Journal of the KSQC
Vol. 10, No.2, 1982

Monte-Carlo Simulation方法에 의한 복잡한 System의 信賴性과 平均壽命 推定

(Estimation of a Cyclic or Acyclic Network System Reliability and MTTF by the Monte-Carlo Simulation Method)

李 昌 鎬*

ABSTRACT

This paper estimates the reliability & mean time to failure (MTTF) of a cyclic or acyclic network system by the Monte-Carlo simulation method. Estimates of MTTF and Reliability become difficult as the complexity of a system increases.

The method in this paper finds all simple paths from the given network, and then simulates the reliability of the required time and MTTF by using these paths. Life-times of the components in a network follow some probability distributions (Exponential, Weibull, Normal, Lognormal, etc.).

The method, written in Level II, Basic Language, is validated for some simple examples and then estimates the reliability and MTTF of some cyclic network system.

I. 서　　론

지금까지 복잡한 System 에 대한 신뢰성(Reliability) 과 평균수명 (MTTF) 의 계산에는 많은 연구가 발표되고 있다. 간단하게는 직렬 · 병렬구조의 정확한 신뢰성계산, 그러나 직 · 병렬 구조로 可略化될 수 있는 System의 신뢰성계산〔1〕, 그러한 직 · 병렬 구조로 可略化될 수 없는 System에 까지 널리 대상이 되어왔다. 그러나 복잡한 非可略 Network System의 신뢰성이나 평균수명에 대해서는 일반적인 해가 나와있지 못한 실정이다. 10 여개 이내의 구성부품 (Component ; node 또 branch 로 표시) 을 갖는 System 이라면 지금까지 개발된 경로추적법 (Path or Cut — tracing method) 〔2〕〔3〕〔4〕〔5〕〔6〕, 사상공간법 (Event space method)〔7〕〔8〕, 분해법 (Decomposition

* 仁荷大學校 工科大學 産業工學科 專任講師

method)[9]등을 이용할 수 있다. 이상의 방법을 사용하면 정확한 답, 또는 비교적 근사한 답을 얻어낼 수 있다는 장점은 있으나, node의 수가 많아질 때에는 계산시간이 기하급수적으로 증가하거나 계산이 불가능하여 진다.

이러한 결점을 보완하며, 비교적 최적해에 가까운 해를 손쉽게 얻기 위해서 최근에는 신뢰성이나 평균수명의 계산에 Monte-Carlo Simulation 방법이 점차로 많이 사용되고 있다[8][10][11][12].

이에 본 연구에서도 Monte-Carlo Simulation 방법을 이용해 Acychic network system은 물론Acyclic network system의 신뢰성과 평균수명을 추정하려 한다. 이에 대한 연구로서는 Kamat and Riley[8]가 시도한 바 있으나 Acyclic network system의 신뢰성 추정에 대해서만 연구 대상이 되었다.

본 연구는 다음의 2과정으로 이루어진다.

첫째, 주어진 Network System에서 Input node(또는 Input branch)와 Out put node (또는 Output Branch)사이의 모든 가능한 단순경로(Simple Path)를 찾는다. 이 때에는 Node 중심의 Nedework System(Activity on Node; AON 표시)과 Branch 중심의 Network System(Activity on Branch; AOB 표시)을 모두 이용할 수 있게 하였다.

둘째, 모든 단순경로에 대해서 Monte-Carlo Simulation 방법을 적용하여 신뢰성과 평균수명을 추정한다.

이러한 Network System에 대한 본 연구에 있어서의 가정은 다음과 같다.

i) System 내의 모든 구성요소의 수명분포는 연속형 분포를 따른다.

ii) System의 모든 구성요소는 상호독립이어서 하나의 고장이 다른 요소에 영향을 주지 않는다.

iii) 고장난 구성요소의 수리에 대해서는 고려하지 않는다.

iv) 입력 node와 출력 node의 수에는 제한 없다.

