Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 18, No. 2, 1982

Markov 過程에 관한 硏究*

具 滋 興

1. 序論

확률과정(stochastic process)중에서 가장 기본적이고, 중요한 분야가 마르코프 과정(markov process)이라고 하겠다. 특히 이 분야의 주된 연구 내용으로서는 마르코프 연쇄(markov chain)과 마르코프 과정의 본질적인 연구라 하겠다. 그런데 마르코프 과정에 관하여서도 그 狀態空間 (state space) S가 이산형(discrete type)이고, 시간적으로 연속인 媒介變數空間(parameter space) $T=(-\infty, \infty)$를 가지는 불연속 마르코프과정(discontinuous markov process)과 S와 T가 모두 연속인 연속 마르코프과정(continuous markov process)을 생각할 수 있겠다.

본 연구에서는 마르코프 연쇄와 불연속 마르코프과정에 관한 기본적인 구조에 대한 연구만을 대상으로 하겠다.

2. Markov 連鎖에 대하여

마르코프 연쇄를 이산마르코프과정(discrete markov process)이라고 하는데 이 과정을 해석해 나가는데 아주 중요한 수단이 되는 확률모함수(probability generating function)와 分解法則(decomposition rule)를 우선소개하기로 하자.

定義 1. 확률변수X가 이산확률분포(discrete probability distribution) $P_k=P_r(X=x_k)$ $(k=0, 1, 2\cdots)$에 따를 때,

$$G(S)=E_X S^X=\sum_{k=0}^{\infty} p_k S^k \tag{2-1}$$

를 확률변수 X의 確率母函數(PGF)라 한다.

定義 2. 두 확률변수 X와 Y의 함수인 확률변수 $\Psi(X, Y)$에 대하여, 다음 등식이 성립한다.

$$E_{X,Y}\Psi(X, Y)=E_Y\{E_{X|Y=Y}\Psi(X, Y)\} \tag{2-2}$$

이것을 분해법칙(decomposition rule)이라 한다.

*이 硏究는 1981年度 韓國科學財團硏究費支援으로 이루어진 것임.

그러면 이제부터 有限 Markov 連鎖(finite markov chain)가 平衡分布 (equilibrium distribution)을 가질 경우, 그것을 구하는 방법과 그것을 가지게 될 필요충분조건에 관하여 논해보기로 하겠다.

補助定理 1. [5] : 유한마르코프연쇄 $\{Z_n\,;\,n=1,2,\cdots\}$의 推移確率行列(transition stochastic matrix) $P=(p_{ij})$에 대하여, 推移確率 (transition probability) p_{ij}가 모두非負値 (non-negative numbers)이면, 평형분포 vector (equilibrium distribution Vector) Π가 존재하여 $\Pi=\Pi P$가 성립한다. 또한 그 역도 성립한다.

定理 2·1 : (단일탄성벽 취보)상태공간 $S=\{0,1,2,\cdots\}$을 가지고, 추이확률이

$$p_{00}=q_0,\ p_{01}=p_0,$$

$$p_{i,i-1}=q_i,\ p_{i,i+1}=p_i,\ (i=1,2,\cdots)$$

$$p_{ij}=0,\ \text{(그밖의 경우)}$$

$(p_i+q_i=1, i=0,1,2,\cdots)$인 마르코프열쇄(Markov Chain)가 평형분포를 가지기 위한 필요충분조건은

$$r_k=(p_0p_1\cdots p_k)/(q_1q_2\cdots q_{k+1}) \tag{2-3}$$

이라할 때, 급수 $\sum r_k$가 수렴(收斂)할 경우이다.

證明 주어진 推移確率들에서 추이확률 행렬 P를 구하면

$$P=\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\cdots \\ \hline 0 & q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 1 & q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 2 & 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & 0\cdots \\ 3 & 0 & 0 & q_2 & 0 & p_3 & 0\cdots \\ 4 & 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & p_4\cdots \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & 0\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

구하는 平衡分布(不動 vector)를 $\Pi=(\pi_0,\pi_1,\cdots\pi_i\cdots)$라 할때, $\Pi=\Pi P$이므로, 이관계식에서 다음연립방정식을 얻는다.

