韓國 軍事運營分析 學會誌
第 9 卷, 第 2 號, 1983, 12

심플렉스 기법의 복잡성에 관한 연구

(A Study on the Complexity of the Simplex Method)

정 성 진*

Abstract

We show that the complexity of Simplex Method for Linear Programming problem is equivalent to the complexity of finding just an adjacent basic feasible solution if exists.

Therefore a simplex type method which resolves degeneracy in polynomial time with respect to the size of the given linear programming problem can solve the general linear programming problem in polynomial steps.

I. 서 론

선형계획(linear programming) 문제들은 다음과 같이 표현될 수 있다.

최소화(minimize) cx

제약조건(subject to) : $Ax = b$

$x \geq 0$

위에서 $x \in R^n$, $c^T \in R^n$, $b \in R^m$, $A \in R^{m \times n}$ 이다.

이러한 선형계획문제를 효율적으로 푸는 기법은 1945년 Dantzig에 의해 개발된 심플렉스(simplex)기법이다. 이 기법은 가능해(feasible solution)들로 이루어진 볼록다면체(convex polyhedron)의 한 꼭지점(extreme point)에서 이 꼭지점에 근접된 꼭지점(adjacent extreme point)으로 움직이며, 목적함수를 최소화(또는 최대화)하는 꼭지점에 도달될 때까지 계속하여 꼭지점 사이를 움직이는 기법이다.

따라서 심플렉스 기법의 복잡성(complexity)은 최적점(optimal extreme point)에 도달할때 까지의 한 꼭지점에서 근접된 다른 꼭지점으로 움직이는 단계계산(pivot step)의 횟수와 이 단계계산을 결정하는 기본가능해(basic feasible solution)의 변수의 진입법칙(entering rule)과 소거법칙(dropping rule)에 의해 결정될 수 있다.

선형계획문제를 현재까지 발표된 진입법칙 및 소거법칙들을 이용한 심플렉스 기법으로 풀때, 최악의 경우에는 선형계획문제의 크기의

* 서울대학교 공과대학

지수함수 만큼의 계산과정이 필요하다[1,4]. 따라서 1979년도까지의 최대 관심과제는 선형계획문제가 과연 문제크기의 다항식의 계산단계 안에 풀릴 수 있는지의 여부이었다. 그러나 이 선형계획문제의 복잡성은 Khachian [5]이 "Ellipsoid" 기법(혹은 Khachian 기법, Shor-Khachian 기법)을 이용하여 선형계획문제가 문제크기의 다항식의 계산단계 안에 풀릴 수 있다고 증명함으로써 해결 되었다. Ellipsoid 기법의 이론적인 가치는 높이 평가되나, 실용적인 가치면에서는 현존 컴퓨터에의 적용한계나, 평균적으로 볼때 심플렉스 기법보다 대단히 많은 계산단계가 필요하다는 것이 발표되었다[3].

따라서, 이 논문은 선형계획의 가장 효율적이라고 간주되는 심플렉스 기법의 복잡성의 보틀넥(bottle neck)이 무엇인지를 규명하려 한다.

Ⅱ. 심플렉스 기법의 보틀넥

선형계획의 쌍대성(duality)을 이용하면, 선형계획의 최적화문제는 실행가능성(feasibility)의 여부를 규명하는 문제로 변화될 수 있으므로 다음의 문제를 고려한다.

$$Ax = b$$
$$x \geq 0 \qquad (1)$$

위에서, $A \in R^{m \times n}$, $x \in R^n$, $b \in R^n$, $b \neq o$이다.

집합 K 를

$$K = \{ x \in R^n \mid Ax = b, x \geq o \}$$

로 정의하자. 즉 K 는 (1)의 모든 가능해의 볼록집합이다.

(1)의 문제에 가상변수(artificial variable) t 를 더한 다음의 최적화 선형계획문제를 생각하자.

