Bull Korean Math. Soc.
Vol. 19, No. 1 1982

UNE CARACTERISATION DE LA FONCTION SPLINE DE LISSAGE

PAR HA-JINE KIMN

0. Introduction

Nous avons introduit le problème classique de la fonction spline de lissage d'ordre q (entier positif) et montré l'existence et l'uniclté de la fonction spline de lissage (Kimn (1981) [5]).

Soit $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ trois espaces de Hilbert. On prend $\mathcal{X}=H^q\ [a, b]$, $\mathcal{Y}=H^0\ [a, b]=L^2\ [a, b]$ et $\mathcal{Z}=\mathbf{R}^n$ où $H^q\ [a, b]$ est l'espace de Hilbert des fonctions réelles définies sur l'intervalle $[a, b]$ qui ont une dérivée $(q-1)$-ième absolument continue et une dérivée q-ième de carré sommable avec le produit scalaire:

$$<f\,|g>_{\mathcal{X}}=\sum_{i=0}^{q}\int_a^b f^{(i)}(t)g^{(i)}(t)dt;\quad f(t), g\ (t)\in\mathcal{X},$$

et la norme associée:

$$\|f\|_{\mathcal{X}}=(<f\,|\,f>_{\mathcal{X}})^{1/2},\quad f(t)\in\mathcal{X},$$

et où $H^0\ [a, b]=L^2\ [a, b]$ est l'espace de Hilbert des fonctions réelles dé finies sur $[a, b]$ qui sont de carrés sommables avec le produit scalaire:

$$<f\,|g>_{\mathcal{Y}}=\int_a^b f(t)g(t)dt;\ f(t),\ g(t)\in\mathcal{Y},$$

et la norme associée:

$$\|f\|_{\mathcal{Y}}=(<f\,|\,f>_{\mathcal{Y}})^{1/2},\quad f(t)\in\mathcal{Y},$$

et où $\mathbf{R}^n$ est l'espace euclidien de dimension n.

On prend les opérateur linéaires continus T de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ définie par $T(x)=x^{(q)}(t)$ et A de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Z}$ définie par:

$$\begin{aligned}A(x)&=[x(t_1),\ \ldots,\ x(t_n)]\\&=[<k_1|x>,\ \ldots,\ <k_n|x>\in\mathcal{Z},\quad \text{pour tout } k_i\in\mathcal{X}.\end{aligned}$$

Soit z un vecteur donné tel que:

$$z=[z_1,\ \ldots,\ z_n]\in\mathcal{Z}.$$

On définit un produit scalaire sur $\mathcal{Z}$:

$$<u|v>_{\rho}=\sum_{i=1}^{n}\rho_i u_i v_i$$

avec $u=[u_1,\ \ldots,\ u_n]$, $v=[v_1,\ \ldots,\ v_n]$, et la norme associée:

$$\|u\|_{\rho}{}^2=\sum_{i=1}^{n}\rho_i u_i{}^2.$$

Pour utiliser le théorème de caractérisation d'une meilleure approximation (la prooeriété de l'orthogonalité), on considère le produit $\mathcal{W}=\mathcal{Y}\times\mathcal{Z}$ des espaces de Hilbert $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$. Si l'on prend le produit scalair:

$$\ll w_1 | w_2 \gg_w = < y_1 | y_2 >_{\mathcal{Y}} + < z_1 | z_2 >_\rho \quad (\rho > 0)$$

pour $w_1 = [y_1, z_1]$ et $w_2 = [y_2, z_2] \in \mathcal{W}$, $\mathcal{W}$ est aussi un espace de Hilbert. On prend dans $\mathcal{W}$ la norme associée au produit scalaire:

$$\begin{aligned} ||| w ||| &= \ll w | w \gg^{1/2} \\ &= (< y | y >_{\mathcal{Y}} + < z | z >_\rho^{1/2}, \quad w = [y, z] \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

On définit aussi un opérateur linéaire continu L de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{W}$ par:

$$L(x) = [T(x), \ A(x)] \in \mathcal{W}.$$

Dans cette étude, nous donnous une. définition de la fonction spline de lissage et démontrons des théorèmes pour la caractérisation de la fonction de lissage en cas général et en cas particulier d'un nombre fini de conditions.

