최 적 설 계 (Ⅱ)

郭 柄 晩
<韓國科學技術院 機械工學科・工博>

지난번 강좌[1]에서는 최적설계(optimal desgn)에 대한 일반적인 소개 및 표준적인 수식화에 대해 논의하였으며, 본 강좌에서는 최적화 문제의 필요조건을 이용하여 구할 수 있는 간단한 예제를 소개하고 필요조건에 대한 성질을 좀더 소개하려 한다.

편의를 위하여 지난번 강좌의 주요결론을 재정리하면 다음과 같다.

문제 : $\min f(x_1, \cdots, x_n)$ (37)

subject to $h_i(x_1, \cdots, x_n)=0,\ i=1, \cdots, m$ (38)

$g_j(x_1, \cdots, x_n) \leq 0,\ j=1, \cdots, p$ (39)

Kuhn-Tucker 의 필요조건 :

$$L(x_1, \cdots, x_n)=f+\sum \lambda_i h_i+\sum \mu_j g_j \qquad (40)$$

라 할 때

$$\nabla f+\sum \lambda_i \nabla h_i+\sum \mu_j \nabla g_j=0 \qquad (41)$$

$$h_i=0,\ i=1, \cdots, m \qquad (42)$$

$$\mu_j g_j=0,\ j=1, \cdots, p \qquad (43)$$

$$\mu_j \geq 0,\ j=1, \cdots, p \qquad (44)$$

이 조건은 미지수의 숫자와 방정식의 숫자가 일치하지만 강한 비선형일 뿐만아니라 부호의 제한까지 주어져 있어 쉽게 풀수가 없고 또한 보통 많은 해가 존재한다. 그리고 지난호에서 언급한 바와 같이 필요조건의 해들은 최적화 문제의 해답에 대한 후보를 제시할 뿐임으로 충분조건을 검토하거나 이들을 서로 비교검토하여 최종해를 선정해야 할 것이다.

실제로 이용하기는 복잡성 때문에 어렵지만 개념을 얻기 위하여 한개의 충분조건을 소개하면 다음과 같다. 이 충분조건은 Lagrange 함수에 대한 2차 미분이 필요하다. 즉 x^*가 문제 (37)~(39)에 대한 국부해(local minimum)가 되기 위한 충분조건(sufficient condition)은 위에 진술한 Kuhn-Tucker 조건을 만족하고, Lagrange 함수 L의 2차 미분 행렬

$$\nabla^2 L=\nabla^2 f+\sum \lambda_i \nabla^2 h_i+\sum \mu_j \nabla^2 g_j \qquad (45)$$

을 Hessian 행렬이라하며 x^*에서 등식으로 만족하게 되는 모든 등식 조건식과 부등식조건식의 Gradient 에 수직인 벡터들의 집합 즉 소위 접평면 위에서 이 Hessian 행렬이 一方的陽(positive definite)이라야 한다는 것이다. 이는 지난 강좌 제 3 장에서 언급한 제한 조건이 없는 최적화 문제의 경우와 같은 개념이며, 여기서는 전공간(whole space)에서가 아닌 제한된 어떤 부공간(subspace)에 대해서 생각한다는 것이 다르다. 보다 자세한 이론전개는 지난 강좌 후미에 소개된 문헌을 참조하기 바란다.

비교적 미지수나 제한조건식의 숫자가 적을 경우에만 필요조건을 해석적으로 취급할 수 있고 일반적으로는 거의 불가능하다. 더구나 충분조건의 검토는 더욱 힘들며 시찰과 경험에 의하여 후보해 중에서 답을 고를 수 있다. 다음에 간단한 경우에 대하여 해석적으로 구하는 응용례를 생각한다.

3. 필요조건의 응용례

3.1. 2차원 문제의 예

필요조건을 푸는 예를 제시하기 위하여 아래와 같은 간단한 최적화 문제를 생각하자.

$$\min f(x_1, x_2) = (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2$$

$$\text{subject to } h_1 = x_1 + 2x_2 - 4 = 0$$

$$g_1 = x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0$$

$$g_2 = -x_1 \le 0$$

$$g_3 = -x_2 \le 0$$

이문제는 그림 2와 같이 도식화하면 점(3, 2)에서부터 빗금친 부분내의 $x_1+2x_2=4$를 만족하는 선분상의 어떤점까지의 최단거리를 구하는 것과 같다.