$$\begin{cases} \pi_0=q_0\pi_0+q_1\pi_1 & \text{(a)} \\ \pi_1=p_0\pi_0+\pi_2q_2 & \text{(b)} \\ \pi_2=\pi_1p_1+\pi_3q_3 & \text{(c)} \\ \pi_3=\pi_2p_2+\pi_4q_4 & \text{(d)} \\ \vdots & \\ \pi_k=\pi_{k-1}p_{k-1}+\pi_{k+1}q_{k+1} & \text{(e)} \end{cases}$$

윗 연립방정식의 (a)식에서

$$\pi_0=(\pi_1 q_1)/p_0 \Longleftrightarrow \frac{\pi_1}{\pi_0}/\frac{p_0}{q_1} \quad \text{(a}')$$

다시 (a′)의 결과를 (b)식에 대입하면

$$\pi_1=(\pi_2 q_2)/p_1 \Longleftrightarrow \frac{\pi_2}{\pi_1}=\frac{p_1}{q_2} \quad \text{(b}')$$

π_k를 계속 풀어가면 일반적인 관계식

$$\pi_k=(\pi_{k+1} q_{k+1})/p_k \Longleftrightarrow \frac{\pi_{k+1}}{\pi_k}=\frac{p_k}{q_{k+1}} \quad \text{(e}')$$

를 얻는다.

한편, 윗 (a′)(b′)및 (e′)와 다음 항등식에서

$$\pi_k=\left(\frac{\pi_k}{\pi_{k-1}}\right)\left(\frac{\pi_{k-1}}{\pi_{k-2}}\right)\cdots\left(\frac{\pi_1}{\pi_0}\right)\pi_0$$

$$=\left(\frac{p_k}{q_{k+1}}\right)\left(\frac{p_{k-1}}{q_k}\right)\cdots\left(\frac{p_0}{q_1}\right)=r_k\pi_0 \quad \text{(f)}$$

여기서, $r_k=(p_0p_1\cdots p_k)/(q_1q_2\cdots q_{k+1})$이다.

또 $\pi_0=r_0\pi_0$이므로 $r_0=1$이고, 확률 Vector 성분 π_k의 총합은 1이므로, (f)에서

$$\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k=\pi_0\sum_{k=0}^{\infty}r_k=1$$

$$\therefore\ \pi_0=1/\sum_{k=1}^{\infty}r_k \quad \text{(g)}$$

다시 (g)의 결과를 (f)에 대입하면

$$\pi_j=r_j/\sum_{k=1}^{\infty}r_k$$

그러므로 $\sum r_k$가 수렴할 때, 그리고 그때에 한하여 Π는 확률분포가 되고, 따라서 평형분포를 가지게 된다.

3. 不連續 Markov 過程에 대하여

지금부터는 狀態空間(state space) S가 離散的(discrete)이고, 시간적으로는 매개변수 $t\in[0,\infty)$를 가지는 마르코프과정(markov process)을 논하여 보기로 하자. 특히 이절에서는 마르코프과정 $\{Z_t\,;\,t\in[0,\infty)\}$의 表現行列(represent matrix) Q와 推移確率行列 $P(t)$사이의 관계식인 Kolmogorov 偏微分方程式을 논하고, 그 응용으로 一次出生死滅過程(Linear birth and death process with migration)의 PGF에 관하여 논하여 보기로 하겠

다.

不連續 Markov 過程 $\{Z_t\,;\, t\in[0,\infty)\}$의 推移確率은

$$p_{ij}(t)=P_r(Z_{\tau+t}=j\,|\,Z_\tau=i),\ (i, j\in S\,;\, \tau\in[0,\infty)) \tag{3-1}$$

또 S는 離散狀態空間(discrete state space)이다. 그리고 推移確率 $p_i(t)$는 다음 성질을 갖는다.

P.1 : 임의의 $t\in[0,\infty)$에 대하여 $p_{ij}(t)\geq 0$이고, $\sum_{j\in S} p_{ij}(t)=1$이다. 즉 추이확률행렬 $P(t)$는 확률행렬(stochastic matrix)이다.

P.2 : $\lim_{t\to 0} P_{ij}(t)=1$ 이때 $P_{ij}(t)$는 $P(t)$의 대각원소(diagonal element) 이다.

