

高次 變位를 考慮한 보 要素의 解析

Development of Degenerated Beam Elements Using Higher-Order Displacement Profile

申 英 湜*
Shin, Young Shik

Abstract

The degeneration of two classes of thick beam elements has been conducted, one (DB6) based on the conventional Timoshenko beam assumptions whereas the other (DB7) based on the assumed cubic axial displacement profile. While an adjustable shear correction factor is required for the DB6 element to compensate for the unrealistic distribution of shear strain across the thickness, the DB7 element assumes the more realistic quadratic profile of shear strain at the outset. With the plane-stress continuum solution as reference, solutions obtained by these two element models are compared with the analytical Timoshenko solution, the analytical thin beam solution and several available solutions of other existing beam elements. The result indicates that the performance of the higher order beam element DB7 is consistently superior to any others. This is true for the whole range of aspect ratios of beam, in both static and free vibration analyses.

要 旨

본 연구에서는 3절점, 6 자유도를 갖는, 종래의 Timoshenko 보 이론에 근거한 깊은 보(Thick beam) 요소(DB6)와 3절점, 7 자유도를 갖는 3차 축방향변위를 가정한 고차 보 요소(DB7)의 3차원 연속체로부터의 Degeneration을 보여주고 있다.

DB6 보 요소는 전단변형률의 비실제적인 선형분포를 보완하기 위하여 전단계수(shear coefficient)를 도입하고 있는 반면 고차 DB7 보 요소는 보다 실제적인 전단변형률의 2차분포를 가정하고 있다.

이들 두 보 요소를 이용하여 계산된 解는 Timoshenko 방정식의 解, 얇은 보(Thin beam)의 解 및 다른 여러 보 요소들의 解와 비교된다. 본 연구의 결과는 고차 DB7 보 요소가 보의 정력학적 해석이나 자유진동 해석에 있어서 다른 보 요소들에 비해 월등히 정확함을 보여주고 있다.

1. 序 論

일반적인 Bernoulli-Euler의 보 이론은 횡변형에 의한 수평관성력(Lateral inertia force)과 탄

성력(Elastic force)만을 고려하므로 보의 동력학적 거동을 나타내기에는 적당치 않다. 왜냐하면 전단변형과 회전관성(Rotatory inertia)은 얇은 보의 초기 自然頻度(Natural frequency)에는 미세한 영향을 미치지 않지만 깊은 보의 경우에는 현저한 영향을 미치기 때문이다.

* 正會員

Rayleigh⁽¹⁾는 최초로 얇은 보 이론에 회전관성 효과만을 도입한 바 있으며 그 후 Timoshenko⁽²⁾에 의해 회전관성 뿐 아니라 전단변형도 보 이론에 도입됨으로써 얇은 보 이론은 소위 Timoshenko 보 이론이라 불리우는 깊은 보 이론으로 발전되었다. 깊은 보 이론은 보 단면에서의 변형률의 線形分布를 가정하고 있으므로 이를 보완하기 위하여 소위 전단계수를 사용하고 있다.

오랫동안 깊은 보의 振動 解析에 대한 많은 연구^(3,4,5)가 있었지만 뚜렷한 문제의 핵심을 정립하지 못한 상태에 있다. 최근에 Aalami⁽⁶⁾, Nicholson⁽⁷⁾과 Stephen^(8,9) 등은 Timoshenko 보 이론이 깊은 보의 後期振動 解析에는 부적당하다고 지적한 바 있으며 특히 Nicholson⁽⁷⁾ 등은 Timoshenko 보 이론이 전단계수의 도입 등에도 불구하고 어떤 경우에는 일반적인 얇은 보 이론보다 정확하지 못하다고 지적하였다.

構造工學 분야에 有限要素法이 도입됨에 따라 Timoshenko 보 이론에 근거한 많은 보 요소가 개발되었다. 일반적으로 이들 보 요소는 그림 1에서 보는 바와 같이 적당한 가정을 도입하여 3차원 연속체에서 직접 유도될 수 있다.

가장 대표적으로 알려진 Timoshenko 보 요소

는 Archer⁽¹⁰⁾에 의해 제안된 것으로서 휨처짐 (Bending deflection)과 전단처짐 (Shear deflection)에 대해 각각 3차와 1차 補間函數 (Interpolation function)을 이용한 2절점, 4자유도를 갖는 보 요소이다. 이 보 요소는 固定端에서의 경계조건을 정확히 만족하지 못하고 있다. 그 후 표 1에서 보는 바와 같이 자기 다른 수의 절점과 자유도를 갖는 많은 보 요소가 개발되었다.