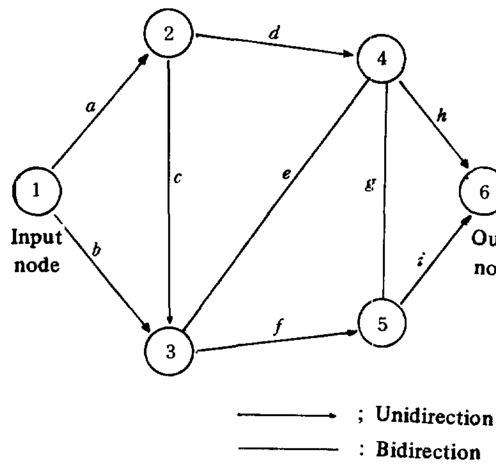
v) 단순경로수색(Simple path search)에는 AON 표시와 AOB 표시를 사용할 수 있다.

II. 단순경로(Simple Path)

Network System의 신뢰성과 평균수명을 추정하기 위해서 우선 Input node와 Output node 사이의 모든 단순경로를 찾아야 한다.

단순경로(Simple Path)란 Input node와 Output node를 연결하는 一連의 node의 집합이되 같은 node를 2회이상 반복하지 않는 경로를 말한다. Network System에서 모든 단순경로가 찾아지면 그 단순경로들 중에서 한개만이라도 고장나지 않는다면 System은 작동하게 된다.

Acyclic network system에 대한 단순경로를 찾는 방법에 대해서는 여러 연구가 발표되고 있다[2][13]. 또한, Cyclic network system에 대한 단순경로를 찾는 연구도 많이 되어오고 있다[14]. 본 연구에서는 [2]에서의 acyclic network system에 대한 단순경로 수색법을 cyclic network system에로 확장시켜서 사용하였다. 그리고 수색방법을 AON system과 AOB system에 모두 적용시킬 수 있게 2방법으로 개발하였다.



[Fig 1] A CYCLIC NETWORK SYSTEM

두 방법을 [그림 1]을 사용하여 설명하면 다음과 같다. 단, 본 연구에서는 [그림 3]과 [그림 4]의 간단한 acyclic network System 에서는 AON system 법을, [그림 1]과 [그림 5]와 같은 복잡한 acyclic system 이나 cyclic network system에 대해서는 AOB system법을 적용하여 모든 단순경로를 수색했다.

i) Output node 에서 시작해서 逆으로 Input node 쪽으로 진행시킨다. 이때, AON system 법에서는 node 가 component 를 나타내고 AOB system 법에서는 node 와 node를 연결하는 Branch 가 component 를 나타낸다.

ii) 각 node 에 도착됐을 때는 그 node 로 들어오는 모든 경우에 대해서 각각 별개의 단순경로를 형성한다.

iii) 단순경로에는 같은 node 가 2 회이상 반복될 수 없다.

이상에 의해서 [그림 1]에 대한 단순경로를 찾아보면 [그림 2]와 같다.

Ⅲ. 신뢰성과 평균수명

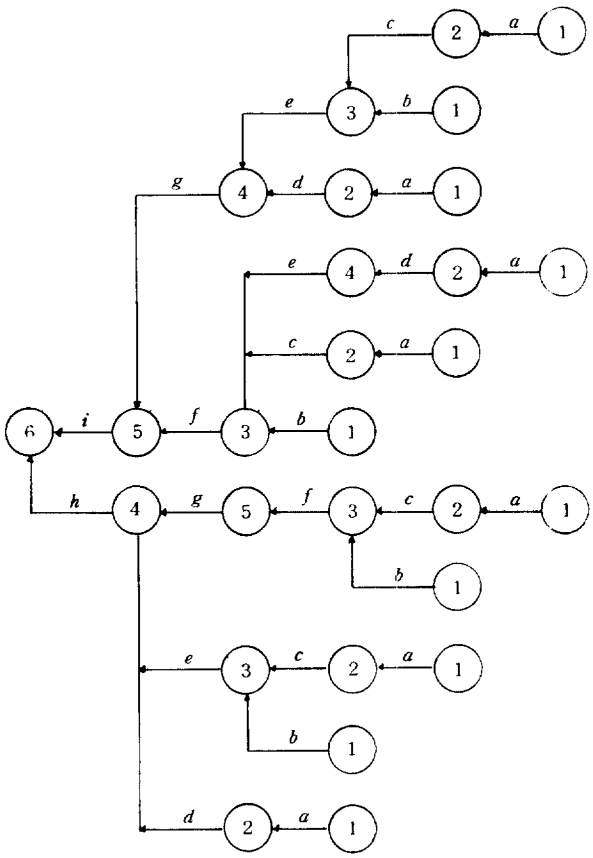
이상에서 단순경로들이 모두 찾아지면 이에 Monte-Carlo Simulation 방법을 이용해서 신뢰성과 평균수명을 추정한다. 이 과정은 다음과 같다.