또 $\lim_{t\to 0} p_{ij}(t)=0$이다.

$$\Longleftrightarrow p_{ij}(t)=\delta_{ij}$$

$$\Longleftrightarrow p_{ij}(t)=I,\ (t\to 0)\text{이다.}$$

P.3 : $P(t)$에 대하여 Chapman-Kolmogorov 方程式이 성립한다.

$$\Longleftrightarrow P(u+v)=P(u)P(v),\quad (u, v\in[0,\infty)) \tag{3-2}$$

그런데 상태공간 S가 유한인 경우 방정식 (2-7)의 유일해는

$$P(t)=e^{tQ}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tQ)^n}{n!} \tag{3-3}$$

이때 Q는 행렬(matrix)로 주어지며, Q가 주어지면 $P(t)$가 (3-3)식에서 구해지고, 역으로 $P(t)$가 주어지면 Q가 결정된다. 그러므로 행렬 Q를 Markov 過程 $\{Z_t, t\in[0,\infty)\}$의 表現(represent)이라고 한다.

定理 2·2. 불연속 마르코프과정 $\{Z_t\,;\, t\in[0,\infty)\}$의 추이확률행렬 $P(t)$와 추이율행렬 Q사이에는 다음 관계식이 성립한다.

$$\frac{dP}{dt}=P(t)Q \tag{3-4}$$

證明. Chapman-Kolmogorov 방정식 (3-2)에 의하여

$$\begin{aligned}P(t+h)&=P(t)P(h)=P(t)\{I+hQ+0(h^2)\}\\&=P(t)+hP(t)Q+P(t)0(h^2)\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{dt}&=\lim_{h\to 0}\frac{P(t+h)-P(t)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}P(t)Q+P(t)\lim_{h\to 0}\frac{0(h^2)}{h}=P(t)Q\end{aligned}$$

그러므로

$$\frac{dP(t)}{dt}=P(t)Q \iff p_{ij}(t)=\sum_{k\in S}p_{ik}(t)q_{kj}$$

인 관계식이 성립한다.

콜모고로프 전향미분방정식을 이용하여 一次出生死滅過程에 관한 *PGF* 를 결정하여보자.

시각 t 에서 個體數를 Z_t 라 하고, 個體數過程 $(Z_t\,;\,t\in[0,\infty))$에 관하여 논해보기로 하자. 더욱 구체적으로 다음과 같은 문제를 제기하여 해결하고 그 특수한 경우를 논해보기로 하겠다.

定理 2·3. 微小時間 Δ사이에 각 個體가 새로운 개체를 출생하게될 확률을 $\lambda\Delta+0(\Delta)$, 각 개체가 사망하거나 移民해갈 확률을 $\mu\Delta+0(\Delta)$, 그 개체에 어떤 경우도 일어나지 않을 확률을 $1-(\lambda+\mu)\Delta+0(\Delta)$라 둔다. 또 시간 Δ 사이에 유입에 의하여 1개의 개체가 추가될 확률을 $\alpha\Delta+0(\Delta)$라 하자. 이 때 최초로 개체의 집단에 i개의 개체가 있었다고 하면, Z_t의 *PGF* $\pi_t(S)$는

$$\pi_t(S)=\frac{1}{(\lambda S-\mu)^{\alpha/\lambda}}\left\{\frac{(\lambda-\mu)\dfrac{\lambda S-\mu}{1-S}-e^{-(-\mu)t}}{\lambda+\dfrac{\lambda S-\mu}{1-S}e-(-\mu)t}\right\}^{\alpha/\lambda}$$

$$\times\left\{\frac{\mu+\dfrac{\lambda S-\mu}{1-S}e^{-(\lambda-\mu)t}}{\lambda+\dfrac{\lambda S-\mu}{1-S}e^{-(\lambda-\mu)t}}\right\}^{i} \qquad (3\text{-}5)$$

(단, $\lambda\neq\mu$ 인 경우)