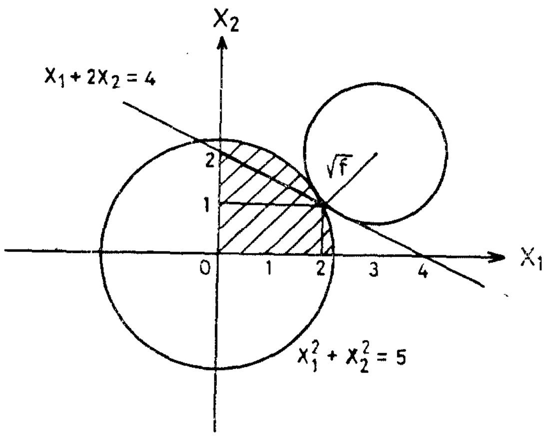

그림 2 예제 3.1의 도식

이 문제에 대한 Lagrange의 함수(40)은 다음과 같다.

$$L = (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 + \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) - \mu_2 x_1 - \mu_3 x_2 + \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 4)$$

여기서 $\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \mu_3$는 Lagrange 승수이다. 그러므로 Kuhn-Tucker의 필요조건 (41)~(44)는 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 = 2(x_1-3) + 2\mu_1 x_1 - \mu_2 + \lambda_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 = 2(x_2-2) + 2\mu_1 x_2 - \mu_3 + 2\lambda_1$$

$$x_1 + 2x_2 - 4 = 0$$

$$\mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0$$

$$\mu_2 x_1 = 0$$

$$\mu_3 x_2 = 0$$

$$\mu_1 \ge 0, \quad \mu_2 \ge 0, \quad \mu_3 \ge 0$$

이상의 비선형 방정식을 풀기 위하여 부등식 제한 조건식들의 경우에 따라 다음의 8가지로 구분하여 처리하면 편리하다. 부등식 제한조건식이 엄밀한 부등식이 되면, 즉 0이 아니면 그 부등식에 해당하는 Lagrange 승수는 0이 되어야 함을 이용한다.

경우	제한 조건	승수
1	$g_1=g_2=g_3=0$	
2	$g_1=g_2=0,\ g_3<0$	$\mu_3=0$
3	$g_1=g_3=0,\ g_2<0$	$\mu_2=0$
4	$g_2=g_3=0,\ g_1<0$	$\mu_1=0$
5	$g_1=0\ g_2<0,\ g_3<0$	$\mu_2=\mu_3=0$
6	$g_2=0\ g_1<0,\ g_3<0$	$\mu_1=\mu_3=0$
7	$g_3=0\ g_1<0,\ g_2<0$	$\mu_1=\mu_2=0$
8	$g_1<0,\ g_2<0,\ g_3<0$	$\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$

여기서 경우 1에서는 2개의 미지 변수 x_1, x_2가 $h_1=0$을 포함하여 4개의 방정식을 경우 2~4에서는 3개의 방정식을 만족시켜야 하므로 특수한 경우가 아니면 해가 존재할 수 없다. 본 문제에서는 이 특수한 경우가 아니므로 5~8을 검사하면 된다.

경우 5 : 이 경우 $g_1=0$, $h_1=0$을 풀면 답이 두개 나온다. 즉

해 1 : $x_1=-0.4$ $x_2=2.2$ $\mu_1=-8.75$

해 2 : $x_1=2$ $x_2=1$ $\mu_1=0.25$

이들에 대해서 μ_1을 구 할 수 있다. 같은 방식으로 다음 각 경우도 구하면,

경우 6 :

$x_1=0$ $x_2=2$ $\lambda_2=-6$

경우 7 :

$x_1=4$ $x_2=0$ $\lambda_3=-8$

경우 8 :

$x_1=2.4$ $x_2=0.8$

여기서 경우 5의 해 1과 경우 6, 7은 승수의 부호가 음이므로 해가 될 수 없다.