Step 1) System 內에 있는 모든 node 의 연속수명분포로부터 Monte-Carlo Simulation 에 의해서 평균수명을 발생시킨다.

Step 2) 발생된 모든 평균수명을 이용해서 규정된 시간에서의 각 단순경로의 고장여부를 점검한다. 이때 1 개이상의 단순경로가 동작한다면 System 은 기능을 발휘하게 되며, 모든 단순경로가 고장상태일 때 System 은 고장나게 된다.

Step 3) 발생된 모든 평균수명을 이용하면 각 단순경로가 고장상태가 되는 수명을 계산할 수 있는 바, 이를 이용하여 System 의 수명을 추정할 수 있다.

위의 Step 1) ~ 3) 의 과정을 Simulation 시행횟수만큼 반복한다. 그러한 반복된 시행의 결과를 이용하여 다음과 같이 신뢰성에 대한 점추정, 구간추정, 그리고 평균수명에 대한 점추정을 할 수 있다.



[Fig 2] 11 SIMPLE PATHS - ENUMERATION

i) 신뢰성의 점추정

$$\text{Reliability (규정된 시간)} = \frac{\text{System의 기능발휘 횟수}}{\text{총 시행횟수}}$$

$\hat{R}(t) = n_s / n_t$, n_s : System 의 기능발휘횟수

n_t : Simulation 의 총 시행횟수

ii) 신뢰도의 구간추정

신뢰성 $R(t)$에 대해서 $P = \hat{R}(t)$인 이항분포로 하여 이를 정규분포로 접근(Approximation) 시키면 다음의 구간추정을 구할 수 있다.

$$[\hat{R}(t)]_L = \hat{R}(t) - u(\alpha)\cdot\sqrt{\frac{\hat{R}(t)\cdot(1-\hat{R}(t))}{n_t}} \leqq$$

$$R(t)\text{의 구간추정} \leqq \hat{R}(t) + u(\alpha)\cdot\sqrt{\frac{\hat{R}(t)(1-\hat{R}(t))}{n_t}}$$

$$= [\hat{R}(t)]_u$$

여기서 $(1-\alpha)$는 신뢰계수(confidence coefficient)이다.

iii) 평균 수명에 대한 추정

$MT\hat{B}F$ =Step 3에서 계산된 System 수명의 평균값

Ⅳ. 방법의 타당성 조사와 實例

(1) 본 연구방법의 타당성을 조사하기 위해서 node 3개로 이루어진 간단한 직렬 System에 대해서 결과를 분석하여 본다. 〔그림3〕에는 AON System법을 적용시켜 단순경로를 수색했다.

[Fig. 3] 3 COMPONENTS-SERIES SYSTEM

각 node의 수명분포는 $\lambda_i = 1.0\times10^{-4}$, i = 1, 2, 3인 지수분포를 따른다. 수명이 지수분포를 따르는 제품의 신뢰성은

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

로 계산된다.

i) 규정시간 t에서의 이론적인 신뢰성

$$R(t) = \{e^{-1.0\times10^{-4}\times t}\}^3$$

ii) 3 node의 직렬체계 평균수명

System의 고장률 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$= 3.0\times10^{-4}$(回/Hr)

