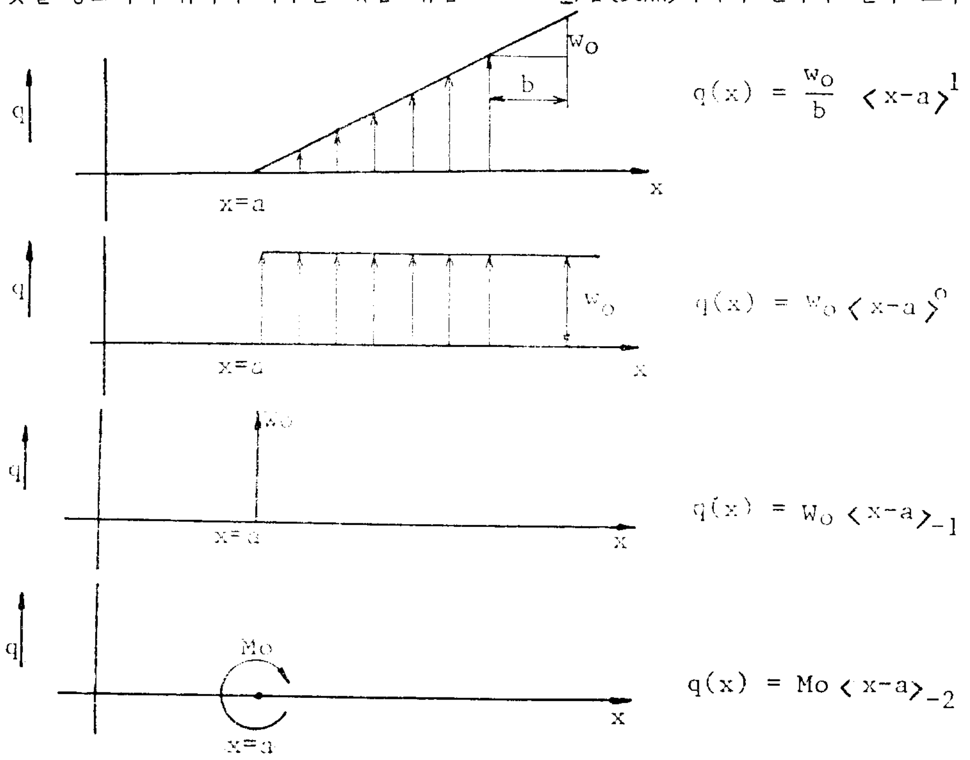


그림 7 특이함수로 표시된 하중의 세기의 예(例)

미지의 집중력과 집중모우멘트로 생각하여 처음부터 하중의 세기에 포함시킨다.

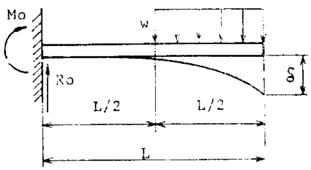
식 (6)과 식 (7)에서의 적분상수 C_1과 C_2는 각각 $x=-\infty$에서 $V=0$, $M_b=0$임을 고려하면 $C_1=C_2=0$로 할 수 있다. 식 (21)과 식 (22)에서의 적분상수 C_3와 C_4, 그리고 각 지점에서의 반력과 반력모우멘트들은 힘의 평형방정식과 모우멘트의 평형 방정식을 사용하고 각 지점(支點)에서의 경계조건을 식 (21) 및 식 (22)에 대입(代入)함으로써 몇 개의 연립방정식의 해(解)로써 구해진다. 여기에서 사용하는 경계조건은 단순지지의 경우 $y=0$이어야 한다는 것과, 고정단(固定端)에서 $y=0$ 및 $dy/dx=0$이 되어야 한다는 것이다. 최대 휨 모우멘트의 값이나 최대처짐량의 값에 대하여는 그들을 나타내는 위치가 휨모우멘트나 처짐량의 식 (7), (22)를 미분한 식 (6)이나 식 (21)을 0으로 만드는 x의 값이나 지점에서 발생한다는 것을 고려하면 식 (7) 및 식 (22)에서 쉽게 구해질 수 있다.

다음에 임의로 선택한 처짐이나 부정정 보 문제의 대표적인 경우들에 대하여 특이함수를 사용한 풀이를 보인다.