1. Une définition de la fonction spline de lissage

Désignons par T^*, A^* et L^* les opérateur adjoints de T, A et L respectivement. Avec le théorème de caractérisation d'une meilleur approximation (cf. p. 15 de Achieser (1956) [1]), on peut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une seule fonction spline de lissage s pour tout $z \in \mathcal{Z}$ (relativement à T, A, z et $\rho_i > 0$) est que l'on ait:

(1. 1) $\quad < T(s) | T(x) >_{\mathcal{Y}} + < A(s) - z | A(x) >_\rho = 0$, pour tout $x \in \mathcal{X}$,

ou:

(1. 2) $$T^* T(s) + A^* A(s) = A^*(z).$$

Par la définition de L, on a:

$$< L(x) | [y, z] > = < x | L^*[y, z] >.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} < L(x) | [y, z] > &= < [T(x), \ A(x)] | [y, z] > \\ &= < T(x) | y >_{\mathcal{Y}} + < A(x) | z >_\rho \\ &= < x | T^*(y) >_{\mathcal{Y}} + < x | A^*(z) >_\rho. \end{aligned}$$

On a donc:

$$L^*[y, z] = T^*(y) + A^*(z).$$

Par ailleurs,

$$< A(x) | z >_\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i z_i < k_i | x > \ = < x | \sum_{i=1}^n \rho_i z_i k_i >.$$

On a donc:

$$A^*(z) = \sum_{i=1}^n \rho_i z_i k_i.$$

La condition (1. 2) peut encore s'écrire:

$$L^* L(s) = A^*(z).$$

D'aprés cette relation d'orthogonalité, on a une définition de la fonction spline de lissage.

DEFINITION. Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel des éléments de $\mathfrak{X}$ tel que:

$$\mathcal{S}=\{s\in\mathfrak{X}\,|\,\langle T(s)\,|\,T(x)\rangle_{\mathcal{Y}}+\langle A(s)-z\,|\,A(x)\rangle_{\rho}=0,\ \text{pour tout } x\in\mathfrak{X}\}.$$

On appelle cet espace $\mathcal{S}$ *l'espace des fonctions spline de lissage.* Si l'on utilise les propriétés de l'application adjointe, l'espace $\mathcal{S}$ est encore égal á:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}&=\{s\in\mathfrak{X}\,|\,T^*T(S)\in\mathrm{Im}(A^*)\}\\&=\{s\in\mathfrak{X}\,|\,L^*L(s)\in\mathrm{Im}(A^*)\},\end{aligned}$$

où $\mathrm{Im}(A^*)$ est l'image de A^*.

2. Caractérisation générale de la fonction spline de lissage

De la définition précédente, on a:

$$T(\mathcal{S})=T\ \ (\mathrm{Ker}(A))^{\perp} \tag{2.1}$$

et

$$T^*T(\mathcal{S})=\mathrm{Im}(T^*)\cap\mathrm{Im}(A^*), \tag{2.2}$$

où $\mathrm{Ker}(A)$ est le noyau de A. Comme T^* est une application linéaire continue et biunivoque de $\mathcal{Y}$ sur $\mathrm{Im}\ (T^*)$ fermé, T^{*-1} est continue de $\mathrm{Im}(T^*)$ sur $\mathcal{Y}$ et $T(\mathcal{S})=T^{*-1}(\mathrm{Im}(T^*)\cap\mathrm{Im}(A^*))$ est férmé dans $\mathcal{Y}$. D'après (2. 1) et (2. 2), on définit donc les sous-espaces vectoriels suivants:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}&=\mathrm{Im}(T^*)\cap\mathrm{Im}(A^*) && \text{dans } \mathfrak{X},\\ \mathcal{F}&=T(\mathrm{Ker}(A))^{\perp} && \text{dans } \mathcal{Y},\\ \mathcal{B}&=A(\mathrm{Ker}(T))^{\perp} && \text{dans } \mathcal{Z}.\end{aligned}$$

Ces trois espaces sont reliés de façon biunivoque et bicontinue par T^* et A^*. On a donc:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}&=T^*(\mathcal{F})=A^*(\mathcal{B}),\\ T(\mathcal{S})&=\mathcal{F},\end{aligned}$$

et

$$T^*T(\mathcal{S})=\mathcal{H}. \tag{2.3}$$

Dès (1. 2), on définit pour $s\in\mathcal{S}$ un élément unique $\lambda\in\mathcal{Z}$ tel que:

$$T^*T(s)=A^*(\lambda), \tag{2.4}$$

où $\lambda=z-A(s)$.