특히 Hughes⁽¹¹⁾ 등은 보 요소의 각 자유도에 대한 補間函數의 자기 다른 次數 때문에 발생하는 소위 Shear-Locking 현상을 피하기 위하여 RSI 技法 (Reduced Shear Integration)^(11,15,27,28)을 사용하여 간단하고 정확한 2절점 보 요소를 개발하였다. 현재까지 개발된 보 요소중 가장 정확한 2절점 보 요소는 Kanok-Nukulchai⁽¹²⁾ 등에 의해 제안된 것으로서 Timoshenko의 미분방정식을 만족하는 상호의존 補間函數 (Interdependent interpolation function)를 이용한 것이며 최근에 Tessler⁽¹³⁾ 등에 의한 3절점, 6자유도를 갖는 보 요소도 비슷한 방법으로 유도되고 있다.

그러나 이러한 Timoshenko 보 요소는 Timoshenko 보 이론을 바탕으로 하고 있기 때문에 평면응력 연속체 (plane stress continuum)의 정확한 解에 비해 오차가 크며 단지 Timoshenko 방정식의 解에 대하여서만 상당히 정확하다.

본 연구에서는 Timoshenko 보 이론의 변형률의 선형분포보다 실제적인 변형률의 2차분포를 가정하여, Timoshenko 보 요소보다 연속체의 解에 근접하는 고차 DB7 보 요소를 보 연속체 (Beam-like continuum)에서 Degeneration 방법으로 유도하고 또한 DB7 요소의 정확도를 비교하기 위하여 Timoshenko 보 이론에 근거한 DB6 요소를 같은 방법으로 유도하고 있다. 이들 보 요소의 강도매트릭스와 질량매트릭스는 Galerkin 加重殘差法 (Galerkin Weighted residual method)에 의해 보의 운동방정식을 Discretization 함으로써 유도되며 2개의 Gauss 點을 이용한 RSI 技法으로 積分된다.

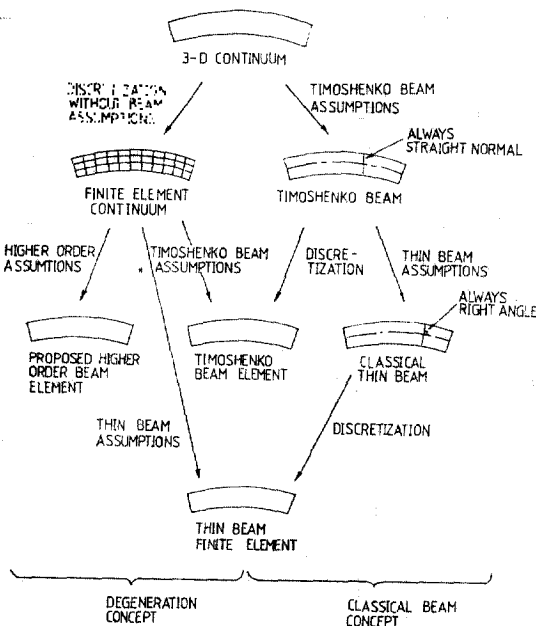



그림 1. Strategies of beam element derivation

2. Galerkin 加重殘差法에 의한 보 요소의 誘導

2.1 보의 운동방정식의 Discretization

시간 t 에서의 位置벡터 \mathbf{x} 를 갖는 보 요소의

表 1. Various configurations of Timoshenko beam e .

Element [Ref.]	Interpolation order	(No. of Nodes, No. of dof) Element model	Nodes
Archer [10]	w -cubic	(2, 4)	w, θ
Severn [18]	w -linear		
Davis et al. [19]			
Kapur [20]	w -cubic w -cubic	(2, 8)	$w_b, w_{b,x}$ $w_s, w_{s,x}$
Carnegie et al. [21]	w -cubic θ -cubic	(4, 8)	w, θ
Dong and Wolf [22]	w -quad. θ -quad.	(3, 6)	w, θ
Nickel and Secor (TIM 7) [16]	w -cubic θ -quad.	(3, 7)	w, w_x, θ at end nodes θ only at the central node
D.L. Thomas et al. [23]	w -cubic γ -linear	(2, 6)	w, θ, γ
J. Thomas and Abbas [24]	w -cubic θ -cubic	(2, 8)	w, w_x θ, θ_x
Hughes et al. [11]	w -linear θ -linear	(2, 4)	w, θ
Kanok-Nukulchai et al. [12]	w -cubic θ -quad.	(2, 4)	w, θ
Tessler and Dong (T2CL6) [13]	w -cubic θ -quad.	(3, 6)	w, θ

* Description of nodal degrees of freedom

- w = Total deflection
- w_b = Bending deflection
- w_s = Shear deflection
- θ = Bending rotation
- γ = Shear strain