풀이에서 한가지 주의해야 할 점은 $n\geq 0$인 경우의 특이함수로 표시된 하중은 x방향으로 무한히 계속되는 하중이므로 주어진 구간에만 하중이 작용하는 상태로 하기 위하여는 구간을 지나서는 하중값이 0이 되도록 반대방향의 하중을 가해주어야 한다는 것이다.

4. 특이함수를 이용한 부정정 보 및 처짐 문제 풀이의 예

【예제 1】 다음의 그림과 같은 균일 분포하중을 받는 경우의 자유단의 처짐 δ를 구하라.



해) 힘의 평형 조건에서

$$R_0=wL/2 \tag{1}$$

모우멘트 평형 조건에서

$$M_0=-wL/2\times\frac{3}{4}L=-\frac{3}{8}wL^2 \tag{2}$$

하중의 분포를 특이함수로 표시하면

$$q(x)=M_0\langle x\rangle_{-2}+R_0\langle x\rangle_{-1}-w\langle x-\frac{L}{2}\rangle^0+w\langle x-L\rangle^0$$

하중함수를 적분하여 전단력 함수를 구하면

$$V(x)=M_0\langle x\rangle_{-1}+R_0\langle x\rangle^0-w\langle x-\frac{L}{2}\rangle^1+w\langle x-L\rangle^1+C_1$$

$x=-\infty$에서 $V=0$ 이므로 $C_1=0$

전단력 함수를 적분하여 휨모우멘트 함수를 구하면

$$M_b(x)=M_0\langle x\rangle^0+R_0\langle x\rangle^1-\frac{w}{2}\langle x-\frac{L}{2}\rangle^2+\frac{w}{2}\langle x-L\rangle^2+C_2$$

$x=-\infty$에서 $M_b=0$이므로 $C_2=0$

휨모우멘트 함수를 적분하여 기울기 함수를 구하면

$$EI\frac{dy}{dx}=M_0\langle x\rangle^1+\frac{R_0}{2}\langle x\rangle^2-\frac{w}{6}\langle x-\frac{L}{2}\rangle^3+\frac{w}{6}\langle x-L\rangle^3+C_3 \tag{3}$$

기울기 함수를 적분하여 처짐곡선 함수를 구하면

$$EIy=\frac{M_0}{2}\langle x\rangle^2+\frac{R_0}{6}\langle x\rangle^3-\frac{w}{24}\langle x-\frac{L}{2}\rangle^4+\frac{w}{24}\langle x-L\rangle^4+C_3x+C_4 \tag{4}$$

$x=0$에서 $dy/dx=0$이므로 식 (3)에서 $C_3=0$

$x=0$에서 $y=0$ 이므로 식 (4)에서 $C_4=0$

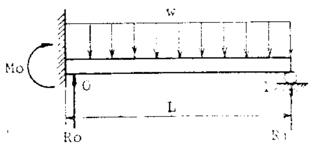
식 (1)과 식 (2)에서 구한 R_0와 M_0값을 식 (4)에 대입하면

$$EIy=-\frac{3}{16}wL^2\langle x\rangle^2+\frac{wL}{12}\langle x\rangle^3-\frac{w}{24}\langle x-\frac{L}{2}\rangle^4+\frac{w}{24}\langle x-L\rangle^4$$

$x=L$에서 $EIy=-\frac{3}{16}wL^4+\frac{wL^4}{12}-\frac{wL^4}{384}=-\frac{41}{384}wL^4$

따라서 $y=-\frac{41wL^4}{384EI}$ (−)부호는 하향을 표시한다.

【예제 2】 다음의 그림에서 각 지점의 반력 및 반력 모우멘트를 구하라.