또한, 경우 8은 부등제한 조건식을 만족치 못하므로 가능한해는 경우 5의 해 2이다. 위에서 언급한대로 충분조건을 검토해 본다거나 또는 시찰에 의하여 보면 이 가능해가 본문제의 해입을 알 수 있다. 이때 목적함수의 값은 2이다.

3.2. 열 교환기의 설계문제[2]

총 길이 100m의 튜우브와 셸로 이루어진 그

림과 같은 열교환기를 필요한 열전달 면적을 얻으면서 설치비를 최소화 하도록 설계하고자 한다. 총설치비는 다음과 같다(단위 : 달러)

1. 튜우브의 비용—$900
2. 셀의 비용—$1100D^{2.5}L$
3. 열교환기에 의하여 점유된 면적의 비용—$320DL$

여기서 L은 열교환기의 길이이며 D는 셀의 직경이며 단위는 m이다. 또한 튜우브간의 단면적 1m² 에 200개가 들어가도록 설계하려할 때 열 교환기의 직경 D와 길이 L을 구하는 문제를 생각하자.

설치 비용을 목적함수로 생각하면 다음과 같다.

$$\text{비용}=900+1100D^{2.5}L+320DL$$

튜우브의 총 길이가 100m이어야 할 제한 조건은 다음과 같이 표시된다.

$$\left(\frac{\pi D^2}{4}\text{m}^2\right)(L,\text{m})\ (200\ \text{튜우브}/\text{m}^2)=100\text{m}$$

즉 $50\pi D^2L=100$

이상의 문제에 대한 Kuhn-Tucker 필요 조건은 다음과 같다.

$$2750D^{1.5}L+320\,L+\lambda 100\,\pi DL=0$$

$$1100D^{2.5}+320\,D+\lambda\ 50\,\pi D^2=0$$

$$50\,\pi D^2L=100$$

이상의 3개의 연립 방정식을 풀면 다음과 같다.

$D=0.7$ m

$L=1.3$ m

$\lambda=8.78$

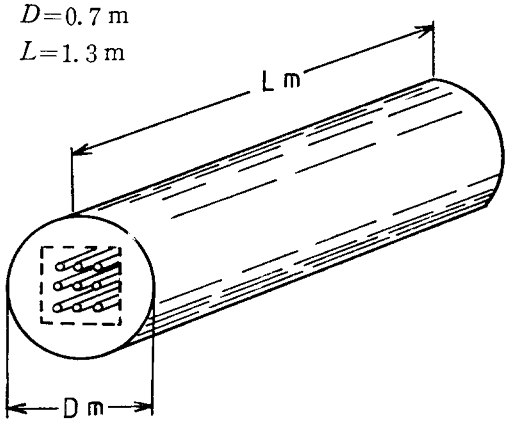

그림 3 예제 3.2의 열교환기

그러므로 이때

최소 설치비 $=\$1777.45$

로 얻어진다.

3.3. 코일스프링의 설계문제

지난 강좌의 1.2절에서 예시한 코일스프링을 생각한다. 목적 함수는

$$\phi_0=\frac{\pi^2\rho gQ}{4}Dd^2+\frac{\pi^2\rho gE\,\theta}{14680\,M}d^6 \qquad (21)$$

이며 제한 조건식은 다음과 같다.

$$\phi_1=\frac{14.5\,M}{d^{2.885}D^{0.115}}-\sigma_{\max}\leq 0 \qquad (22)$$

$$\phi_2=-d\leq 0 \qquad (23)$$

$$\phi_3=-D\leq 0 \qquad (24)$$

이상의 비틀림 스프링 문제를 검토해 보면, 만약 d와 D의 하나만 0이어도 첫번째 제한조건식 (22)는 만족될 수 없음을 주시하여야 할 것이다. 그러므로 단지 첫번째 제한 조건식만 고려하면 된다.