[Table 1] COMPARISION THEORETICAL RESULTS WITH THIS PAPER'S RESULTS

No. of paths=1, α =5% Monte-Carlo Simulation Trials=500

Required Time (t)	Theoretical results MTBF=3333hr	This paper's results			
	R(t)	$\hat{R}(t)$	$[\hat{R}(t)]_L$	$[\hat{R}(t)]_u$	$MT\hat{B}F$
100(hr)	0.9704	0.968	0.953	0.983	9290(hr)
300	0.9139	0.91	0.885	0.935	3368
500	0.8607	0.866	0.836	0.896	3509
1,000	0.7408	0.732	0.693	0.771	3228
2,000	0.5488	0.554	0.51	0.598	3586
3,000	0.4066	0.392	0.349	0.435	3097
5,000	0.2231	0.244	0.206	0.282	3317
10,000	0.0498	0.05	0.031	0.069	3368
15,000	0.0111	0.014	0.004	0.024	3438
20,000	0.0025	0.003	0	0.006	3107
30,000	0.0001	0	0	0	3343

System의 평균수명

$$(MTBF)=1/\lambda$$
$$=1/(3.0\times10^{-4})$$
$$=3333(Hr)$$

i) 와 ii) 를 Monte-Carlo Simulation 방법의 결과와 비교하면 [표 1] 과 같다.

[표 1]의 결과를 분석하여 보면 다음과 같다.

i) 이론상의 신뢰성과 본 연구결과 신뢰성의 차이는 소숫점 2 째자리 이하이다.

ii) 이론상의 신뢰성은 모두 본 연구결과인 신뢰구간內에 포함된다. 특히 시행횟수를 크게하면 신뢰구간의 폭을 좁게 하므로서 구간추정을 좀 더 정확히 할 수 있다. 예를들면 시행횟수 5000 에 $\hat{R}(500)=0.8578$, $[\hat{R}(500)]_L=0.848$, $[\hat{R}(500)]_u=0.867$ 이다.

iii) 평균수명 $MTTF$에 있어서는이론상 $MTTF=3.333$hr의 90 %~ 110 %범위內에 있다. (실제 $\hat{MTTF}$의 평균값은 이론치와 같다. 즉, $[\hat{MTTF}]=3,333$ hr 이 된다.)

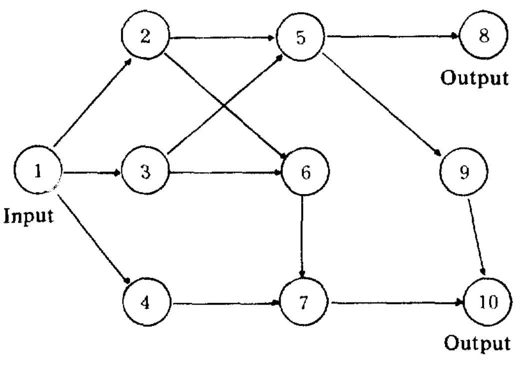
(2) Nodes 의 수명분포가 Weibull 분포일 때

[8] 의 예제를 다루어 보는데, [8] 에서는 AOB system법을 사용했으나 본 연구에서는 이를 AON system법으로 해결했다 [그림 4]

Weibull 분포를 따르는 제품의 신뢰성은 다음과 같다.

$$R(t;K,M)$$
$$=Exp[-K\cdot t^{M+1}/(M+1)],\quad t>0,\quad K>0,$$
$M>-1$ 여기서, K : Scale parameter

M : Shape parameter



[Fig 4] 10 NODES ACYCLIC NETWORK SYSTEM

[TABLE 2] WEIBULL PARAMETERS OF EACH COMPONENT

Node #	Scale par. K	Shape par.M
1	10^{-3}	10^{3}
2	2.8	1.8
3	2.7	1.7
4	2.6	1.6
5	2.5	1.5
6	2.4	1.4
7	2.3	1.3
8	2.2	1.2
9	2.1	1.1
10	2.0	1.0

[그림 4] 에 있는 node 의 Weibull분포 parameters 값은 [표 2] 와 같다.

본 연구의 Simulation 결과의 實例가 [표 3] 에 나와 있다. [8] 의 결과와 본 연구결과를 비교해 보면, [8] 에서는 $\hat{R}(0.5)=0.886$, 본 연구에서는 $\hat{R}(0.5)=0.885$ 로 같다는 것을 알 수 있으며, 본 연구의 결과에서는 평균수명에 대한 추정치, $\hat{MTTF}=0.7586$ 을 추가로 추정할 수 있다.