해) 힘의 평형에서

$$R_0+R_1=wL \qquad (1)$$

모우멘트의 평형에서(0 지점)

$$M_0+wL\cdot\frac{L}{2}-R_1L=0 \qquad (2)$$

$$q(x)=M_0\langle x\rangle_{-2}+R_0\langle x\rangle_{-1}-w\langle x\rangle^0$$
$$+R_1\langle x-L\rangle_{-1}+w\langle x-L\rangle^0$$

$$V(x)=M_0\langle x\rangle_{-1}+R_0\langle x\rangle^0-w\langle x\rangle^1+R_1\langle x-L\rangle^0$$
$$+w\langle x-L\rangle^1$$

$$M_b(x)=M_0\langle x\rangle^0+R_0\langle x\rangle^1-\frac{w}{2}\langle x\rangle^2$$
$$+R_1\langle x-L\rangle^1+\frac{w}{2}\langle x-L\rangle^2$$

$$EI\frac{dy}{dx}=M_0\langle x\rangle^1+\frac{R_0}{2}\langle x\rangle^2-\frac{w}{6}\langle x\rangle^3$$
$$+\frac{R_1}{2}\langle x-L\rangle^2+\frac{w}{6}\langle x-L\rangle^3+C_3$$

$$EIy=\frac{M_0}{2}\langle x\rangle^2+\frac{R_0}{6}\langle x\rangle^3-\frac{w}{24}\langle x\rangle^4$$
$$+\frac{R_1}{6}\langle x-L\rangle^3+\frac{w}{24}\langle x-L\rangle^4+C_3x+C_4$$

$x=0,\ dy/dx=0\ ;\ C_3=0$

$x=0,\ y=0\ ;\ C_4=0$

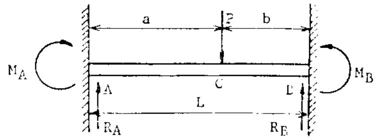
$$x=L,\ y=0\ ;\ \frac{M_0}{2}\cdot L^2+\frac{R_0}{6}\cdot L^3$$
$$-\frac{w}{24}\cdot L^4=0 \qquad (3)$$

(1), (2), (3)을 연립하여 풀면

$$R_0=\frac{5}{8}wL,\ R_1=\frac{3}{8}wL,\ M_0=-\frac{1}{8}wL^2$$

M_0의 (−)부호는 M_0의 방향이 그림과 반대임을 나타낸다.

【예제 3】 다음 그림과 같은 양단 고정 보에 하중 P가 작용할 때 양단의 반력, 모우멘트를 구하고, 최대 모우멘트는 어느 때 나타나는지 구하라.



해) 힘의 평형 ; $R_A+R_B=P \qquad (1)$

모우멘트평형 ; $M_A-M_B=R_BL-Pa \qquad (2)$

$$q(x)=M_A\langle x\rangle_{-2}+R_A\langle x\rangle_{-1}-P\langle x-a\rangle_{-1}$$
$$+R_B\langle x-L\rangle_{-1}-M_B\langle x-L\rangle_{-2}$$

$$V(x)=M_A\langle x\rangle_{-1}+R_A\langle x\rangle^0-P\langle x-a\rangle^0$$
$$+R_B\langle x-L\rangle^0-M_B\langle x-L\rangle_{-1}$$

$$M_b(x)=M_A\langle x\rangle^0+R_A\langle x\rangle^1-P\langle x-a\rangle^1$$
$$+R_B\langle x-L\rangle^1-M_B\langle x-L\rangle^0$$

$$EI\frac{dy}{dx}=M_A\langle x\rangle^1+\frac{R_A}{2}\langle x\rangle^2-\frac{P}{2}\langle x-a\rangle^2$$
$$+\frac{R_B}{2}\langle x-L\rangle^2-M_B\langle x-L\rangle^1+C_3$$

$$EIy=\frac{M_A}{2}\langle x\rangle^2+\frac{R_A}{6}\langle x\rangle^3-\frac{P}{6}\langle x-a\rangle^3$$
$$+\frac{R_B}{6}\langle x-L\rangle^3-\frac{M_B}{2}\langle x-L\rangle^2+C_3x+C_4$$

$x=0,\ dy/dx=0\ ;\ C_3=0$

$x=0,\ y=0\ ;\ C_4=0$

$$x=L,\ dy/dx=0\ ;\ M_A\cdot L+\frac{R_A}{2}\cdot L^2$$
$$-\frac{P}{2}(L-a)^2=0 \qquad (3)$$

$$x=L,\ y=0\ ;\ \frac{M_A}{2}\cdot L^2+\frac{R_A}{6}\cdot L^3$$
$$-\frac{P}{6}(L-a)^3=0 \qquad (4)$$