답에서 만족하여야 조건, 즉 Kuhn-Tucker 필요조건은 다음과 같다.

$$\frac{2\pi^2\rho gQ}{4}Dd+6\frac{\pi^2\rho gE\,\theta}{14680\,M}d^5-\mu 2.885$$

$$\frac{14.5\,M}{d^{3.885}D^{0.115}}=0 \qquad (3\text{-}1)$$

$$\frac{\pi^2\rho gQ}{4}d^2-\mu\ 0.115\frac{14.5\,M}{d^{2.885}D^{1.116}}=0 \qquad (3\text{-}2)$$

$$\mu\left(\frac{14.5\,\mu}{d^{2.885}D^{0.115}}-\sigma_{\max}\right)=0 \qquad (3\text{-}3)$$

$$\mu\geq 0 \qquad (3\text{-}4)$$

세번째식에서 $\mu=0$인 경우와 $\phi_1=0$인 경우로 나누어 생각한다. 만약 $\mu=0$이면 $d=0$이 되어 이는 식 (22)를 만족시키지 못한다. 그러므로 $\phi_1=0$이 되어 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$d^{2.885}D^{0.115}=\frac{14.5\,M}{\sigma_{\max}} \qquad (3\text{-}5)$$

식 (3-1), (3-2), 로부터

$$D=7,081\times 10^{-5}\frac{E\theta}{MQ}d^4$$

$$d=\left(\frac{43.517\,M}{\sigma_{\max}}\right)^{0.299}\left(\frac{MQ}{E\theta}\right)^{0.3438}$$

이며, 식(3-2)로부터 $\mu\geq 0$이므로 이는 Kuhn-

Tucker 필요조건의 가능해이다.

수치예로서 $E=2\times10^{11}$ Pa, $\sigma_{max}=1.5\times10^{8}$Pa,

$\theta=20°$

$Q=2$ 회전, $M=0.3N\cdot$m

$\rho g=7.7\times10^{4}N/\mathrm{m}^3$ 라면

$d=2.806$ mm

$D=29.43$ mm

$\mu=5.08\times10^{-8}$

이며 스프링의 최소 무게는 다음과 같다.

$W_{min}=0.4254\,N$

3.4. 튜우브형 기둥의 무게 최소화[3]

그림 4에서와 같이 튜우브형 단면을 가진 기둥이 주어진 하중 p를 지지하도록 설계하고자 한다. 문제는 응력 제한 조건과 Euler의 국부

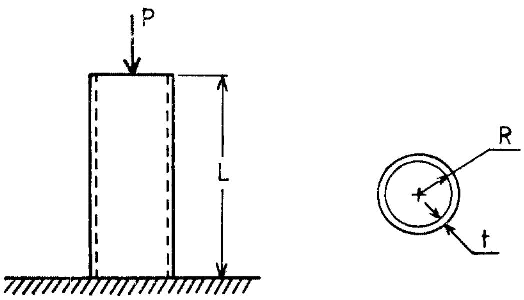

그림 4 예제 3.4 기둥의 설계변수

좌굴 조건을 만족시키면서 기둥의 무게를 최소화 하는 R과 t를 결정하는 것이다. 이 문제에서 t가 R에 비하여 작다고 생각하면 단면적 A와 관성 모우멘트 I는 다음과 같다.

$$A=2\pi Rt \tag{3-6}$$

$$I=\pi R^3t \tag{3-7}$$

그러므로 기둥의 무게 f는 다음과 같다.

$$f\equiv2\rho gL\pi Rt \tag{3-8}$$

여기서 ρ는 재료의 밀도를 뜻한다.

이 기둥의 Euler 좌굴 하중 P_{cr}과 응력 σ는 다음과 같다.

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{4L^2}=\frac{\pi^3ER^3t}{4L^2} \tag{3-9}$$

$$\sigma=P/A=\frac{P}{2\pi Rt} \tag{3-10}$$

구조적 성능 제한 조건은 $P\leq P_{cr}$이므로

$$g_1=P-\frac{\pi^3ER^3t}{4L^2}\leq0 \tag{3-11}$$

이며 $\sigma\leq\sigma_y$ 이므로

$$g_2=\frac{P}{2\pi Rt}-\sigma_y\leq0 \tag{3-12}$$

이다. 여기서 σ_y는 재료의 항복 응력이다.