表 2. Configurations of present beam elements

Present beam element	Interpolation order	(No. of Nodes, No. of dof) Element model	Nodal degrees of freedom
DB 6	w -quad. θ -quad.	(3, 6)	w, θ
DB 7	w -cubic θ -quad.	(3, 7)	w, w_x, θ at end node θ only at the central node

質點 $x(X, t)$ 는 變位벡터 u 로 다음과 같이 표시 될 수 있다.

$$x_j(X, t) = X_j + u_j(X, t) \quad (1)$$

보의 운동방정식은 Tensor 기호를 사용하여 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma_{ij,i} + \rho b_j - \rho \ddot{u}_j = 0 \quad \text{in } B \quad (2)$$

여기서 반복되는 지수는 합을 나타내며 ρ 는 질량밀도(Mass density), b 는體力벡터(Body force vector), \ddot{u} 는 가속도, B 는 Body 그리고 σ 는應力 Tensor(stress tensor)이다. 경계표면 ∂B 에 작용하는 견인력 경계조건(Traction boundary condition)은

$$n_i \sigma_{ij} - \hat{T}_j^{(w)} = 0 \quad \text{on } \partial B \quad (3)$$

여기서 w 은 ∂B 에 연직으로 작용하는 단위벡터이고 $\hat{T}^{(w)}$ 은 ∂B 에 작용하는 既知의 견인력이다.

式 (2)와 (3)에 Galerkin의 加重殘差法을 적용하면, Galerkin의 Weak-form 방정식은

$$G(u, \eta) = - \int_B \sigma_{ij,i} \eta_j dV - \int_B (\rho b_j - \rho \ddot{u}_j) \eta_j dV + \int_{\partial B} (n_i \sigma_{ij} - \hat{T}_j^{(w)}) \eta_j dA = 0 \quad (4)$$

여기서 η 는 B 의 Weight field 이다.

u 와 η 의 연속성을 이용하면 Galerkin 함수는 개개의 요소들의 합으로 표시될 수 있다. 즉,

$$G(u, \eta) = \sum G^e(u, \eta).$$

(4)에 Gauss-Green 이론을 적용하면

$$G^e(u, \eta) = \int_{B^e} \sigma_{ij} \eta_{j,i} dV - \int_{B^e} (\rho b_j - \rho \ddot{u}_j) \eta_j dV - \int_{\partial B^e} \hat{T}_j^{(w)} \eta_j dA \quad (5)$$

여기서 e 는 요소를 나타내는 기호이다. 보의 응력-변형률 관계를 4차 탄성 Tensor (Fourth order Elasticity tensor) C_{ijkl} 을 써서 표시하면

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{l,k} + u_{k,l}) = C_{ijkl} u_{l,k} \quad (6)$$

평면응력 가정을 X_2 방향에 도입하면 式(6)은 간단히

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (7)$$

로 표시할 수 있다. 여기서 E 는 Young 계수이고 G 는 전단탄성계수이다.

2.2 Timoshenko 보 요소(DB6)

그림 2에 보인 Timoshenko 보 요소 DB6는 3절점, 6자유도를 가지며 보 요소의 중심축은 X_2 가 0이 되는 선으로 정의된다.

만일 축방향변형이 무시된다면 이 보요소의 변위 w 는 다음과 같이 표시된다.

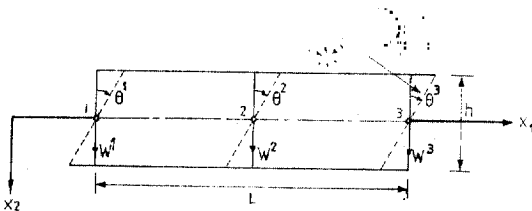


그림 2. Configuration of proposed Timoshenko beam element (DB6)

$$w(X_1, X_2) = \begin{bmatrix} 0 & -X_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(X_1) \\ \theta(X_1) \end{bmatrix} \quad (8)$$

또는 간단히

$$w(X_1, X_2) = \alpha(X_2) U(X_1) \quad (9)$$

여기서 $w(X_1)$ 은 보 중심축에서의 연직변위 (Transverse displacement), $\theta(X_1)$ 은 보 중심축의 평면회전 (plane rotation) 그리고 $U(X_1)$ 은 절점변위를 나타낸다.