(1), (2), (3), (4)를 연립하여 풀면

$$R_A=\frac{P}{L^3}(L^3-3La^2+2a^3),$$

$$R_B=\frac{P}{L^3}(3La^2-2a^3),$$

$$M_A=\frac{P}{L^2}(2La^2-a^3-L^2a),\ M_B=\frac{P}{L^2}(a^3-La^2)$$

이 값들은 L, a, b를 같이 사용하면 다음과 같이 좀 더 정리 될 수도 있다.

$$R_A=\frac{Pb^2}{L^3}(b+3a),\ R_B=\frac{Pa^2}{L^3}(a+3b),$$

$$M_A=-\frac{-Pab^2}{L^2},\ M_B=-\frac{Pa^2b}{L^2}$$

최대 모우멘트 값을 구하기 위하여는 모우멘

트의 특이함수가 x에 관한 1차식이므로 최대 값은 각 경계점에서 나타난다.

A점에서의 모우멘트 값은 앞에서 구한 바와 같이

$$M_A=\frac{P}{L^2}(2La^2-a^3-L^2a)$$

M_A를 a에 관하여 미분하고 미계수를 0으로 놓으면

$$\frac{dM_A}{da}=\frac{P}{L^2}(-3a^2+4La-L^2)$$
$$=\frac{-P}{L^2}(3a-L)(a-L)=0$$

$a=L/3$과 $a=L$이 얻어지나 $a=L$은 B점이므로 $M_A=0$이다. 즉,

$$a=\frac{L}{3}\text{때 };\ M_A=\frac{P}{L^2}\left(2L\cdot\frac{L^2}{9}-\frac{L^3}{27}-\frac{L^3}{3}\right)$$
$$=-\frac{4}{27}PL$$

$$a=L\ \text{ 때 };\ M_A=\frac{P}{L^2}(2L^3-L^3-L^3)=0$$

B점에서의 모우멘트의 값은 앞에서 구한 바와 같이

$$M_B=\frac{P}{L^2}(a^3-La^2)$$

M_B를 a에 관하여 미분하고 미계수를 0으로 놓으면,

$$\frac{dM_B}{da}=\frac{P}{L^2}(3a^2-2La)=\frac{P}{L^2}a(3a-2L)=0$$

$$a=\frac{2}{3}L\text{ 때 : }M_B=\frac{P}{L^2}\left(\frac{8}{27}L^3-\frac{4}{9}L^3\right)$$
$$=-\frac{4}{27}PL$$

$a=0$ 때 ; $M_B=0$

C점에서의 모우멘트 값은 휨모우멘트의 식에서 $x=a$인 때 이므로,

$$M_C=M_A+R_A\cdot a=\frac{2P}{L^3}(a^4-2La^3+L^2a^2)$$

M_C를 a에 관하여 미분하고 미계수를 0으로 놓으면,

$$\frac{dM_C}{da}=\frac{2P}{L^3}(4a^2-6La^2+2L^2a)$$
$$=\frac{4Pa}{L^3}(2a-L)(a-L)=0$$

$a=0$ 때 : $M_C=0$

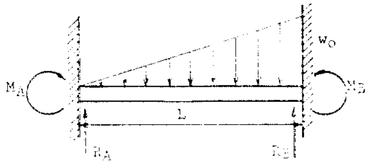
$$a=\frac{L}{2}\text{때 : }M_C=\frac{2P}{L^3}\left(\frac{L^4}{16}-\frac{L^4}{4}+\frac{L^4}{4}\right)$$
$$=\frac{PL}{8}$$

$$a=L\text{ 때 : }M_C=\frac{2P}{L^3}(L^4-2L^4+L^4)=0$$

따라서 최대 모우멘트 값은 (+)의 모우멘트 값은 $a=\frac{L}{2}$일때 C점에서 나타나는 $PL/8$이고, (−)의 모우멘트 값은 $a=L/3$ 및 $a=2L/3$일때 하중점에 가까운 쪽의 고정단에서 나타나고 그 값은 $-4PL/27$이 된다.

(−)모우멘트의 절대값이 크므로 이 쪽이 최대 모우멘트가 된다.

【예제 4】 다음 그림에서 각 지점의 반력과 반력 모우멘트를 구하라.