證明. 최후의 Δ 시간 간격에 의한 분해를 이용하면,

$$Z_{t+\Delta}=Z_t+X_1+\cdots+X_{Z_t}+W$$

여기서,

$$W=\begin{cases}1, & (t,\ t+\Delta)\text{사이에 이민으로 1개가 流入}\\ 0, & \text{그밖의 경우}\end{cases}$$

$$X_l=\begin{cases}1 & \text{제 } l \text{ 번째 개체가 } (t,\ t+\Delta)\text{사이에 出産}\\ -1 & \text{제 } l \text{ 번째 개체가 } (t,\ t+\Delta)\text{사이에 死亡 또는 流出}\\ 0 & \text{그밖의 경우}\end{cases}$$

$$ES^W=\alpha\Delta S'+(1-\alpha\Delta)S^0+0(\Delta)=1-(\alpha-\alpha S)\Delta+0(\Delta)$$

$$\begin{aligned}ES^{X}l&=\lambda\Delta S'+\{1-(\lambda+\mu)\Delta\}S^0+\mu\Delta S^{-1}+0(\Delta)\\&=1+\{\lambda S-(\lambda+\mu)+\mu S^{-1}\}\Delta+0(\Delta)\end{aligned}$$

따라서

$$ES^{X_1+X_2\cdots+X_i+W}=(ES^{X_1})(ES^{X_2})\cdots(ES^{X_i})(ES^{W})$$
$$=(ES^{X_i})^i(ES^W)$$
$$=\{(i\lambda+\alpha)\Delta+0(\Delta)\}S+\{1-(i\lambda+i\mu+\alpha)\Delta+0(\Delta)\}$$
$$+\{i\mu\Delta+0(\Delta)\}S^{-1}+0(\Delta)$$

$$P_r(Z_{T+\Delta}=j|Z_t=i)=P_r(X_1+\cdots+X_i+W=j-i)$$

$$=\begin{cases}(\lambda i+\alpha)\Delta+0(\Delta), & (j=i+1)\\ 1-(i\lambda+i\mu+\alpha)\Delta+0(\Delta), & (j=i)\\ i\mu+0(\Delta), & (j=i-1)\\ 0(\Delta)\end{cases} \qquad (3\text{-}6)$$

(3-6)식에서 다음 콜모고로프전향 미분 방정식을 얻는다.

$$p'_{i0}(t)=-\alpha p_{i0}(t)+\mu p_{i1}(t)$$
$$p'_{ij}(t)=\{(j-1)\lambda+\alpha\}p_{i,j-1}-\{j(\lambda+\mu)+\alpha\}p_{ij}+(j+1)\mu p_{i,j+1} \qquad (3\text{-}7)$$
$$(j=1,2,\cdots)$$

그리고 $j=\cdots,-2,-1$에 대하여는 $p_{ij}=0$이므로 $j=0,\ \pm1,\ \pm2$에 대하여서는 (3-7)식이 성립한다. 따라서 (3-7)식에 S^j을 곱하고 모든 j에 걸쳐 합하면

$$\sum p'_{ij}S^j=\lambda S^2\sum(j-1)S^{j-2}p_{i,j-1}+\alpha S\sum S^{j-1}p_{i,j-1}-(\lambda+\mu)S\sum jS^{j-1}p_{ij}$$
$$-\alpha\sum S^jp_{ij}+\mu\sum(j+1)S^jp_{i,j+1} \qquad (3\text{-}8)$$

또

$$\pi_i(S)=E_{Z_t|Z_0=i}S^{Z_t}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}p_{ij}(t)S^j$$

를 π로 약기하면 (3-8)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial\pi}{\partial t}=\lambda S^2\frac{\partial\pi}{\partial S}+\alpha S\pi-(\lambda+\mu)S\frac{\partial\pi}{\partial S}-\alpha\pi+\mu\frac{\partial\pi}{\partial S}$$

윗 식을 정돈하면

$$\frac{\partial\pi}{\partial t}+(\lambda S-\mu)(1-S)\frac{\partial\pi}{\partial S}=\alpha(S-1)\pi \qquad (3\text{-}9)$$

윗 (3-9)식의 보조방정식은

$$\frac{dt}{1}=\frac{dS}{(\lambda S-\mu)(1-S)}=\frac{d\pi}{-\alpha(1-S)\pi} \tag{3-10}$$