요소매트릭스를 구하기 위해 $U(X_1)$ 은 2차 補間函數를 이용하여 다음과 같이 절점값 (Nodal value)으로 표시될 수 있다.

$$U(X_1) = \sum_{a=1}^n N^a(X_1) U^a \quad (10)$$

여기서 보의 Natural coordinates (r, s)로 표시한 補間函數 N^a 는 아래와 같으며 r^a 는 절점 a 의 (r, s)에서의 1차원 좌표를 나타낸다.

$$N^a(r) = \frac{1}{2} (1+r^a r) r^a r + \{1-(r^a)^2\} (1-r^2) \quad (11)$$

따라서 式 (9)는

$$w(X_1, X_2) = \sum_{a=1}^n \alpha(X_2) N^a(X_1) U^a \quad (12)$$

같은 방법으로 $\eta(X_1, X_2)$ 도 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\eta(X_1, X_2) = \sum_{a=1}^n \alpha(X_2) N^a(X_1) H^a \quad (13)$$

여기서 H^a 는 η 의 절점값이다. 式 (12)와 式 (13)을 式(5)에 대입하고 式(7)을 이용하면 요소의 Galerkin 함수는

$$G^e(U, H) = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n H^b (M^{ba} U^a + K^{ba} U^a - R^b) \quad (14)$$

여기서 요소질량매트릭스 (Consistent element mass matrix) M^{ba} 는

$$M^{ba} = \int_{L^e} \rho_x N^a N^b \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} dX \quad (a=1, \dots, n; b=1, \dots, n) \quad (15)$$

요소강도매트릭스 (Element stiffness matrix) K^{ba} 는

$$K^{ba} = \int_{L^e} EI \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N^a_x N^b_x \end{bmatrix} dX + \int_{L^e} GA \begin{bmatrix} N^a_x N^b_x & -N^a_x N^b_x \\ -N^a N^b_x & N^a N^b \end{bmatrix} dX \quad (a=1, \dots, n; b=1, \dots, n)$$

그리고 요소힘벡터 (Element generalized force vector) R^b 는

$$R^b = \int_{\Omega} \alpha^T \hat{T}^{(n)} N^b dA + \int_{\Omega} \alpha^T \rho b N^b dV$$

$$(a=1, \dots, n; b=1, \dots, n) \quad (17)$$

여기서 N, x 는 $\frac{dN}{dX_1}$ 을 의미하며 I 는 단면 2차 모우멘트 그리고 A 는 횡단면적을 나타낸다.

式 (16)의 전단강도 GA 는 앞에서 언급한 바와 같이 비실제적인 Timoshenko 모 이론의 가정을 보완하기 위해 전단계수 k 를 사용하여 kGA 로 대치된다. 전단계수 k 는 Timoshenko⁽¹⁴⁾ 에 의해 처음으로 사용되었으며 여러가지 단면형상에 대한 각기 다른 k 의 값이 제안되었다^(8,17,31,32,33,34). 직사각형 단면에 대한 k 의 값은 표에 보인 바와 같다.

表 3. Various shear coefficients recommended for rectangular cross-section

Reference	Shear coefficient k
Timoshenko [14]	2/3
Goodman [31]	$\frac{16[1-(1-2\nu)k/2]}{(1-\nu)}(1-k) = (2-k)^4$
Mindlin [32]	$\pi^2/12$
Roark [33]	5/6
Reissner [17]	5/6
Cowper [34]	$10(1+\nu)/(12+11\nu)$
Stephen [8]	$5(1+\nu)/(6+5\nu)$

따라서 보 전체에 대한 Galerkin 함수는 다음과 같이 표시된다.

$$G(U, H) = H^T [M\dot{U} + KU - R] = 0 \quad (18)$$

여기서 H 는 절점의 임의의加重벡터 (Weight vector)이다. 式 (18)을 간단히 표시하면

$$M\dot{U} + KU - R = 0 \quad (19)$$

따라서 頻度방정식 (Frequency equation)은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$(K - f^2 M)\phi = 0 \quad (20)$$

式 (20)으로부터 모든 自然頻度數 $f_i (i=1, n)$ 을 구할 수 있다.

(15), (16) 그리고 (17)式을 2개의 Gauss 點을 이용한 RSI 技法으로 적분함으로써 (15),

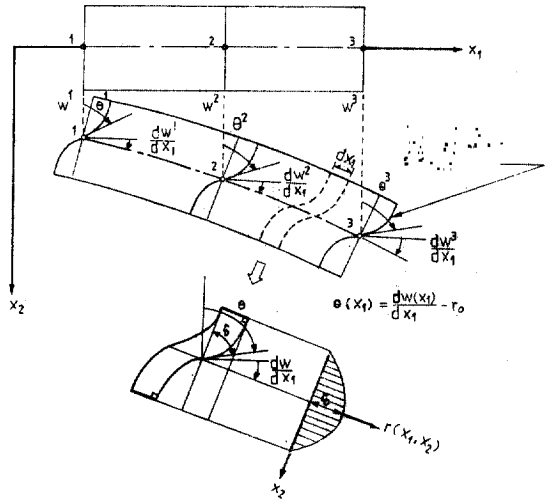


그림 3. Configuration of proposed higher order beam element (DB7)

(17)式 및 (16)式의 Bending term 은 Exact integration 되며 (16)式의 Shear term 은 Under-integration 되어 소위 Shear-Locking 현상이 일어나지 않게 된다.