참고 문헌(4)에 의하면 튜우브형 셸의 임계 좌굴응력 σ_{cr}은

$$\sigma_{cr}=\frac{KEt}{R} \tag{3-13}$$

이므로 국부좌굴 제한 조건은

$$g_3=P-2\pi KEt^2\leq0 \tag{3-14}$$

이다. 여기서 K는 비례 상수이며 강철의 경우 약 0.6이다.

이상의 최적 설계 문제는 제한 조건식(3-11), (3-12), (3-14)를 만족하면서 목적 함수 (3-8)을 최소화시키는 R과 t를 구하는 문제가 된다.

이 문제의 Lagrange 함수 L은

$$L=2\rho gL\pi Rt+\lambda_1\left[P-\frac{\pi^3ER^3t}{4L^2}\right]+\lambda_2\left[\frac{P}{2\pi Rt}-\sigma_y\right]+\lambda_3(P-2\pi KEt^2) \tag{3-15}$$

이다. 여기서 λ는 승수이다.

Kuhn-Tucker 필요 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial R}=0=2\rho gL\pi t-\mu_1\frac{3\pi^3ER^2t}{4L^2}-\frac{\mu_2P}{2\pi R^2t} \tag{3-16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0=2\rho gL\pi R-\mu_1\frac{\pi^3ER^3}{4L^2}-\mu_2\frac{P}{2\pi Rt^2}-\mu_34\pi KEt \tag{3-17}$$

$$\mu_1\left(P-\frac{\pi^2ER^3t}{4L^2}\right)=0 \tag{3-18}$$

$$\mu_2\left(\frac{P}{2\pi Rt}-\sigma_y\right)=0 \tag{3-19}$$

$$\mu_3(P-2\pi KEt^2)=0 \tag{3-20}$$

$$\mu_1,\mu_2,\mu_3\geq0$$

이들은 미지의 변수가 R,t,μ_1,μ_2,μ_3인 연립 비선형 방정식이 된다. 이상의 제한 조건식을 취급하는 가장 간편한 방법은 앞의예에서와 같이 식 (3-18), (3-19), (3-20)의 항등식에서 가능한

후보해를 형성하는 것이다.

경우	제한조건	급수
1	$g_1=g_2=g_3=0$	
2	$g_1=g_2=0,\ g_3<0$	$\mu_3=0$
3	$g_1=g_3=0,\ g_2<0$	$\mu_2=0$
4	$g_1=0\ g_2<0,\ g_3<0$	$\mu_2=\mu_3=0$
5	$g_1<0\ g_2=g_3=0$	$\mu_1=0$
6	$g_1<0,\ g_2=0\ g_3<0$	$\mu_1=\mu_3=0$
7	$g_1<0\ g_2<0\ g_3=0$	$\mu_1=\mu_2=0$
8	$g_1<0\ g_2<0\ g_3<0$	$\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$

이상의 8가지 경우를 검정하여 보면 우선 경우 1에서는 미지수 R,t가 3개의 방정식을 만족하여야 하므로 특수한 경우(이경우는 다른 경우와 해가 같아짐)가 아니면 해가 존재하지 않는다. 또한 경우 7,8에서는 t와 R이 0이어야 하므로 이는 해가 아니다. 그런므로 경우2에서 경우 6까지를 분석하면 된다.

경우 2 :

$$\mu_1=0, \mu_2=\frac{4\,\rho g\pi^2R^2t^2L}{P}>0, R=\frac{2\,L}{\pi}$$

$$\left(\frac{2\,\sigma_y}{E}\right)^{1/2}t=\frac{P}{4L}\left(\frac{E}{2\sigma_y{}^3}\right)^{1/2}$$

여기서 급수 μ_1, μ_2가 모두 음이 아니므로 이는 허용해이다.

경우 3 :

$$\mu_1=\frac{8\,\rho gL^3}{3\pi^2ER^2}>0, \mu_3=\frac{\rho gLR}{3\,KEt}>0$$

$$R=\left(\frac{PK}{E}\right)^{1/6}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{5/6}L^{2/3}\ t=\left(\frac{P}{2\pi KE}\right)^{1/2}$$

경우 4 :

계산 결과식은 $\mu_1\left(\frac{\pi^3ER^2}{2\,L^2}\right)=0$이며 $\mu_1=0$이므로 허용해이다. 그러나 $R=t=0$이므로 이는 허용해가 될 수 없다.