해) 힘의 평형에서

$$R_A+R_B=w_0L/2 \qquad (1)$$

모우멘트의 평형에서

$$M_A-M_B=R_B\cdot L-\frac{w_0L}{2}\cdot\frac{2L}{3} \qquad (2)$$

$$q(x)=M_A\langle x\rangle_{-2}+R_A\langle x\rangle_{-1}-\frac{w_0}{L}\langle x\rangle^1$$
$$+\frac{w_0}{L}\langle x-L\rangle^1+w_0\langle x-L\rangle^0+R_B\langle x-L\rangle_{-1}$$
$$-M_B\langle x-L\rangle_{-2}$$

$$V(x)=M_A\langle x\rangle_{-1}+R_A\langle x\rangle^0-\frac{w_0}{2L}\langle x\rangle^2$$
$$+\frac{w_0}{2L}\langle x-L\rangle^2+w_0\langle x-L\rangle^1+R_B\langle x-L\rangle^0$$
$$-M_B\langle x-L\rangle_{-1}$$

$$M_b(x)=M_A\langle x\rangle^0+R_A\langle x\rangle^1-\frac{w_0}{6L}\langle x\rangle^3$$
$$+\frac{w_0}{6L}\langle x-L\rangle^3+\frac{w_0}{2}\langle x-L\rangle^2+R_B\langle x-L\rangle^1$$
$$-M_B\langle x-L\rangle^0$$

$$EI\frac{dy}{dx}=M_A\langle x\rangle^1+\frac{R_A}{2}\langle x\rangle^2-\frac{w_0}{24L}\langle x\rangle^4$$
$$+\frac{w_0}{24L}\langle x-L\rangle^4+\frac{w_0}{6}\langle x-L\rangle^3$$

$$+\frac{R_B}{2}\langle x-L\rangle^2-M_B\langle x-L\rangle^1+C_3$$

$$EIy=\frac{M_A}{2}\langle x\rangle^2+\frac{R_A}{6}\langle x\rangle^3-\frac{w_0}{120L}\langle x\rangle^5$$

$$+\frac{w_0}{120L}\langle x-L\rangle^5+\frac{w_0}{24}\langle x-L\rangle^4$$

$$+\frac{R_B}{6}\langle x-L\rangle^3-\frac{M_B}{2}\langle x-L\rangle^2+C_3x+C_4$$

$x=0,\ dy/dx=0\ ;\ C_3=0$

$x=0,\ y=0\quad ;\ C_4=0$

$$x=L,\ dy/dx=0\ ;\ M_A\cdot L+\frac{R_A}{2}\cdot L^2-\frac{w_0}{24L}L^4=0 \qquad (3)$$

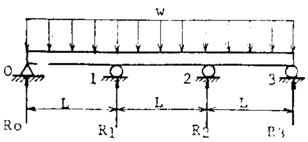
$$x=L,\ y=0\ ;\ \frac{M_A}{2}\cdot L^2+\frac{R_A}{6}\cdot L^3-\frac{w_0}{120L}L^5=0 \qquad (4)$$

(1), (2), (3), (4)를 연립하여 풀면

$$R_A=\frac{3}{20}w_0L,\ R_B=\frac{7}{20}w_0L,$$

$$M_A=-\frac{w_0L^2}{30},\ M_B=-\frac{w_0L^2}{20}$$

【예제 5】 다음 그림에서 각 지점의 반력을 구하라.



해) 힘의 평형 조건에서

$$R_0+R_1+R_2+R_3=3wL \qquad (1)$$

모우멘트 평형조건에서

$$R_1L+R_2(2L)+R_3(3L)=3wL(1.5L) \qquad (2)$$

$$q(x)=R_0\langle x\rangle_{-1}-w\langle x\rangle^0+R_1\langle x-L\rangle_{-1}+R_2\langle x-2L\rangle_{-1}+R_3\langle x-3L\rangle_{-1}+w\langle x-3L\rangle^0$$

$$V(x)=R_0\langle x\rangle^0-w\langle x\rangle^1+R_1\langle x-L\rangle^0+R_2\langle x-2L\rangle^0+R_3\langle x-3L\rangle^0+w\langle x-3L\rangle^1$$

$$M_b(x)=R_0\langle x\rangle^1-\frac{w}{2}\langle x\rangle^2+R_1\langle x-L\rangle^1+R_2\langle x-2L\rangle^1+R_3\langle x-3L\rangle^1+\frac{w}{2}\langle x-3L\rangle^2$$