2.3 高次 보 요소(DB7)

깊은 보에서의 전단에 뒤틀림 (Distortion)을 보다 정확하게 나타내기 위하여 축방향변위틀 式(21)과 같이 3차함수로 표시할 수 있다.

$$u_1(X_1, X_2) = a_0 + a_1 X_2 + a_2 X_2^2 + a_3 X_2^3 \quad (21)$$

式 (21)에서 未知의 係數 $a_0 \sim a_3$ 은 아래의 조건에 의해 결정할 수 있다.

- (1) 중립축에서의 축방향변형은 무시한다.
- (2) 전단변형률은 중립축에 대하여 대칭으로 분포한다.
- (3) 보의 兩端에서의 전단변형률은 0이다.

위의 조건 (1)과 (2)로부터 $a_0 = a_2 = 0$ 따라서 式 (21)은

$$u_1(X_1, X_2) = a_1 X_2 + a_3 X_2^3 \quad (22)$$

式 (22)에 세번째 조건을 적용하고 중립축에서의 전단변형률을 γ_0 라 하면

$$a_1 = \gamma_0 - \frac{dw(X_1)}{dX_1} \quad (23. a)$$

$$a_3 = -\frac{4}{3h^2} \gamma_0 \quad (23. b)$$

$\theta \equiv \frac{dw(X_1)}{dX_1} - \gamma_0$ 라 놓으면 式 (21)은 다음과 같이 표시된다.

$$u_1(X_1, X_2) = -X_2 \theta(X_1) - \frac{4X_2^3}{3h^2} \left[\frac{dw(X_1)}{dX_1} - \theta(X_1) \right] \quad (24)$$

여기서 θ 는 그림 3에서와 같이 보의 중립축에서의 변형단면에 접한 평면의 회전각을 의미한다. 연직방향의 변위 u_2 는

$$u_2(X_1, X_2) = w(X_1) \quad (25)$$

따라서

$$u(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} -\frac{4X_2^3}{3h^2} \frac{d(\cdot)}{dX_1} - X_2 + \frac{4X_2^3}{3h^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(X_1) \\ \theta(X_1) \end{pmatrix} \quad (26)$$

또한 중립축에서의 절점변위 $w(X_1)$ 과 $\theta(X_1)$ 은 아래와 같이 각각의 절점값으로 표시될 수 있다.

$$u(X_1, X_2) = \sum_{a=1}^3 \begin{pmatrix} \left(-\frac{4X_2^3}{3h^2}\right) N_w^a, x & \left(\frac{L}{2}\right) \left(-\frac{4X_2^3}{3h^2}\right) \hat{N}_w^a, x & \left(-X_2 + \frac{4X_2^3}{3h^2}\right) N_\theta^a \\ N_w^a & \left(\frac{L}{2}\right) \hat{N}_w^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^a \\ \left(\frac{dw}{dX_1}\right)^a \\ \theta^a \end{pmatrix} \quad (30)$$

式 (29)를 式 (26)에 대입하면 보 요소의 변위 u 를 補間函數를 이용하여 다음과 같이 각각의 절점값으로 표시할 수 있다.

여기서 L 은 요소의 길이이다.

따라서 DB6 요소와 마찬가지로 Galerkin 加重殘差法을 사용하여 DB7 보 요소의 강도매트릭스(7×7)와 질량매트릭스(7×7)을 구할 수 있다.

高次 DB7 보 요소는 모든 운동학적 경계조건을 다음과 같이 완전하게 만족하고 있다.

$$\text{固定端} : w=0, \frac{dw}{dX_1}=0, \theta=0$$

$$\text{Hinge 端} : w=0$$

3. 解析例題

여기에 제시되는 예제들은 高次 보 요소 DB7의 우월성을 보여주기 위하여 FEAP⁽¹⁵⁾ (Finite Element Analysis Program)을 사용하여 IBM 3031 Computer에 의해 解析되었다.

$$\begin{pmatrix} w(X_1) \\ \theta(X_1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{a=1}^2 N_w^a & \sum_{a=1}^2 \hat{N}_w^a & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{a=1}^3 N_\theta^a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w^a \\ \left(\frac{dw}{dX_1}\right)^a \\ \theta^a \end{pmatrix} \quad (27)$$