을 풀려면, 우선 $dt=\dfrac{dS}{(\lambda S-\mu)(1-S)}$에서

$$(\lambda-\mu)dt=\frac{\lambda dS}{\lambda S-\mu}+\frac{dS}{1-S}$$

양변을 적분하면

$$(\lambda-\mu)t=l_n|(\lambda S-\mu)/(1-S)|+l_nk$$

$$\therefore\ e^{-(\lambda-\mu)t}\left(\frac{\lambda S-\mu}{1-S}\right)=C_1,\ \left(C_1=\frac{1}{k}\right) \tag{3-11}$$

마찬가지로 $\dfrac{dS}{(\lambda S-\mu)(1-S)}=\dfrac{d\pi}{-\alpha(1-S)\pi}$에서

$$\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)\frac{\lambda dS}{(\lambda S-\mu)}=-\frac{d\pi}{\pi}$$

양변을 적분하면

$$\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)l_n(\lambda S-\mu)=-l_n\pi+l_nC_2$$

$$\therefore\ (\lambda S-\mu)^{\alpha/\lambda}\pi=C_2 \tag{3-12}$$

그런데 주어진 편미분방정식이 1階이므로 C_1과 C_2는 함수관계에 있어야 한다. 즉,

$$(\lambda S-\mu)^{\alpha/\lambda}\pi=f\left(\frac{\lambda S-\mu}{1-S}e^{-(\lambda-\mu)t}\right) \tag{3-13}$$

한편, 초기조건 $Z_0=i$일때 $\pi_0(S)=S^i$이므로 (3, 13)식에 대입하면

$$(\lambda S-\mu)^{\alpha/\lambda}S^i=f\left(\frac{\lambda S-\mu}{1-S}\right)$$

이제 $r=(\lambda S-\mu)/(1-S)$로 두면, $S=(\mu+r)/(\lambda+r)$이 되며, $f(r)$를 결정할 수 있다.

$$f(r)=\left[\lambda\left(\frac{\mu+r}{\lambda+r}\right)-\mu\right]^{\alpha/\lambda}\left(\frac{\mu+r}{\lambda+r}\right)^i \tag{3-14}$$

또 $k=\dfrac{\lambda S-\mu}{1-S}e^{-(\lambda-\mu)t}$로 두고 k를 (3, 14)식에 대입하면

$$f(k)=\left[\lambda\left(\frac{\mu+k}{\lambda+k}\right)-\mu\right]^{\alpha/\lambda}\left(\frac{\mu+k}{\lambda+k}\right)^i=(\lambda S-\mu)^{\alpha/\lambda}\pi$$

$$\pi_t(S)=\frac{1}{(\lambda S-\mu)^{\alpha/\lambda}}\left[\frac{[(\lambda+\mu)k]}{\lambda+k}\right]^{\alpha/\lambda}\left(\frac{\mu+k}{\lambda+k}\right)^i$$

그러므로 구하는 PGf $\pi_t(S)$는 다음과 같다.

$$\pi_t(S)=\frac{1}{(\lambda S-\mu)^{\alpha/\lambda}}\left\{\frac{(\lambda-\mu)\left(\frac{\lambda\mu-\mu}{1-S}\right)e^{-(\lambda-\mu)t}}{\lambda+\frac{\lambda S-\mu}{1-S}e^{-(\lambda-\mu)t}}\right\}^{\alpha/\lambda}\left\{\frac{\mu+\frac{\lambda S-\mu}{1-S}e^{-(\lambda-\mu)t}}{\lambda+\frac{\lambda S-\mu}{1-S}e^{-(\lambda-\mu)t}}\right\}^{i} \qquad (3\text{-}15)$$

(단, $\lambda\neq\mu$인 경우)

정리 2·4 정리 2·3에 있어서 $\lambda=\mu$인 경우의 $PGF[\pi_t(S)]_{\lambda=\mu}$와 $\mu=\lambda+\varepsilon$인 경우의 $PGF[\pi_t(S)]_{\mu=\lambda+\varepsilon}$의 극한 ($\varepsilon\to0$)은 일치한다.

