韓國軍事運營分析學會誌
第 9 卷, 第 2 號, 1983. 12

와이벌分布를 갖는 順位設計量의 尤度函数
(Likelihood Function of Order Stat istic with a Weibull Distribution)

서 남 수*

Abstract

In this paper, we derive the likelihood function for the independent random order statistic whose underlying lifetime distribution is a two parameter Weibull form. For this purpose we first discuss the order statistic which represent a characteristic feature of most life and fatigue tests that they give rise to ordered observations. And, we describe the properties of the underlying Weibull model.

The derived likelihood function is essential for establishing the statistical life test plans in the case of Weibull distribution using a likelihood ratio method.

I. 서 론

尤度函數(likelihood function)는 통계학에서 假說檢定(hypothesis test)을 위하여서는 매우 중요한 부분을 차지하며, 특히, 통계적壽命檢定計劃(statistical life test plans) 수립을 위하여는 거의 필수적이다.

본 논문은 해당 제품 또는 품목의 수명분포가 두 母數 와이발 (two parameter Weibull)인 경우의 평균수명에 대한 통계적수명검정계획 마련을 염두에 두고, 이를 위하여 반드시 필요로 하는 尤度函數 유도에 역점을 두고 있다. 널리 사용되어지고 있는 *MIL-STD-781 C*의 수명검정계획은 해당 수명분포가 指數型分布인 경우이며, 이는 제품이나 품목의 기능실패율(failure rate) 이 시간의 흐름에 관계없이 一定하다는 가정을 근거로 하고 있으며, 많은 수명들의 분포에 대하여 상당한 接近이 논증되어 왔다. 그러나 지수형분포 경우의 가장 큰 단점은 거의 정확하게 해당 분포가 지수형이 아닌 경우, 이 계획을 사용하면 놀랄만하게 그 계획의 표본추출속성을 변경시킬 수 있다는것이다.(1) 따라서 이러한 계획들은 해당 수명분포가 지수형이라는 강한 이론적 혹은 경험적 확실성이 결여하면 사용해서는 안 된다.

사실상, 많은 경우 악화나 마손에 의해 기능실패율이 증가하며, 기능실패율이 감소, 일

* 육군사관학교

(1) Zelen, M. and Mary, C.D., "The Robustness of Life Testing Procedures Derived from the Exponential Distributinn", Technometrics, Vol.3, 1961, pp.29 ~ 49.

정, 증가하는 경우들의 모두를 포함하는 와이벌분포는 최근에 기능실패분포로써 가장 인기를 끌게 되었지만, 이 모형을 가정한 수명검정계획은 이 모형이 갖는 복잡성 때문에 연구가 충분하지 못하다.

따라서, 본 연구는 수명분포가 와이벌인 경우 수명검정계획 수립에 필요한 尤度函數 유도를 위하여, 먼저 문제영역으로써 順位統計量(order statistics)를 토의하고 와이벌분포의 속성을 묘사한 뒤 이론적 접근으로서 우선 표본의 크기가 상당히 크다는 가정하에 尤度比檢定(likelihood ratio test)를 적용시 필수적인 獨立偶然順位統計量(independent random order statistics)에 대한 尤度函數를 유도 하기도 한다.

Ⅱ. 順位統計量

본 연구에서는 實測値가 順位를 갖게되는 통계적 문제들을 대상으로 한다. 통상 偶然變量은 順位를 갖지 않는다. n 제품이 하나의 기계로부터 생산되었고그 제품의 특성의 하나로 길이를 측정하였다고 할 때, 만약에 그 기계로부터 생산된 첫 제품의 길이가 가장 짧고 그 다음 제품이 두번째로 짧고, ……, 마지막 제품의 길이가 가장 길다면 이는 오히려 비정상일 것이다. 그러나 수명검정에서는 이런 식의 資料가 실제로 존재한다. 이것은 대부분의 수명검정이 갖는 특징적인 현상이다. 예를 들면, n개의 비행기 부속품에 대한 수명검정을 할 경우 가장 약한 제품이 제일 먼저 기능을 상실하고 그 다음 약한 것이 두번째로 기능을 상실하게 될 것이며 가장 강한 것이 마지막으로 기능을 상실하게 될 것이다. 우리가 진공관이나, 보올 베어링 조립품, 전구, 바테리 등 각종 물질적인 장비의 수명이나 동물이나 인간에게 어떠한 치료를 행한후의 생명의 연장등 어느 것을 대상으로 하든지 당연히 그들의 수명자료들은 순위를 갖게 된다는 것은 명백하다.