여기서 N_w^a , \hat{N}_w^a 및 N_θ^a 는 각각 w , $\frac{dw}{dX_1}$, θ 에 대한 補間函數를 나타낸다. 즉

$$N_w^a(r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(3r^a r - r^a r^3) \quad (a=1, 3) \quad (28.a)$$

$$\hat{N}_w^a(r) = \frac{1}{4}(-r^a - r + r^a r^2 + r^3) \quad (a=1, 3) \quad (28.b)$$

$$N_\theta^a(r) = \frac{1}{2}(1 + r^a r)r^a r + \{1 - (r^a)^2\}(1 - r^2) \quad (a=1, 2, 3) \quad (28.c)$$

式 (27)은 Computer Input을 위해 다음과 같이 표시함이 편리하다.

$$\begin{pmatrix} w(X_1) \\ \theta(X_1) \end{pmatrix} = \sum_{a=1}^3 \begin{pmatrix} N_w^a & \hat{N}_w^a & 0 \\ 0 & 0 & N_\theta^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^a \\ \left(\frac{dw}{dX_1}\right)^a \\ \theta^a \end{pmatrix} \quad (29)$$

3.1 集中荷重을 받는 캔틸레버 보

보의 自由端에 集中荷重을 받는 직사각형단면의 캔틸레버 보의 自由端처짐(Tip displacement)은 表 4와 그림 4에서 보는 바와 같다. 전단계수 $k = \frac{5}{6}$ 를 사용한 DB6 요소는 Timoshenko 解와 정확하게 일치하고 있으며 DB7 요소는 모든 $\frac{L}{h}$ 比의 범위에서 평면응력 연속체 解와 상당히 근접함을 알 수 있다. 보의 自由端에서의 단면의 변형상태를 4가지 $\frac{L}{h}$ 의 경우에 따라 스케치한 그림 5에서 알 수 있듯이 DB7 요소에 의한 단면변형상태는 어느 경우에도 다른 것에 비해 평면응력 요소의 변형상태에 가장 근접함을 알 수 있다.

3.2 캔틸레버 보의 自由振動

Nickel⁽¹⁶⁾ 등이 解析한 바 있는 캔틸레버 보 그림 6(a)를 DB6와 DB7 요소를 이용하여 보의 自由振動을 解析하였다. 그림 6에서 보는 바

表 4. Tip displacements (inch) of a cantilever beam under a transverse tip point load

L/h	Continuum solution*	Timoshenko solution ⁽³⁸⁾	FEM solution using one DB 6 element	FEM solution using one DB7 element	Classical thin beam solution
1.0	0.5264×10^{-6}	0.5333×10^{-6} (1.311)**	0.5333×10^{-6} (1.311)	0.5282×10^{-6} (0.342)	0.3333×10^{-6} (-36.683)
2.0	0.3050×10^{-5}	0.3067×10^{-5} (0.557)	0.3067×10^{-5} (0.557)	0.3059×10^{-5} (0.295)	0.2667×10^{-5} (-12.557)
3.0	0.9563×10^{-5}	0.9600×10^{-5} (0.361)	0.9600×10^{-5} (0.361)	0.9591×10^{-5} (0.267)	0.9000×10^{-5} (-5.912)
4.0	0.22066×10^{-4}	0.2213×10^{-4} (0.317)	0.2213×10^{-4} (0.317)	0.2212×10^{-4} (0.245)	0.2133×10^{-4} (-3.335)
8.0	0.17191×10^{-3}	0.1793×10^{-3} (0.227)	0.1723×10^{-3} (0.227)	0.1723×10^{-3} (0.227)	0.1723×10^{-3} (-0.704)
10.0	0.33458×10^{-3}	0.3353×10^{-3} (0.215)	0.3353×10^{-3} (0.215)	0.3353×10^{-3} (0.215)	0.3333×10^{-3} (-0.383)
16.0	0.13662×10^{-2}	0.1369×10^{-2} (0.205)	0.1369×10^{-2} (0.205)	0.1369×10^{-2} (0.205)	0.1365×10^{-2} (-0.088)

* Continuum solution is taken from the converged FEM solution, using 8 elements across the thickness in all cases, and the numbers of elements along the beam axis are 8, 16, 24, 32, 64, 80 and 128 respectively for $L/h=1, 2, 3, 4, 8, 10$ and 16, to maintain the element aspect ratio (L^*/h^*) of 2.