證明 (i) $\mu=\lambda+\varepsilon$인 경우

우선 $\mu=\lambda+\varepsilon$으로 두고 (3-15)식을 바꿔쓰면

$$\pi_t(S)=\frac{1}{[S-1)\lambda-\varepsilon]^{\alpha/\lambda}}\left\{\frac{\varepsilon\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{1-S}\right)e^{\varepsilon t}}{\lambda-\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{1-S}e^{\varepsilon t}\right.}\right\}^{\alpha/\lambda}\left\{\frac{\lambda+\varepsilon-\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{1-S}\right)e^{\varepsilon t}}{\lambda-\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{1-S}\right)e^{\varepsilon t}}\right\}^{i} \qquad (3\text{-}16)$$

그런데, (3-16)식의 2항의 급수전개에 의하여

$$\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{1-S}\right)e^{\varepsilon t}=\lambda+\left(\frac{1}{1-S}+\lambda t\right)\varepsilon+\left(\frac{t^2}{2!}\lambda+\frac{t}{1-S}\right)\varepsilon^2+\cdots \qquad (3\text{-}17)$$

$$\frac{\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{1-S}\right)e^{\varepsilon t}}{\lambda-\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{1-S}\right)e^{\varepsilon t}}=\frac{\lambda+\left(\frac{1}{1-S}+\lambda t\right)\varepsilon+\left(\frac{\lambda t^2}{2!}\right)+\frac{t}{1-S}\Big)\varepsilon^2+\cdots}{-\varepsilon\left\{\frac{1}{1-S}+\lambda t+\left(\frac{\lambda t^2}{2!}+\frac{t}{1-S}\right)\varepsilon+\cdots\right\}} \qquad (3\text{-}18)$$

그리고

$$\frac{\lambda+\varepsilon-\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{1-S}\right)e^{\varepsilon t}}{\lambda-\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{1-S}\right)e^{\varepsilon t}}=\frac{\left(\frac{1}{1-S}+\lambda t-1\right)+\left(\frac{\lambda t^2}{2!}+\frac{t}{1-S}\right)\varepsilon^2+\cdots}{\left(\frac{1}{1-S}+\lambda t\right)+\left(\frac{\lambda t^2}{2!}+\frac{t}{1-S}\right)\varepsilon+\cdots} \qquad (3\text{-}19)$$

따라서, (3-18)과 (3-19)식을 (3-16)에 대입하면

$$\pi_t(S)=\frac{1}{[(S-1)\lambda-\varepsilon]^{\alpha/\lambda}}\left[\frac{X+\left(\frac{1}{1+S}+\lambda t\right)\varepsilon+\left(\frac{\lambda t^2}{2!}+\frac{t}{1-S}\right)\varepsilon^2+\cdots}{-\left\{\frac{1}{1-S}+\lambda t+\left(\frac{\lambda}{2!}t^2+\frac{t}{1-S}\right)\varepsilon+\cdots\right\}}\right]^{\alpha/\lambda}$$

$$\left\{\frac{\left(\frac{1}{1-S}+\lambda t-1\right)+\left(\frac{\lambda}{2!}t^2+\frac{t}{1-S}\varepsilon+\cdots\right.}{\left(\frac{1}{1-S}+\lambda t\right)+\left(\frac{\lambda}{2!}t^2+\frac{t}{1-S}\varepsilon+\cdots\right.}\right\}$$

그러므로

$$[\pi_t(S)]_{\lambda=\mu}=\lim_{\epsilon\to 0}\ \pi_t(S)$$

$$=\frac{1}{\{(S-1)\lambda\}^{\alpha/\lambda}}\left\{\frac{\lambda}{-\left(\frac{1}{1-S}+\lambda t\right)}\right\}^{\alpha/\lambda}\left(\frac{\frac{1}{1-S}+\lambda t-1}{\frac{1}{1-S}+\lambda t}\right)^i$$

$$=\{S+(1-S)\lambda t\}^i/\{1+(1-S)\lambda t\}^{\alpha/\lambda+i} \qquad (3\text{-}20)$$

(ii) $\mu=\lambda$ 인 경우

$\mu=\lambda$ 일때 편미분방정식 (3-9)식은

$$\frac{\partial\pi}{\partial t}-\lambda(1-S)^2\frac{\partial\pi}{\partial S}=\alpha(S-1)\pi \qquad (3\text{-}21)$$

따라서 (3-21)식의 補助方程式

$$\frac{dt}{1}=\frac{dS}{-\lambda(1-S)^2}=\frac{d\pi}{-\alpha(1-S)\pi} \qquad (3\text{-}22)$$