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{R_0}{2}\langle x\rangle^2-\frac{w}{6}\langle x\rangle^3+\frac{R_1}{2}\langle x-L\rangle^2$$

$$+\frac{R_2}{2}\langle x-2L\rangle^2+\frac{R_3}{2}\langle x-3L\rangle^2$$

$$+\frac{w}{6}\langle x-3L\rangle^3+C_3$$

$$EIy=\frac{R_0}{6}\langle x\rangle^3-\frac{w}{24}\langle x\rangle^4+\frac{R_1}{6}\langle x-L\rangle^3$$

$$+\frac{R_2}{6}\langle x-2L\rangle^3+\frac{R_3}{6}\langle x-3L\rangle^3$$

$$+\frac{w}{24}\langle x-3L\rangle^4+C_3x+C_4$$

$x=0,\ y=0\ ;\ C_4=0$

$$x=L,\ y=0\ ;\ \frac{R_0}{6}(L)^3-\frac{w}{24}(L)^4+C_3L=0 \qquad (3)$$

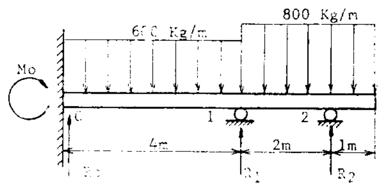
$$x=2L, y=0\ ;\ \frac{R_0}{6}(2L)^3-\frac{w}{24}(2L)^4+\frac{R_1}{6}(L)^3+C_3(2L)=0 \qquad (4)$$

$$x=3L,\ y=0\ ;\ \frac{R_0}{6}(3L)^3-\frac{w}{24}(3L)^4+\frac{R_1}{6}(2L)^3+\frac{R_2}{6}(L)^3+C_3(3L)=0 \qquad (5)$$

(1), (2), (3), (4), (5)를 연립하여 풀면

$$R_0=R_3=\frac{2}{5}wL, R_1=R_2=\frac{11}{10}wL$$

【예제 6】 다음 그림에서 각 지점의 반력및 반력 모우멘트를 구하라.



해) 힘의 평형조건에서

$$R_0+R_1+R_2=600\times4+800\times3 \qquad (1)$$

모우멘트의 평형조건에서

$$M_0+600\times4\times2+800\times3\times5.5=4R_1+6R_2 \qquad (2)$$

$$q(x)=M_0\langle x\rangle_{-2}+R_0\langle x\rangle_{-1}-600\langle x\rangle^0+R_1\langle x-4\rangle_{-1}-200\langle x-4\rangle^0+R_2\langle x-6\rangle_{-1}+800\langle x-7\rangle^0$$

$$V(x)=M_0\langle x\rangle_{-1}+R_0\langle x\rangle^0-600\langle x\rangle^1+R_1\langle x-4\rangle^0-200\langle x-4\rangle^1+R_2\langle x-6\rangle^0+800\langle x-7\rangle^1$$

$$M_b(x)=M_0\langle x\rangle^0+R_0\langle x\rangle^1-300\langle x\rangle^2$$

$+R_1\langle x-4\rangle^1-100\langle x-4\rangle^2+R_2\langle x-6\rangle^1$
$+400\langle x-7\rangle^2$

$$EI\frac{dy}{dx}=M_0\langle x\rangle^1+\frac{R_0}{2}\langle x\rangle^2-100\langle x\rangle^3$$
$$+\frac{R_1}{2}\langle x-4\rangle^2-\frac{100}{3}\langle x-4\rangle^3$$
$$+\frac{R_2}{2}\langle x-6\rangle^2+\frac{400}{3}\langle x-7\rangle^3+C_3$$

$$EIy=\frac{M_0}{2}\langle x\rangle^2+\frac{R_0}{6}\langle x\rangle^3-25\langle x\rangle^4$$
$$+\frac{R_1}{6}\langle x-4\rangle^3-\frac{25}{3}\langle x-4\rangle^4$$
$$+\frac{R_2}{6}\langle x-6\rangle^3+\frac{100}{3}\langle x-7\rangle^4+C_3x+C_4$$