Notons D l'application linéaire continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{Z}$ qui associe λ de (2. 4) á $s\in\mathcal{S}$. On a donc:

$$D(s)=A^{*-1}T^*T(s),\ \text{pour tout } s\in\mathcal{S}. \tag{2.5}$$

Examinons maintenant les propriétés de D.

PROPOSITION 1. $\mathrm{Im}(D)\subset\mathcal{Z}$ *et* $\mathrm{Ker}(D)\subset\mathcal{S}$.

DEMONSTRATION. D'après (2, 3) et (2. 5), on a:

$$\mathrm{Im}(D)=D(\mathcal{S})=A^{*-1}T^{*}T(\mathcal{S})$$
$$=A^{*-1}(\mathcal{H})=\mathcal{K}\subset\mathcal{Z}.$$

Comme A^* et T^* sont biunivoque, on a aussi:

$$\mathrm{Ker}(D)=\mathrm{Ker}(A^{*-1}T^{*}T)=\mathrm{Ker}(T)\subset\mathcal{S}.$$

C. Q. F. D.

A partir de (2. 4), on en déduit donc que quelque soit $z\in\mathcal{Z}$, il existe s unique appartenant à $\mathcal{S}$ tel que:

$$A(s)=z-D(s).$$

pour le calcul effectif de la fonction spline de lissage s, on caractérise plus précisement le sous-espace $\mathcal{Y}=\mathrm{Im}(L)$ dans $\mathcal{W}$. Notons M l'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{W}$ définie par:

$$M(s)=[T(s),\ -D(s)],\ \text{pour tout } s\in\mathcal{S}.$$

Soit $\mathcal{Q}$ un sous-espace vectoriel dans $\mathcal{W}$ tel que:

$$\mathcal{Q}=\mathrm{Ker}(L^*)\subset\mathcal{W}.$$

Comme $\mathrm{Im}(L)=\mathrm{Ker}(L^*)^{\perp}$, on a directement:

$$\mathrm{Im}(L)=\mathcal{Q}^{\perp},\ \text{et } \mathcal{Y}=\mathcal{Q}^{\perp}.$$

Caractérisons maintenant le sous-espace $\mathcal{Q}$.

PROPOSITION 2. *Si* $\mathcal{Q}=\mathrm{Ker}(L^*)\subset\mathcal{W}$, *on en déduit que:*

$$\mathcal{Q}=M(\mathcal{S})=\{[y,z]\in\mathcal{W}\mid y\in\mathcal{F},\ z=-A^{*-1}T^{*}(y)\in\mathcal{K}\}.$$

DEMONSTRATION. On sait que pour $w=[y,z]$, $L^*(w)=0$ si et seulement si:

$$T^*(y)+A^*(z)=0.$$

Si l'on pose $x=T^*(y)$, on a:

$$x=-A^*(z),\ \text{i. e. } x\in\mathrm{Im}(T^*)\cap\mathrm{Im}(A^*)=\mathcal{H}.$$

Soit $y\in\mathcal{F}$ et $z=-A^{*-1}(x)=-A^{*-1}T^*(y)\in\mathcal{K}$. Comme $\mathcal{F}=T(\mathcal{S})$, $y=T(s)$ avec $s\in\mathcal{S}$; on a alors:

$$z=-A^{*-1}T^*(y)=-A^{*-1}T^*\ T(s)=-D(s).$$

Il en resulte que $[y,z]\in\mathcal{Q}$ si et seulement s'il existe $s\in\mathcal{S}$ tel que:

$$M(s)=[y,\ z].$$

C. Q. F. D.

On sait donc qu'il existe des correspondances biunivoques et bicontinues entre $\mathcal{Q}, \mathcal{H}, \mathcal{K}$ et $\mathcal{F}$. Comme $L(\mathcal{X})=\mathcal{Y}$, $M(\mathcal{S})=\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Y}=\mathcal{Q}^{\perp}$, on peut facilement démontrer le théorème suivant:

THEOREME 1. *Pour tout* $x\in\mathcal{X}$ *et tout* $s\in\mathcal{S}$, *on a:*

$$\langle\!\langle L(x)\mid M(s)\rangle\!\rangle=0.$$

3. Caractérisation avec un nombre fini de conditions

Pour résoudre le problème classique de la fonction spline de lissage d'ordre q (Voir Kimn (1981) [5]) et appliquer au problème pratique, on va préciser le cas où $\mathcal{Z}$ est un espace de dimension finie, c'est-á-dire, le cas où l'on a un nombre fini de conditions à ajuster. On suppose que $\mathcal{Z}=\mathbf{R}^n$ avec le produit usuel et que dim $(\mathrm{Ker}(T))=q$ où $\dim(\mathrm{Ker}(T))$ est la dimension de $\mathrm{Ker}(T)$. On sait que $\mathrm{Ker}(T)\cap\mathrm{Ker}(A)=0$ entraîne en effet que $n\geqq q$ (Voir théorème dans Kimn (1981) [5]). Dans ce cas, l'opérateur A est mis sous la forme:

$$A(x)=[<k_1|x>_{\mathcal{X}},\ \ldots,\ <k_n|x>_{\mathcal{X}}]\in\mathbf{R}^n$$

où les k_i sont n éléments linéairement indépendants de $\mathcal{X}$. On peut donc poser:

$$k_i=A^*(\delta_i)',$$

où $\delta_i\in\mathbf{R}^n$ est le vecteur ayant sa i-ième composante égale á 1 et les autres égales à O. D'autre part, on sait que:

$$z=[z_1,\ \ldots,\ z_n]\in\mathbf{R}^n.$$

L'opérateur adjoint A^* prend aussi la forme suivante:

$$A^*(z)=\sum_{i=1}^{n}\rho_i z_i k_i.$$

Si l'on pose $\mathcal{H}$ le sous-espace vectoriel de dimension n dans $\mathcal{X}$ engendré par les k_i, on a:

$$\mathrm{Im}(A^*)=\mathrm{Ker}(A)^{\perp}=\mathcal{H},$$
$$\mathrm{Im}(A^*)^{\perp}=\mathrm{Ker}(A)=\mathcal{H}^{\perp}.$$

L'hypothèse $\mathrm{Ker}(T)\cap\mathrm{Ker}(A)=0$ entraîne aussi que A est biunivoque sur $\mathrm{Ker}(T)$, on a donc que $A(\mathrm{Ker}(T))$ est de dimension q. Comme $\dim(\mathcal{Z})=n$, $\dim(A(\mathrm{Ker}(T)^{\perp})=n-q$. Comme $\mathrm{Im}(T^*)\cap\mathrm{Im}(A^*)$ est une expression symétrique par rapport à A et T, on peut échanger leur rôle et on obtient:

$$\mathcal{H}=\mathrm{Im}(T^*)\cap\mathrm{Im}(A^*)=A^*(A(\mathrm{Ker}(T))^{\perp}).$$

On a donc:

$$\dim\mathcal{H}=\dim\ (A^*(A(\mathrm{Ker}(T))^{\perp}).$$

Comme A^* est biunivoque, on a:

$$\dim(A^*(A(\mathrm{Ker}(T))^{\perp})=\dim(A(\mathrm{Ker}(T))^{\perp}).$$

Enfin, on a:

$$\dim\mathcal{H}=n-q.$$

Dans ce cas, les sous-espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ sont de même dimension $n-q$.
Notons h^j, f^j et b^j $(j=1,\ldots,n-q)$ des éléments engendrant trois sousespaces $\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ respectivement, qui sont reliés par les relations:

$$T^*(f^j)=A^*(b^j)=h^j,\ j=1,\ \ldots,\ n-q. \tag{3.1}$$

Le sous-espaces $\mathcal{Q}\subset\mathcal{W}$ est aussi de dimension $n-q$, parce qu'il existe des correspondances biunivoques et bicontinues entre $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{Q}$. Comme f^j $(j=1, \ldots, n-q)$ forme une base de $\mathcal{F}$, on sait qu:

$$g^j=[f^j, \ -A^{*^{-1}}T^*(f^j)], \ j=1, \ \ldots, \ n-q$$

forme aussi une base de $\mathcal{Q}$. D'autre part, d'après (3.1), on a:

$$-A^{*^{-1}}T^*(f^j)=-A^{*^{-1}}(h^j)=-b^j.$$

Donc, les éléments:

$$g^j=[f^j, -b^j], \quad j=1, \ldots, n-q$$

forment une base de $\mathcal{Q}$.