최소화 t

제약조건 $Ax + bt = b$

$$\begin{bmatrix} x \\ \cdots \\ t \end{bmatrix} \geq o, \quad \begin{bmatrix} x \\ \cdots \\ t \end{bmatrix} \in R^{n+1} \qquad (2)$$

또한 K′ 를

$$K' = \{ \begin{bmatrix} x \\ \cdots \\ t \end{bmatrix} \in R^{n+1} \mid Ax + bt = b,$$
$$\begin{bmatrix} x \\ \cdots \\ t \end{bmatrix} \geq o \}$$

로 정의하면, K′ 는 항상 문제(2)의 가능해 $(0, \cdots, 0, 1)^T$를 포함하고 있다. 또한 문제(1)의 모든 가능해 $\bar{x}$는 t를 0으로 한 $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$의 형태로 문제(2)의 가능해이다.

정리 1 :

문제(2)의 모든 기본가능해(basic feasible solution) $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \cdots \\ \bar{t} \end{bmatrix}$는,

(i) $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$이거나

(ii) $(0, 0, \cdots, 0, 1)^T$이다.

증명 : 문제(2)의 기본가능해의 기저(Basis)를 이루는 행렬을 B로 하면, 이 기저행렬의 열벡타(column rector)가 b 를 포함하는지 여부에 따라 $\bar{t}$는 0이거나 1이다.

문제(2)는 원 심플렉스기법(primal simplex method)의 2단계기법(two phase method)의 1단계(phase Ⅰ)문제로도 간주될 수 있다. 임의의 일차독립인 행렬 B를 구하고, B^{-1}. b 를 계산한 후 $B^{-1}b$가 o 보다 같거나 크지 않으면 가상변수 t 를 진입변수(entering variable)로 선택하므로써 1단계의 초기 기본가능해 $(0, \cdots, 0, 1)^T$를 얻는다. 또한 문제(1)의 모든 가능해 $\bar{x}$는 $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$의 형태로 문제(2)의 최적해이다. 그러나, 이 방법은 $(0, \cdots, 0, 1)^T$가 극심한 퇴화 기본가능해(degenerate basic feasible solution)이므로, 효율적인 1단계 기법으로는 간주될 수 없다고 본다.

정리 2 :

만일 문제(2)의 $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$형태의 기본가능해가 존재하다면, 모든 $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$형태의 기본가능해는, $(0, \cdots, 0, 1)^T$와 k''에서 근접(adjacent)하다.

증명 : $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$과 $(0, \cdots, 0, 1)^T$, 두 기본가

능해들의 근접함을 보이기 위해서는, $A_{\cdot j}$ 를 행렬 A의 j 번째 열벡터로 하면,

(i) 집합 $\{\{A_{\cdot j} \mid \bar{x}_j > 0\}, \{b\}\}$ 가 일차종속(linear depeudency)이고

(ii) 이 집합의 한 열벡터가 존재해서 이 벡터를 제거하므로써 남은 집합이 일차독립(linear independency)임을 보여주면 된다.

행렬 B를 $\left[\begin{smallmatrix}\bar{x}\\0\end{smallmatrix}\right]$ 의 기저(basis)라 하고, 기본변수(basic variables)를 x_B 라 하면,

$$b = B\bar{x}_B$$

$$= \sum_{j \text{ 즉 } \bar{x}_j > 0} \bar{x}_j B_{\cdot j}$$

위에서 $B_{\cdot j}$는 B의 j번째 열벡터이다. 따라서 $\{\{A_{\cdot j} \mid \bar{x}_j > 0\}, \{b\}\}$는 일차종속아다. b를 제거하면 남은 벡터들은 기저행렬 B의 1차독립에 의해, B를 이루는 열벡터들의 부분집합은 1차독립이다.

정리(2)는 다음과 같은 기하학적인 사실을 말해주고 있다.

"현재 알고있는 기본가능해는 K'상에서 최적해이거나, 최적해에서 단지 한 정변(edge)위에 떨어져 있다."

위의 기술은 다음의 정리를 의미한다.