경우 5 :

$$\mu_2=\frac{4\,\rho gL\,\pi^2R^2t^2}{P}>0 \quad \mu_3=0$$

$$R=\frac{1}{\sigma_y}\left(\frac{PKE}{2\,\pi}\right)^{1/2}, \quad t=\left(\frac{P}{2\,\pi KE}\right)^{1/2}$$

경우 6 :

이 경우에는 2개의 방정식이 같게 된므로 필요조건의 유일해는 존재하지 않는다. 즉

$$Rt=\frac{P}{2\,\pi\sigma_y},\ \ \mu_2=\frac{4\,\rho gL\,\pi^2R^2t^2}{P}>0$$

이는 $g_1<0$, $g_3<0$의 조건을 만족하는 어떠한 R과 t의 조합도 최적해의 후보가 될 수 있음을 뜻한다. 또한 목적 함수의 값은 이상의 모든 조합에 대하여도 항상 일정함을 알 수 있다.

특수한 경우 2와 경우 5도 $g_2=0$의 조건이 있으므로 이들의 목적함수도 경우 6과 같은 값을 가짐을 알 수 있다. 그러므로 경우 2와 경우 5는 경우 6의 특수한 경우임을 알 수 있다. 명확히 다른 경우는 3과6이고 따로 고려하여야 한다. 즉 경우3에서는 $g_2<0$이므로

$$Rt>\frac{P}{2\,\pi\sigma_y}$$

이며 목적 함수는 경우 2,5,6보다 큰 값을 가진다. 그러므로 만약 $g_2=0$, $g_1\leq0$, $g_3\leq0$을 만족하는 점이 있다면 이점들은 최적해가 되며, 무한히 많은 해가 될 가능성이 많다. 만약 이들 조건을 만족하는 점이 없다면 경우3이 최적해가 될 것이다. 다음과 같은 수치의 경우, 즉

$\sigma_Y=2.5\times10^8$ Pa

$E=2\times10^{11}$ Pa

$\rho g=80000\ N/\mathrm{m}^3$

$K=0.6$

$L=3.7$ m

$P=1.1\times10^5 N$

을 생각해보면 제한 조건식 g_1, g_2, g_3를 만족하는 허용영역(Feasible Region)은 그림 5와 같다. 이 예제에서 경우 3은 무한개의 허용해가 존재한다. 경우 2와 경우 5의 해는 경우 6에

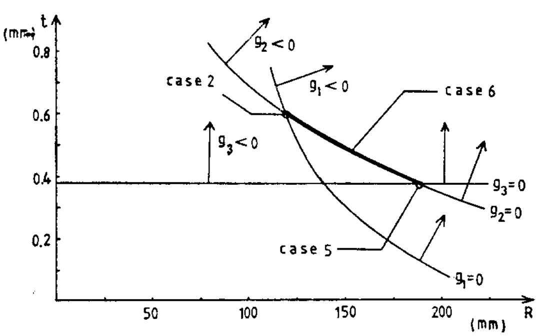

그림 5 예제 3.4 기둥의 최적해

서 얻어진 해의 특수한 경우임을 알 수 있다.

4. 필요조건의 의미

4.1. 필요조건의 기하학적 성질

2차원 문제의 경우로 우선 등식제한 조건이 1개 있는 경우를 예시해보면 그림 6과 같이 된다. 이에대한 Kuhn-Tucker 필요조건은

$$\nabla f(x_1, x_2)+\lambda\nabla h(x_1, x_2)=0 \qquad (4\text{-}1)$$

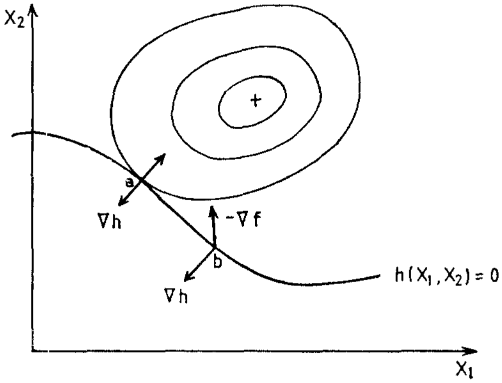

그림 6 등식제한 조건의 경우 필요조건의 도식화

으로 되고, 이는 다시 말해 ∇f와 ∇h가 평행(수학적으로 선형종속이됨)이 되는 상태를 나타낸다.