**Numbers in parentheses indicate the percentage discrepancies from the continuum solution.

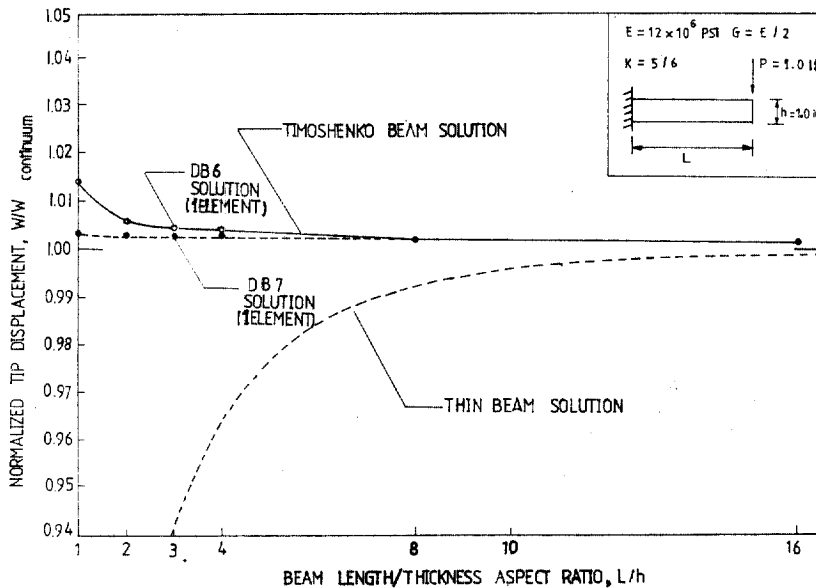


그림 4. Normalized tip displacements of a cantilever beam as a function of the beam aspect ratio.

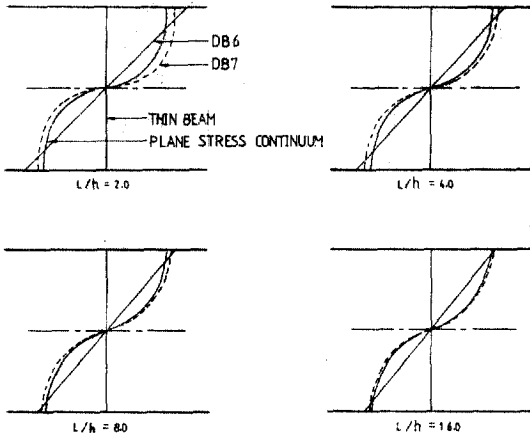


그림 5. Sketch of the deformation profile of the free end cross-section for cantilever beams of various beam aspect ratio.

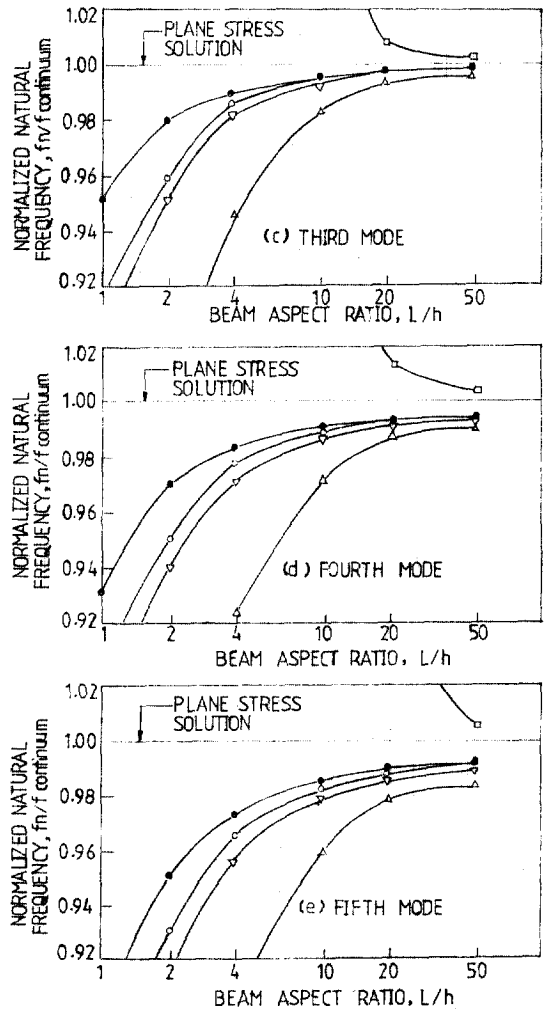
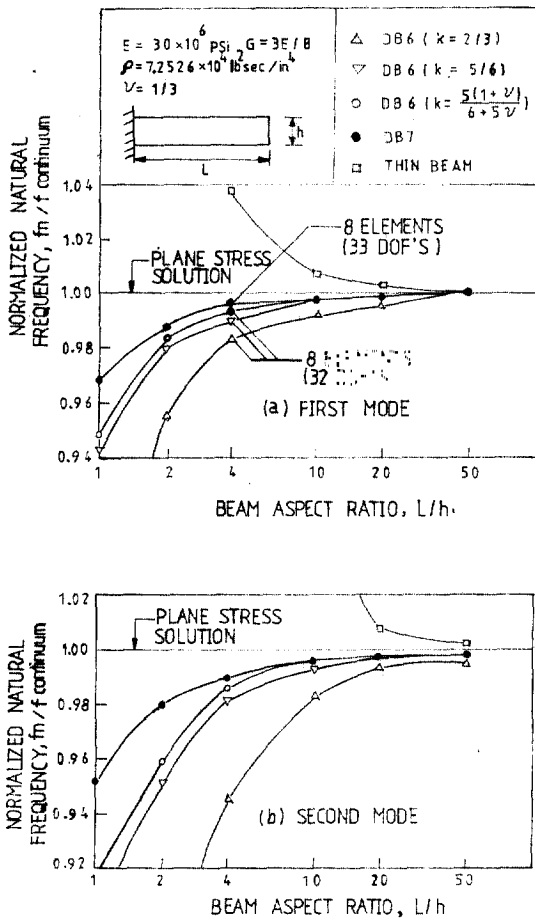