(3) Cyclic network system의 신뢰성과 평균수명

[6] 의 예제를 다루어 보았는데, [그림 5] 의 System에 대해 AOB system 법을 사용하여 단순경로수색을 행하고 모든 가지 (branch)의 수명분포는 parameter 가 $\lambda_i=3.0\times10^{-4}$, $i=a, b, c, \cdots, l$ 인 지수분포를 따른다고 가정하여 신뢰성과 평균수명을 추정하였다. [6] 의 결과와 본 연구결과를 비교하였다.

i) [6] 에서 나온 결과에 따라 계산해 보면

$\hat{R}(500)=0.9484$ 이다.

ii) 본 연구에서의 결과는 다음과 같다.

① Simulation 시행횟수 = 500 回

② 단순경로의 수 = 24 개

③ $R(500)$ 의 점추정

$\hat{R}(500)=0.948$

[Table 3] THIS PAPER—SIMULATION RESULTS

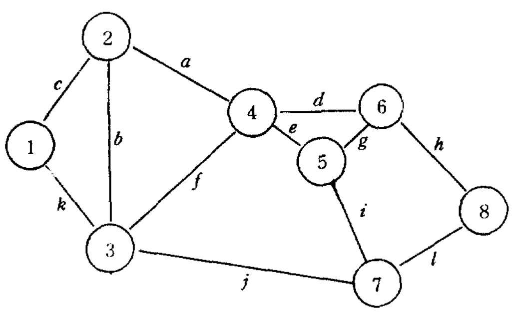
```
1-TH PATH ;  1  2  5  8
2-TH PATH ;  1  4  7  10
3-TH PATH ;  1  2  5  9  10
4-TH PATH ;  1  3  5  8
5-TH PATH ;  1  2  6  7  10
6-TH PATH ;  1  3  5  9  10
7-TH PATH ;  1  3  6  7  10


***************
# OF PATH = 7
***************


*****************************************************************
PARAMETER(S) OF EACH NODE REL DIST
REQUIRED TEST TIME .5
1-TH NODE ; SCALE = 1E-03 , SHAPE = 1000 , REL. = 1
2-TH NODE ; SCALE = 2.8 , SHAPE = 1.8 , REL. = .866245178
3-TH NODE ; SCALE = 2.7 , SHAPE = 1.7 , REL. = .85736371
4-TH NODE ; SCALE = 2.6 , SHAPE = 1.6 , REL. = .847945961
5-TH NODE ; SCALE = 2.5 , SHAPE = 1.5 , REL. = .837966886
6-TH NODE ; SCALE = 2.4 , SHAPE = 1.4 , REL. = .827402031
7-TH NODE ; SCALE = 2.3 , SHAPE = 1.3 , REL. = .816226737
8-TH NODE ; SCALE = 2.2 , SHAPE = 1.2 , REL. = .804416877
9-TH NODE ; SCALE = 2.1 , SHAPE = 1.1 , REL. = .791949028
10-TH NODE ; SCALE = 2 , SHAPE = 1 , REL. = .778800783


# OF TRIALS OF MONTE-CARLO METHOD  1000
# OF SUCCESS  885
# OF FAILURES 115
*****SYSTEM RELIABILITY R(.5)= .885*****

.865226815< 95% CONFIDENCE INTERVAL OF SYSTEM REL <.904773185
SYSTEM MTBF = .758616823
*****************************************************************
```



All branches : bidirection

[Fig 5] 12 COMPONENTS CYCLIC NETWORK SYSTEM

④ $R(500)$의 신뢰율 95 %의 구간 추정

$$0.929 \leq \hat{R}(500) \leq 0.967$$

⑤ System의 평균수명 점추정

$$\hat{MTTF} = 2072$$

V. 결　론

지금까지는 복잡한 Algorithm을 통해서 계산한 복잡한 Network System 신뢰성의 근사값을 본 연구에서와 같은 Monte-Carlo Simulation 방법을 사용하면 그러한 어려운 algorithm 없이 같은 근사해를 얻을 수 있다. 또한 신뢰성 뿐만이 아니고 acyclic network system과 복잡한 cyclic network system에 대해서 지금까지는 연구활동이 미미했던 System의 평균수명에 대한 추정치를 얻을 수 있다. 점추정이나 구간추정의 정확도를 높이기 위해서는 Simulation의 시행횟수를 증가시키면 된다.