보조정리 3 :

임의의 선형계획문제에서 $\bar{x}$를 주어진 기본가능해라 하고 B를 $\bar{x}$의 기저행렬이라고 하자. 만일 심플렉스기법이 다음의 두문제, 즉,

(i) $\bar{x}$ 의 최적해 여부를 결정하는 문제,

(ii) $\bar{x}$의 근접된 임의의 다른 기본가능해를 찾는 문제

중의 임의의 문제를 주어진 문제의 크기의 다항식의 계산단계로 풀 수 있다면 심플렉스기법은 선형계획을 문제의 크기의 다항식의 계산단계로 풀 수 있다.

증명 : 문제(2)에서 $(0, \cdots, 0, 1)^T$의 최적해 여부는 문제(1)의 실행가능성 여부이다. 임의의 선형계획문제는 쌍대성을 이용하면 실행가능성문제로 변환되며, 변환된 문제의 크기는 원문제크기의 다항식이다.

또한, 정리2에 의해서 $(0, \cdots, 0, 1)^T$는 문제(2)의 기본가능해(만일 존재한다면)과 근접함으로 임의의 다른 기본가능해를 찾는 것은 문제(1)의 실행가능성 여부를 규명한다.

정리3에서, 유의할 점은 $\bar{x}$의 기저를 이루는 B의 최적기저(optimal basis) 인지의 여부는 단지 $\bar{c} = c - c_B B^{-1} A$ 의 계산만으로 충분하다. 따라서 $\bar{x}$는 최적기본해이나 B는 최적기저가 아닐수도 있다. 만일 $\bar{x}$가 비퇴화 기본가능해(nondegenerate basic feasible solution)라면 정리(3)의 문제(i)과 문제(ii)는 심플렉스기법의 한 계산단계(pivot step)만으로 규명된다.

따라서 $\bar{x}$가 퇴화 기본가능해일 경우의 보조정리 3의 문제(i)과 문제(ii)는 결국 퇴화현상의 다항식의 계산단계 안의 탈피와 동등하다.

Ⅲ. 결 론

본 논문에서는 심플렉스기법의 복잡성은 퇴화된 상태의 기본가능해에서 다른 기본가능해로 옮아가는 계산단계와 동등함을 증명하였고, 따라서 퇴화현상의 탈피가 심플렉스기법의 복잡성의 보틀넥임을 보여주었다.

현존하는 모든 진입법칙과 소거법칙들은 순환(cycling)하거나, 순환을 배제한 법칙들도 정체(stalling)현상—순환(cycling)하지는 않으나 문제의 크기의 다항식의 계산단계 안에는 퇴화를 벗어나지 못하는 현상—을 가지고 있다.

일반적인 선형계획문제에는 적용되지 못하나 네트워크(network)문제에 있어서는 "strongly feasible spanning tree"를 유지한 진입·소거법칙으로, 퇴화현상을 다항식의 계산단계 안에 탈피할 수 있음이 Cunningham에 의해 발표되었다[2]. 따라서 선형계

획문제는 Khachiyan의 기법에 의해, 이론적으로 다항식의 계산단계 안에 풀릴 수 있으면서, 가장 효율적이라고 간주되는 심플렉스 기법은 아직도 다항식의 계산단계를 가진 진입 · 소거법칙의 발견을 open question으로 남겨두고 있다.

참 고 문 헌

1. Bland, R.G., "New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method", Math. of O.R., 2(2), May 1977.
2. Cunningham, W.H., "Theoretical Properties of the Network Simplex Method", Carleton Mathematical Series No. 148, Aug. 1977.
3. Dantzig, G.B., "Comments on Khachian's Algorithm for Linear Programming", Technical Report, SOL 79-22, Dept. of Operations Research, Stanford Univ., 1979.
4. Klee, V. and Minty, G.I., "How Good is the Simplex Algorithm?" in: O. Shisha, ed., Inequalities III, Academic Press, New York, 1972.
5. Khachiyan, L.G., "A Polynomial Algorithm in Linear Programming", Soviet Mathematic Doklady, No. 1, 20, 1979.