$x=0,\ dy/dx=0\ ;\ C_3=0$

$x=0,\ \ y=0\ \ ;\ C_4=0$

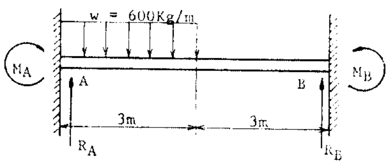
$x=4,\ y=0\ \ ;\ \frac{M_0}{2}(4)^2+\frac{R_0}{6}(4)^3$
$-25(4)^4=0$ (3)

$x=6,\ y=0\ \ ;\ \frac{M_0}{2}(6)^2+\frac{R_0}{6}(6)^3$
$-25(6)^4+\frac{R_1}{6}(2)^3-\frac{25}{3}(2)^4=0$ (4)

(1), (2), (3), (4)를 연립하여 풀면

$R_0=1,290\text{kg},\quad R_1=1,990\text{kg},$
$R_2=1,520\text{kg},\ M_0=-920\text{kg}\cdot\text{m}$

【예제 7】 다음 그림에서 각 지점의 반력 및 반력 모우멘트를 구하라.



해) 힘의 평형조건에서

$R_A+R_B=600\times3$ (1)

A점에 관한 모우멘트의 평형조건에서

$M_A-M_B=R_B(6)-600(3)(1.5)$ (2)

$q(x)=M_A\langle x\rangle_{-2}+R_A\langle x\rangle_{-1}-600\langle x\rangle^0$
$+600\langle x-3\rangle^0+R_B\langle x-6\rangle_{-1}-M_B\langle x-6\rangle_{-2}$

$V(x)=M_A\langle x\rangle_{-1}+R_A\langle x\rangle^0-600\langle x\rangle^1$
$+600\langle x-3\rangle^1+R_B\langle x-6\rangle^0-M_B\langle x-6\rangle_{-1}$

$M_b(x)=M_A\langle x\rangle^0+R_A\langle x\rangle^1-300\langle x\rangle^2$
$+300\langle x-3\rangle^2+R_B\langle x-6\rangle^1-M_B\langle x-6\rangle^0$

$$EI\frac{dy}{dx}=M_A\langle x\rangle^1+\frac{R_A}{2}\langle x\rangle^2-100\langle x\rangle^3$$
$$+100\langle x-3\rangle^3+\frac{R_B}{2}\langle x-6\rangle^2-M_B\langle x-6\rangle^1$$
$$+C_3$$

$$EIy=\frac{M_A}{2}\langle x\rangle^2+\frac{R_A}{6}\langle x\rangle^3-25\langle x\rangle^4$$
$$+25\langle x-3\rangle^4+\frac{R_B}{6}\langle x-6\rangle^3-\frac{M_B}{2}\langle x-6\rangle^2$$
$$+C_3x+C_4$$

$x=0,\ dy/dx=0\ ;\ C_3=0$

$x=0,\ y=0\ \ ;\ C_4=0$

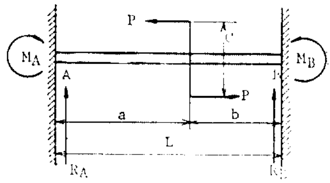
$x=6,\ dy/dx=0\ ;\ M_A(6)+\frac{R_A}{2}(6)^2$
$-100(6)^3+100(3)^3=0$ (3)

$x=6,\ y=0\ \ ;\ \frac{M_A}{2}(6)^2+\frac{R_A}{6}(6)^3$
$-25(6)^4+25(3)^4=0$ (4)

(1), (2), (3), (4)를 연립하여풀면

$R_A=1462.5\text{kg},\ R_B=337.5\text{kg},$
$M_A=-1237.5\text{kg}\cdot\text{m}, M_B=-562.5\text{kg}\cdot\text{m}$

【예제 8】 다음 그림에서 각 지점의 반력 및 반력 모우멘트를 구하라.