이러한 간단한 신뢰성과 평균수명에 대한 추정값은 제품설계, 품질관리에 있어서의 품질보증과 판매후 서비스(After Service)정책의 수립에 도움을 줄 수 있을 것이며, 나아가서는 신뢰성 개선의 방향모색을 위해서도 사용될 수 있을 것이다.

본 연구에 있어서의 다음 과제는 System內의 components에 대한 정비정책과 고장발생시 이에 수리정책을 도입했을 때의 신뢰성과 평균수명에 대한 추정이다. 또한, System內의 Components가 상호의존적(Dependent)일 때의 추정방법이 되겠다.

끝으로 본 연구에 많은 조언을 해 주신 본 대학교 산업공학과의 정 수일 교수님께 감사드린다.

參 考 文 獻

(1) Jaydev. Sharma, *"Algorithm for Reliability Evaluation of a Reducible Network"*, IEEE Trans. on Rel., Vol. R-25, No.5, Dec. 1976.

(2) A.C. Nelson, JR., J.R. Batts, and R.L. Beadles, *"A Computer Program for Approximating System Reliability-Part I, II"*, IEEE Trans. on Rel., Vol. R-19, No.2, May 1970.

(3) J. Demercado, N. Spyratos, and B.A. Bowen, *"A Method for Calculation of Network Reliability,"* IEEE Trans. on Rel., Vol. R-25, No.2, June 1976.

(4) R.N. Allan, R. Billinton, and M.F. De Oliveira, *"An Efficient Algorithm for deducing the minimul cuts and Reliability indices of a General Network Configuration,"* IEEE Trans. on Rel., R-25, No.4, Oct. 1976.

(5) G.D.M. Pearson, *"Computer Program for approximating the Reliability Characteristics of Acyclic Directed Graphs,"* IEEE Trans. on Rel., Vol. R-26, No. 1, Apr. 1977.

(6) J.A. Abraham, *"An Improved Algorithm for Network Reliability,"* IEEE Trans. on Rel., Vol. R-28, No.1, Apr. 1979.

(7) 정수일　, *"Computation of the Reliability for Reducible and/or irreducible Network by the event-space method,"*　인하대학교 산업과학기술연구소 제 10 집, 1982,

(8) S.J. Kamat, and M.W. Riley, *"Determination of Reliability Using Event Based Monte-Carlo Simulation,"* IEEE Trans. on Rel., Vol. R-24, No.1, Apr. 1975.

(9) Hayao Nakazawa, *"A Decomposition method for Computing System Reliability by a Boolean Expression"*, IEEE Trans. on Rel. Vol. R-26, No.4, Oct. 1974.

(10) H. Kumamoto, K. Tanaka, and K. Inoue, *"Efficient Evaluation of System Reliability by Monte-Carlo Method,"* IEEE Trans. on Rel., Vol. R-26, No.5, Dec. 1977.

(11) M.O. Locks, *"Evaluating the KTI Monte-Carlo Method for System Reliability Calculation,"* IEEE Trans. on Rel., Vol. R-28, No.5, Dec. 1979.

(12) M.C. Easton, and C.K. Wong," *"Sequential Destruction Method for Monte-Carlo Evaluation of System Reliability,"* IEEE Trans. on Rel., Vol. R-29, No.1, Apr. 1980.

(13) J.E. Biegel, *"Determination of Tie Sets and Cut Sets for a System Without Feedback,"* IEEE Trans. on Rel., Vol. R-26, No.1, Apr. 1977.

(14) 정수일, "단순경로 수색의 프로그램 및 그 응용에 관한 연구(I)" 인하대학교 산업과학기술연구소, 제 8 집, 1981. 4