이러한 상황들을 일반적인 용어로 서술하면, 한 母集團으로 부터 無作爲로 추출된 n 종목에 대하여 실험을 통하여 얻은 수명자료들은 가장 적은 실측치가 첫째, 그 다음으로 적은 것이 두번째, ……, 마지막으로 가장 큰 것의 順으로 가용하게 된다. 이러한 수명실험은 n개의 전 품목이 기능을 상실하기 훨씬 전에 중단할 수 있다. 위와 같은 실험을 $r(\leq n)$번째 기능상실 시에 중단할 수도 있고(Type Ⅱ censoring), 사전에 예정된 시간, T에 중단할 수도 있다(Type Ⅰ censoring). 어떠한 경우이던 우리의 주 관심은 자료가 순위를 갖는다는 사실의 이점을 취함으로써 그렇지 못한 경우보다 짧은 시간내에 혹은 더 적은 실측치로써 결정에 도달하도록 실험을 할 수 있는 통계적 절차를 개발하는데 있다.

Ⅲ. 와이벌 分布

서론에서도 언급한 바와 같이 와이벌분포는 매우 유용한 수명모형으로 인정되고 있다.

본 연구에서는 位置母數(location parameter)가 零인 것으로 알고 있거나 자료의 적절한 變換으로 위치모수를 零으로 놓음으로써 두母數와이벌분포에 우리의 관심을 제한한다.

두모수와이벌분포를 갖는 偶然變量 X의 確率密度函數(probability density function)는 아래와 같다.

$$f_X(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] & ,\ x>0,\ \alpha>0,\ \beta>0\\ 0 & ,\ \text{elsewhere}\end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

여기서 X는 해당 종목의 수명의 실측치가

x가 되는 하나의 偶然變數이다. 特性수명(characteristic life)이라고 불리우는 母數 $\alpha > 0$ 는 X의 $100(1 - e^{-1}) \cong 63.2$ 분포 百分位數(percentile)을 지정하는 눈금母體(scale parameter)이다. 母數 $\beta > 0$ 는 분포의 형상을 결정한다. 만약 $\beta \leq 1$ 이면 密度函數는 X가 증가함에 따라 단조롭게 감소한다. 만약 $\beta < 1$ 혹은 $\beta = 1$ 이면 기능실패함수는 각각 감소 혹은 일정하다. 특히 $\beta = 1$ 인 경우 와이벌분포는 간단한 지수형분포가 된다. 즉 와이벌분포는 우리가 이미 익숙한 지수형분포를 포함한한다.

와이벌累績分布(Weibull cumulative distribution)는

$$F_X(x) = 1 - \exp[1 - (x/\alpha)^{\beta}], \quad x > 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

이며, 와이벌분포의 平均은

$$\mu = E(X) = \alpha(\Gamma(1 + 1/\beta) \quad \cdots\cdots (3)$$

이다. 여기서 $\Gamma(x)$ 는 감마함수(gamma function), 즉

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \quad \cdots\cdots (4)$$

이다.

검정목적이 수명분포의 평균치에 관계하고 있다면 基本母數에 平均母數가 포함되도록 再母數化(reparameterization) 함으로써 목적 달성이 용이해진다. 함수 $f_X(x; \alpha, \beta)$ 는 α를 $\mu/\Gamma(1 + 1/\beta)$로 대치함으로써 아래와 같이 함수 $f_X(x; \mu, \beta)$를 얻을 수 있다.

$$f_X(x;\mu,\beta) = \begin{cases} \beta\left[\dfrac{\Gamma(1+1/\beta)}{\mu}\right]^{\beta} x^{\beta-1} \cdot \\ \exp\left[-\left(\dfrac{\Gamma(1+1/\beta)\,x}{\mu}\right)^{\beta}\right] \\ \quad ,x > 0\ ;\ \mu, \beta > 0 \\ 0 \quad , \text{elsewhere} \end{cases} \quad \cdots\cdots (5)$$

IV. 獨立順位統計量의 尤度函數

실험을 통해서 얻은 와이벌분포 順位統計量을 이용하여 수명검정계획 마련을 위해서는 가설검정이 지수분포형의 경우와는 달리 歸無假說(null hypothesis)과 對立假說(alternative hypothesis) 모두 單純假說(simple hypothesis)이 아니다. 따라서, Neyman-Pearson Lemma(2)를 이용할 수 없으며 標本의 크기가 상당히 크다는 가정하에 尤度比檢定으로 접근 가능하며, 이의 접근을 위하여 사용되어지는 資料는 獨立偶然變數이어야 한다. 그러나 실험을 통해서 얻은 순위통계량은 從屬偶然變數이다.