해) 힘의 평형조건에서

$R_A+R_B=0$ (1)

A점에 관한 모우멘트 평형조건에서

$M_A=M_B+P\cdot C+R_B\cdot L$ (2)

$q(x)=M_A\langle x\rangle_{-2}+R_A\langle x\rangle_{-1}-PC\langle x-a\rangle_{-2}$
$+R_B\langle x-L\rangle_{-1}-M_B\langle x-L\rangle_{-2}$

$V(x)=M_A\langle x\rangle_{-1}+R_A\langle x\rangle^0-PC\langle x-a\rangle_{-1}$
$+R_B\langle x-L\rangle^0-M_B\langle x-L\rangle_{-1}$

$M_b(x)=M_A\langle x\rangle^0+R_A\langle x\rangle^1-PC\langle x-a\rangle^0$
$+R_B\langle x-L\rangle^1-M_B\langle x-L\rangle^0$

$$EI\frac{dy}{dx}=M_A\langle x\rangle^1+\frac{R_A}{2}\langle x\rangle^2-PC\langle x-a\rangle^1$$
$$+\frac{R_B}{2}\langle x-L\rangle^2-M_B\langle x-L\rangle^1+C_3$$

$$EIy=\frac{M_A}{2}\langle x\rangle^2+\frac{R_A}{6}\langle x\rangle^3-\frac{PC}{2}\langle x-a\rangle^2$$

$$+\frac{R_B}{6}\langle x-L\rangle^3-\frac{M_B}{2}\langle x-L\rangle^2+C_3x+C_4$$

$x=0,\ dy/dx=0\ ;\ C_3=0$

$x=0,\ y=0\qquad ;\ C_4=0$

$$x=L,\ dy/dx=0\ ;\ M_A(L)+\frac{R_A}{2}(L)^2-PC(L-a)=0 \qquad (3)$$

$$x=L,\ y=0\qquad ;\ \frac{M_A}{2}(L)^2+\frac{R_A}{6}(L)^3-\frac{PC}{2}(L-a)^2=0 \qquad (4)$$

(1), (2), (3), (4)를 연립하여 풀면

$$R_A=\frac{6\ Pcab}{L^3},\quad R_B=\frac{-6\ Pcab}{L^3},$$

$$M_A=\frac{Pcb(b-2a)}{L^2},\quad M_B=\frac{Pca(2b-a)}{L^2}$$

이상의 예제들에서 보는 바와 같이 보의 문제는 하중의 세기를 특이함수로 정확히 표시하기만 하면 일사불란하게 적분을 해나가고 경계조건을 대입하므로써 쉽게 풀릴 수 있다. 미지의 반력과 모우멘트의 수효만큼 항상 같은 수의 경계조건이 존재한다. 단순지지의 경우 한개의 반력과 한개의 경계조건(즉 $y=0$), 고정단에서 한개의 반력과 한개의 반력모우멘트에 대하여 두개의 경계조건($dy/dx=0,\ y=0$)을 주며 두 개의 적분 상수에 대하여 힘의 평형과 모우멘트의 평형이라는 두 개의 조건이 주어지므로 항상 미지수와 같은 수의 방정식이 성립하여 연립방정식에 의한 풀이가 가능해진다.

예제로써는 예제 5와 같은 좌우 대칭의 문제도 있고 그렇지 않은 경우도 있다. 예제 5와 같은 경우에는 대칭의 위치에 있는 반력이나 모우멘트들을 같게 놓음으로써 훨씬 쉽게 풀릴 수 있으나 여기서 일부러 피한 이유는 동일한 수순에 의해 진행되고 해(解)를 구할수 있다는 것을 보여주기 위한 것이다. 전단력 선도나 휨모우멘트의 선도(線圖)를 그리는 것은 반력들을 알고나면 해당되는 특이함수를 그대로 도표화하면 가능하기에 생략하였다.

참 고 문 헌

(1) 이랑, 신 영기, 임상전 공역 (고체역학) 문운당, 1962
원서명 : Stephen H. Crandall, Norman C. Dahl
(An Introduction to the Mechanics of Solids)
McGraw-Hill, 1959

(2) 임상전 역(재료역학) 문운당, 1965
원서명 : S. Timoshenko, D.H. Young
(Elements of Strength of Materials) 1962

(3) Joseph Edward Shigley
(Mechanical EngineeringDesign) McGraw-Hill, 1977

(4) Stephen H. Crandall, Norman C. Dahl, Thomas J. Lardner
(An Introduction to the Mechanics of Solid)
McGraw-Hill, 1978

(5) 엄 기원 (재료역학연습) 동명사, 1975