그런데, (3-22)식의 제 1 항과 제 2 항에서

$$dt=\frac{dS}{-\lambda(1-S)^2}$$

$$\therefore\ \lambda t+\frac{1}{1-S}=C_1 \qquad (3\text{-}23)$$

다음 (3-21)식의 제 2 항과 제 3 항에서

$$\frac{dS}{-\lambda(1-S)^2}=\frac{d\pi}{-\alpha(1-S)\pi},\quad \frac{d\pi}{\pi}=\left(\frac{-\alpha}{\lambda}\right)\left(\frac{-dS}{1-S}\right)$$

양변을 적분하면

$$l_n\pi=-\frac{\alpha}{\lambda}l_n(1-S)+l_nC_2$$

$$\therefore\ \pi=C_2(-S)^{-\alpha/\lambda}\ \text{또는}\ (1-S)^{\alpha/\lambda}\pi=C_2 \qquad (3\text{-}24)$$

(3-23)식과 (3-24)으로부터. 구하는 일반해는

$$(1-S)^{\alpha/\lambda}\pi_t(S)=f(\lambda t-\frac{1}{1-S})\ (f\text{는 임의함수}) \qquad (3\text{-}25)$$

주어진 초기조건은 $Z_0=i$ 일 때 $\pi_0(S)=S^i$ 이므로 (3-25)식에서 任意函數(arbitrary function) f를 결정할 수 있다. 즉,

$$(1-S)^{\alpha/\lambda}S^i=f\left(\frac{1}{1-S}\right) \qquad (3\text{-}26)$$

이제 $r=\frac{1}{1-S}$로 두면, $S=\frac{r-1}{r}$이므로

$$f(r)=\left(1-\frac{r-1}{r}\right)^{\alpha/\lambda}\left(\frac{r-1}{r}\right)^{i}=\left(\frac{1}{r}\right)^{\alpha/\lambda}\left(\frac{r-1}{r}\right)^{i} \tag{3-27}$$

그러면 (3-27)식에 r 대신 $\lambda t+\frac{1}{1-S}$을 대입하면

$$f\left(\lambda t+\frac{1}{1-S}\right)=\left(\frac{1}{\lambda t+\frac{1}{1-S}}\right)^{\alpha/\lambda}\left(\frac{\lambda t+\frac{1}{1-S}-1}{\lambda t+\frac{1}{1-S}}\right)^{i}$$

$$=\left\{\frac{1-S}{(1-S)\lambda t+1}\right\}^{\alpha/\lambda}\left\{\frac{(1-S)\lambda t+S}{(1-S)\lambda t+1}\right\}^{i} \tag{3-28}$$

(3-25)식과 (3-28)식으로부터

$$(1-S)^{\alpha/\lambda}\pi_t(S)=\frac{(1-S)^{\alpha/\lambda}}{\{(1-S)\lambda t+1\}^{\alpha/\lambda}}\left\{\frac{(1-S)\lambda t+S}{(1-S)\lambda t+1}\right\}^{i}$$

$$\therefore\ \pi_t(S)=\{S+(1-S)\lambda t\}^{i}/\{1+(1-S)\lambda t\}^{\alpha/\lambda+i} \tag{3-29}$$

즉, (3-29)식과 (3-20)식의 결과는 일치한다.

參 考 文 獻

1. Kemeny and Snell, *Finite Markov Chains*, Van Nostrand, 1963, p. 69.
2. R. Coleman, *Stochastic Processes*, Allen & Unwin, London, 1974, p. 18. pp. 45～95.
3. J. L. Doob, *Stochastic Process*, John Wiley & Sons, New York, 1952, pp. 170～235.
4. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its applications*, Vol. II. John Wiley & Sons, New York, 1966, pp. 321～357.
5. J. H. Koo, *Demgraphic Analysis and Predictions of Korean Population by Markov Chain Models*, unpublished, Seoul, 1974, pp. 17～20.
6. 金子哲夫, マルコフ決定理論入門, 槇書店(東京, 1977), pp. 32～51.
7. 西田俊夫, 應用確率論, 培風館(東京, 1978), 152～184.
8. J. H. Koo, *Studies on Random Walk and Its Application*, Bulletin of the Institute for Basic Science, Inha Univ., 1981, pp. 21～25.

仁荷大學校