주어진 從屬偶然順位壽命資料에 대하여 獨立槪念을 고려한 尤度函數을 유도해 내기 위하여 다음의 개념들을 도입한다.

$X_1, X_2 \cdots, X_n$ 은 원래의 獨立隅然變數들이다. $X_i^* = \min.[X_i, T]$ 로 정의하고 여기서 T는 零보다 큰 고정수이다. 따라서 X_1^*, $X_2^*, \cdots, X_n^*$ 들은 또한 독립우연변수들이다. 그들의 結合確率密度函數(joint probability density function) 는 아래와 같다.

$$f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i^*). \quad \cdots\cdots (6)$$

여기서 $f(x_i^*)$ 는 (5)식에 주어진 $f(x; \mu, \beta)$로 부터 유도해낼 수 있다.

다음의 개념들을 고려하면

$$\begin{aligned} P_r(X_i^* > y) &= P_r(X_i > y, T > y) \\ &= 0 \qquad , \text{if } y \geq T \\ &= \int_y^{\infty} f(x)\, dx, \text{if } 0 \leq y < T \\ &= 1 \qquad , \text{if } y < 0 \end{aligned} \quad \cdots\cdots (7)$$

따라서 X_i^*의 結合確率密度函數는

$$f^*(y) = \begin{cases} 0 & , \text{ if } y < 0 \text{ or } y \geq T \\ f(y) & , \text{ if } 0 \leq y < T \end{cases} \quad \cdots\cdots (8)$$

(2) Neyman-Pearson Lemma를 적용하려면 가설검정에서 귀무가설과 대립가설 모두가 단순가설이여야 한다.

그리고, (2) 식을 이용하여

$$P_r(X_i^* = T) = P_r(X_i \geqq T)$$

$$= 1 - F(T)$$

$$= 1 - \{1 - \exp(-[\frac{\Gamma(1+1/\beta)\, T}{\mu}]^{\beta})\}$$

$$= \exp\{-[\frac{\Gamma(1+1/\beta)\, T}{\mu}]^{\beta}\} \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

따라서,

$$f^*(y_i) = n(n-1)\cdots(n-k+1)\prod_{i=1}^{k} f(y_{(i)})\exp\{-(n-k)[\frac{\Gamma(1+1/\beta)\, T}{\mu}]^{\beta}\}$$

$$\text{for } 0 < y_{(1)} < \cdots < y_{(k)} < T = y_{(k+1)} = \cdots = y_{(n)} \in [0, T]$$

$$= 0 \quad , \text{ elsswhere} \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

여기서 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 들은 $X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*$ 의 실측치들이며 $y_{(1)}, y_{(2)}, \cdots, y_{(n)}$ 들은 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 들을 순위를 갖도록 취한 값들이다. 그러므로 $X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*$ 의 尤度函數는

$$L_T(\mu, \beta) = \prod_{i=1}^{n} f^*(y_i)$$

$$= n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)\beta^k [\frac{\Gamma(1+1/\beta)}{\mu}]^{k\beta} \cdot \exp\{-(n-k)\cdot[\frac{\Gamma(1+1/\beta)\, T}{\mu}]^{\beta} - \sum_{i=1}^{k}[\frac{\Gamma(1+1/\beta)\, y_{(i)}}{\mu}]^{\beta}\} \cdot \prod_{i=1}^{k} y_{(i)}^{\beta-1}$$

$$\text{for } 0 < y_{(1)} \leq \cdots \leq y_{(k)} \leq T = y_{(k+1)} = \cdots = y_{(n)}$$

여기서 $y_{(1)}, y_{(2)}, \cdots, y_{(k)}$ 들은 사전에 명시한 값 T보다 적은 X_i 들에 대한 순위를 갖게 취한 값들이다. r번째 기능실패시간, $X_{(r)}$ 로 표시한 尤度函數, $L_{X(r)}(\mu, \beta)$ 는 T와 k를 $x_{(r)}$과 $(r-1)$로 대치함으로서 $L_T(\mu, \beta)$로 부터 얻어질 수 있다. 물론 여기서 $y_{(1)} = x_{(1)}, y_{(2)} = x_{(2)}, \cdots, y_{(r-1)} = x_{(r-1)}$ 이다. 즉,

$$L_{X(r)}(\mu, \beta) = n(n-1)\cdots(n-\gamma+2)\beta^{r-1}[\frac{\Gamma(1+1/\beta)}{\mu}]^{\beta(r-1)} \cdot \exp\{-(n-\gamma+1)\cdot[\frac{\Gamma(1+1/\beta)\, x_{(r)}}{\mu}]^{\beta} - \sum_{i=1}^{r-1}[\frac{\Gamma(1+1/\beta)\, x_{(i)}}{\mu}]^{\beta}\} \cdot \prod_{i=1}^{r-1} x_{(i)}^{\beta-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

V. 결 론

신뢰도나 수명검정계획은 주로 각종 국영산업 및 국방조직체를 중심으로 연구를 주도해왔다. 수명검정계획 수립에 있어 와이벌분포는 중요한 위치로 대두되었음에도불구하고 분포 자체가 갖는 복잡성으로 인하여 철저한 연구가 미흡한 상태이다.