Pour caractériser la solution s du problème classique de la fonction spline de lissage avec un nombre fini de conditions, on a alors le théorème suivant:

THEOREME 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que $s\in\mathcal{X}$ soit la solution du problème classique de la fonction spline de lissage avec un nombre fini de conditions est qu'il existe des u_j $(j=1, \ldots, n-q)$ tels que.*

$$T(s)=\sum_{j=1}^{n-q} u_j f^j, \ A(s)=z-\sum_{j=1}^{n-q} u_j b^j. \tag{3.2}$$

Les u_j peuvent pêtre obtenus en résolvant le système algébrique linéaire suivant:

$$\sum_{j=1}^{n-q} (\langle f^i | f^j\rangle_q+\langle b^i|b^j\rangle_p)u_j=\langle z|b^i\rangle_p, \quad i=1, \ldots, n-q. \tag{3.3}$$

DEMONSTRATION. D'après la définition précédente de la fonction spline de lissage, pour que s soit la solution, $[T(s), \ A(s)-z]\in\mathcal{W}$ est orthogonal à $\mathcal{W}=\mathrm{Im}(L)=\mathcal{Q}^{\perp}$. C'est-à-dire que $[T(s), A(s)-z]\in\mathcal{Q}$. Comme $\dim(\mathcal{Q})=n-q$ et $\mathcal{Q}$ est engendré par:

$$g^j=[f^j, \ -b^j], \ j=1, \ \ldots, \ n-q,$$

il existe donc des coefficients u_j $(j=1, \ \ldots, \ n-q)$ tels que:

$$T(s)=\sum_{j=1}^{n-q} u_j f^j, \ A(s)=z-\sum_{j=1}^{n-q} u_j b^j.$$

Pour obtenir les coefficients u_j numériquement, il nous suffit d'exprimer que $[T(s), \ A(s)]\in\mathcal{Q}^{\perp}$, c'est-à-dire que $[T(s), \ A(s)]$ est orthogonal à g^j dans $\mathcal{W}$ $(j=1, \ \ldots, \ n-q)$. On obtient:

$$\langle\sum_{j=1}^{n-q} u_j f^j | f^i\rangle_q+\langle z-\sum_{j=1}^{n-q} u_j b^j | -b^i\rangle_p=0, \ i=1, \ \ldots, \ n-q.$$

On a donc:

$$\sum_{j=1}^{n-q}(\langle f^i | f^j\rangle_q+\langle b^i|b^j\rangle_p)u_j=\langle z|b^i\rangle_p, \ i=1, \ \ldots, \ n-q.$$

C. Q. F. D.

REMARQUE 1. Comme la *matrice de Gram* $(\langle f^i | f^j\rangle_q+\langle b^i|b^j\rangle_p)$ est symétrique et définie positive (cf. chapitre III de Kimn (1980) [4] et p. 216 de Oden et Reddy (1976) [7]), on peut numériquement obtenir la solution unique $u=(u_j)$ $(j=1, \ldots, n-j)$ de *l'équation normale* (3.3) en utilisant la *méthode de Choleski* (cf. 1-4 de Schwarz (1973)[8]). On peut enfin obtenir la fonction spline de lissage s par (3.2).

REMARQUE 2. La méthode qui est basée directement sur le théorème 2 précédent est appelée la *méthode de projection* qui est très générale et a été proposé par Laurent et Anselone (1968)[6]. La stabilité de cette méthode a été démontrée par Carasso (1966)[2] sur divers types de fonctionnelles. Cette méthode est aussi liée avec la méthode proposée par Greville (1964) [3] qui utilise les différence divisées.

References

1. N. I. Achieser, *Theory of approximation*, Frederick Ungar, New-York, 1956.
2. C. Carasso, *Méthodes numériques pour l'obtention de fonction-spline*, Thèse, Université de Grenoble, 1966.
3. T. N. E. Greville, *Numerical procedures for interpolation by splne functions*, SIAM J. Num. Anal. **1** (1964), 53-68.
4. H. J. Kimn, *Un procédé de données erronées*, Thèse, Université de Saint-Etienne, 1980.
5. ______, *Existence et unicité de la fonction spline de lissage*, Bull. Korean Math. Soc., **17** (1981), 115-121.
6. P. J. Laurent et P. M. Anselone, *A general method for construction for interpolating or smoothing spline-functions*, Numer. Math., **12** (1968), 66-82.
7. J. T. Oden et J. N. Reddy. *An introduction to the mathematical theory of finite elements*, John-Wiley & Sons, New-York, 1976.
8. H. R. Schwarz, *Numerical analysis of symmetric matrices*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.

Ajou University