즉 그림 6에서 점 b에서는 ∇h와 ∇f가 평행이 아님으로 $h(x_1, x_2)=0$을 따라 a점쪽으로 이동하게 되면 f가 줄어들게 됨을 알 수 있고 그러므로 b점은 극소점이 될 수 없는 것이다. 한편 극소점인 a에서는 ∇h와 ∇f가 평행이므로 $h(x_1, x_2)=0$을 만족시키면서 양쪽 어느 쪽으로 진행하드라도 목적함수 f를 더 줄어들게 할 수 없다. 다시말해서 식(4-1)은 a가 극소점이면 만족해야할 필요조건임을 알 수 있다. 이 문제에서는 Lagrange 승수 의 부호에는 제한이 없음도 알 수 있고 이와같은 경우는 다차원 다수의 제한조건식의 문제에도 그대로 맞는 말로 심적 그림을 그려 볼 수 있을 것이다.

다음에는 부등식제한 조건의 경우를 보자. 제한조건이 하나인 경우, Kuhn-Tucker의 필요조건은

$$\nabla f+\mu\nabla g=0 \qquad (4\text{-}2)$$

$$\mu g=0 \qquad (4\text{-}3)$$

$$\mu\geq 0 \qquad (4\text{-}4)$$

식 (4-3)은 $g=0$으로 되어 해가 제한영역의 경계에 있거나 $g<0$으로 내부에 있어 $\mu=0$이 되는 경우를 포함시키는 일반식을 나타내는 것이고(이를 Complementary Slackness Condition 이라함)내부에 극소점이 있는 경우는 국부적으로 제한조건이 없는 경우와 같으므로 여기서는 $g=0$으로 경계에 있는 경우를 기하학적으로 보고자 한다.

그림 7에서 보면 식 (4-2)는 앞의 등식 조건식의 경우와 마찬가지로 ∇f와 ∇g가 평행(서로 선형종속)임을 나타낸다. 그런데 앞의 경우와 다른 것은

Lagrange 승수 μ가 음수가 아니어야 한다는 것이다. 이것은 다시 말해 ∇f와 ∇g는 접선(Tangent Plane)에서 볼때 같은쪽이 아니어야 한다는 것이다. 만약 이들 벡터가 같은 쪽에 있으면 목적함수 f와 제한식 g가 같이 줄어드는 경우가 되어 f를 줄이려고 할경우 제한조건식 g를 생각안해도 $g<0$을 자동적으로 만족하게 한다는 것이다. 요약하면 부등식 조건의 경우는 만약 경계에서 극소점이 있게되려면 해당 Lagrange 승수는 $\mu\geq 0$ 조건이 더 필요하게 되는 것이다. 위에 언급한대로 내부에서 극소점이 있으면 $\mu=0$으로 역시 이조건이 만족하게 되는 것

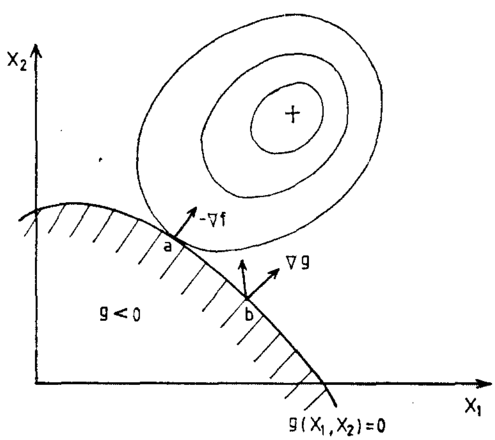

그림 7 부등식제한 조건의 경우 필요조건의 도식화

이다.