본 연구에서 수명실험으로 얻어지는 종속순위통계량을 독립우연변수로 고려하여 유도한 수명분포가 와이발인 경우의 尤度函數는 수명검정계획 마련에 있어 尤度比檢定 접근에 필수적이며, 이를 이용하여 MIL-STD -781C의 지수형분포 경우와 같이 실제 사용에 아주 유용한 와이벌분포 경우의 수정검정계획 마련에 기초가 될 것이다.

參 考 文 獻

1. 韓惠植, 洪富吉, 統計學演習 (用語와 例題), 法文社, 1973
2. Bain, L.J., "Inferences Based on Censored Sampling from the Weibull or Extreme-Value Distribution", Technometrics, Vol. 14, 1972, pp.693-702.
3. Bain, L.J., Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models, Marcel Dekker, New York, 1978.
4. Barlow, R.E., Proschan, F., Statistical Theory of Reliability and Life Testing Probability Models, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.
5. Bryant, C.M., Schmee, J., "Confidence Limits on MTBF for Sequential Test Plans of MIL-STD 781", Technometrics, Vol. 21, 1979, pp.33-38.
6. Butler, D.A., Lieberman, G.T., "An Early-Accept Modification to the Test Plans of Military Standard 781C", Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 28, 1981, pp.221-229.
7. Engelhardt, M., "On Simple Estimation of the Parameters of the Weibull or Extreme-Value Distribution", Technometrics, Vol. 17, 1975, pp.369-374.
8. Epstein, B., Sobel, M., "Life Testing", Journal of American Statistical Association, Vol. 48, 1953, pp.486-502.
9. Epstein, B., "Truncated Life Tests in the Exponential Case", Annals of Mathematical Statistics, Vol. 25, 1954, pp.555-564.
10. Epstein, B., "Statistical Life Test Acceptance Procedures", Technometrics, Vol. 2, 1960, pp.435-446.
11. Freund, J.E., Mathematical Statistics, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1980.
12. Gnedenko, B.W., Bielajev, J.K., Soloview, A.D., Mathematical Methods of Reliability Theory of Reliability Theory, Academic Press, London, 1970.
13. Harter, H.L., Moore, A.H., "An Evaluation of Exponential and Weibull Test Plans", IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-25, 1976, pp.100-109.
14. Hjorth, U., "A Reliability Distribution with Increasing/Decreasing, Constant and Bathtab-Shaped Failure Rates", Technometrics, Vol. 22, 1980, pp.99-107.
15. Lawless, J.F., Statistical Models and Methods for Life Time Data, John Wiley and Sons, New York, 1982.
16. Lomnicki, Z.A., "Some Aspects of the Statistical Approach to Reliability", J.R. Statist. Soc. A, Vol. 136, 1973, pp.395-419.
17. Mann, N.R., Schfer, R.E., Singpurwalla, N.D., Methods of Statistical Analysis of Reliability and Life Data, John Wiley and Sons, New York, 1974.
18. Military Standard Reliability Design Qualification and Production Acceptance Tests: Exponential Distribution, MIL-STD 781C, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1977.
19. Nelson, W., Applied Life Data Analysis, John Wiley & Sons, N.Y., 1982.
20. Stuart, A., Kendall, M.G., The Advanced Theory of Statistics, Hafner Publishing Company, N.Y., 1960.
21. Wald, A., "Tests of Statistical Hypotheses Concerning Several Parameters when the Number of Observations is Large", Transactions of American Mathematics Society, Vol. 54, 1943, pp.426-482.
22. Wilks, S.S., "The Large-Sample Distribution of the Likelihood Ratio for Testing Composite Hypotheses", Annals of Mathematical Statistics, Vol. 9, 1938, pp.60-62.
23. Zelen, M., Mary, C.D., "The Robustness of Life Testing Procedures Deriveel from the Exponential Distribution", Technometrics, Vol. 3, 1961, pp.29-49.