보다 일반적인 경우는 여러개의 등식과 또는 부등수제한 조건이 있을 경우로 위에 설명한 두 개념으로 상상할 수 있겠다. 독자는 제한조건식이 2개 또는 3개인 경우에 대해 2차원에서의 문제를 도식으로 그려보면 이해에 도움이 될 것이다.

4.2. Lagrange 승수의 의미

수학적 의미의 하나는 다음의 민감도에 관한 정리에서 볼 수 있다. 즉 일반적 비선형 계획법 문제

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{subject to} \quad & h(x)=c \\ & g(x)\leq d \end{aligned}$$

를 생각하자. 여기서 $c=0$, $d=0$일 경우에 대한 국부적인해(local solution)가 x^*이고 해당 Lagrange 승수가 $\mu\geq 0$와 λ라하면, 함수 f,g,h가 2차 미분까지 연속함수이고 제한조건식의 영역(feasible domain)이 비정상적인 경우(abnormal)가 아니면 0근처의 임의의 c,d값에 대해 연속인 국부해 $x(c,d)$가 있고,

$$\nabla_c f(x(c,d)|_{0,0}=-\lambda \qquad (4\text{-}5)$$

$$\nabla_d f(x(c,d)|_{0,0}=-\mu \qquad (4\text{-}6)$$

가 된다는 것이다. 여기서 ∇_c는 변수 c에 대한 미분을 취한 기호를 말한다.

이 정리를 개념적으로 설명하면 Lagrange승수는 등식 조건식의 수준(c의 값)을 0에서 부터 c로 바꿀때 목적함수 f의 최적치 즉 f_{opt}가 얼마나 민감하게 바뀌게 되는지를 나타내는 것이고, μ는 부등식 제한조건식의 수준을 0에서 d로 바꿀때 f_{opt}에 관한 민감도를 나타낸다. 2차원의 한 경우로 그림 8에서 보면,

$\mu\geq 0$이므로,

$$\frac{\partial f_{opt}}{\partial d}=-\mu\leq 0 \qquad (4\text{-}7)$$

이되어 부등제한 조건식의 수준을 0에서 d로 증가시키면 이에 따른 최적치는 감소하거나 적어도 증가하지 않는다는 것을 나타낸다. 이는 그림에서 보다시피 제한 영역이 커지게 되는 경

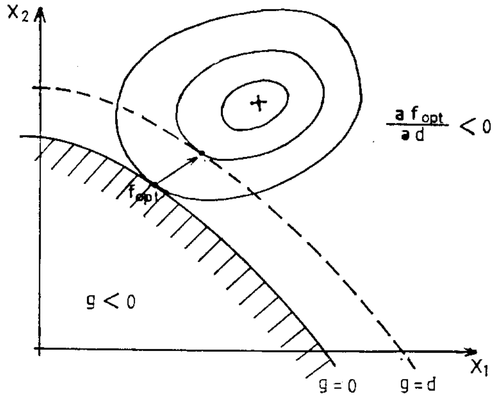

그림 8 부등식 제한조건에서의 민감도

우이므로 적어도 원래의 최적치 보다 나쁘지 않게됨을 알 수 있다.

Lagrange승수는 역학분야에서 여러가지 제한조건의 처리에서 많이 이용되고 동역학분야의 Lagrangian 또는 Hamiltonian등과 관련하여 만약 제한조건이 변위의 차원이면 이에 대한 승수는 힘의 차원을 가지게 되고 이 변위조건을 만족시키기 위한 제한력(constraint force)의 물리적 의미를 가진다. 다음강좌는 기초적인 최적화 이론의 소개를 하려고 한다.

사사: 본 강좌의 예제문제 준비를 위해 도와준 박상규군에게 감사를 표한다.

참 고 문 헌

1. 곽병만, "최적설계(I)", 대한기계학회지, Vol. 23, No.1, 1983.
2. Stoecker, W.F., *Design of Thermal Systems*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1980
3. Haug, E.J. and Arora, J.S., *Engineering Design Handbook, Computer-Aided Design of Mechanical Systems*, Vol. Ⅱ, DARCOMP 706-193, U.S. Army Materiel Command, Washington D.C., July 1977.
4. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961