그림 6. Comparison of normalized frequencies of a cantilever beam using the DB 6 and the DB 7 elements, and the thin beam solutions

와 같이 보의 自由振動의 경우에도 다른 요소에 비해 DB7 요소가 훨씬 정확한 自然頻度數를 보여줌을 알 수 있다. 또한 Stephen⁽⁸⁾에 의해 제안된 전단계수 $k = \frac{5(1+\nu)}{6+5\nu}$ (ν : Poisson 比)를 사용한 DB 6 요소가 Timoshenko⁽¹⁴⁾나 Reissner⁽¹⁷⁾가 제안한 $k = \frac{2}{3}$ 나 $k = \frac{5}{6}$ 를 사용한 DB 6 요소보다 좋은 결과를 주고 있다.

그림 7에서는 DB 6와 DB 7 요소에 의한 自然頻度數를 자유도의 수에 따라 다른 보 요소에 의한 값과 비교하고 있다. 이들 보 요소 중에서 DB 7 요소가 자유도의 수가 증가함에 따라 가장 두드러진 수렴현상(Convergence behaviour)을

表 5. Natural frequencies (f_n) of a simply-supported thick beam ($L/r=10$) using different types of beam elements and their percentage discrepancies(ϵ) from the analytical Timoshenko solution. Numbers in parentheses indicate No. of elements and No. of dof's, respectively.

Mode No.	Analytical Timoshenko solution [13] f_n (sec ⁻¹)	Analytical thin beam solution [40]		Archer [10] (20, 40)		Dong and Wolf [22] (10, 40)		Tessler and Dong [13] T2CL6 (10, 40)		Present beam elements			
		f_n	% ϵ	f_n	% ϵ	f_n	% ϵ	f_n	% ϵ	DB6 (10, 40)		DB7 (10, 41)	
										f_n	% ϵ	f_n	% ϵ
1	8.36487	9.8696	17.99	8.3892	0.29	8.3876	0.27	8.36493	0.001	8.3651	0.003	8.3649	0.0004
2	25.1965	39.478	56.68	25.396	0.79	25.352	0.62	25.199	0.01	25.204	0.031	25.1982	0.007
3	43.775	88.826	102.91	44.391	1.41	44.166	0.89	43.798	0.03	43.834	0.134	43.786	0.025
4	55.9016	157.91	182.46	56.802	1.61	56.614	1.27	55.9017	0.0002	55.9017	0.0002	55.9010	-0.001
5	62.509	246.74	294.73	63.875	2.19	63.242	1.17	62.610	0.16	62.747	0.381	62.693	0.294
6	65.958	355.31	438.69	66.963	1.52	66.619	1.00	65.9581	0.0006	65.9581	0.0006	65.729	-0.347
7	81.088	483.61	496.40	83.647	3.16	82.325	1.53	81.398	0.38	81.781	0.855	81.345	0.317
8	87.588	631.65	623.64	86.027	1.64	88.186	0.68	87.601	0.02	87.599	0.012	87.572	-0.018
9	99.483	799.44	703.59	103.79	4.33	101.48	2.01	100.23	0.75	101.12	1.650	100.14	0.660
10	113.43	986.96	770.10	115.77	2.06	114.00	0.50	113.60	0.15	113.52	0.080	113.27	-0.140

表 6. Natural frequencies (f_n) of a simply-supported thin beam ($L/r=50$) for different types of beam elements, and their percentage discrepancies(ϵ) from the analytical Timoshenko solution. Numbers in parentheses indicate No. of elements and No. of dof's, respectively.

Mode No.	Analytical Timoshenko solution [13] f_n (sec ⁻¹)	Analytical thin beam solution [40]		Archer [10] (20, 40)		Dong and Wolf [22] (10, 40)		Tessler and Dong [13] T2CL6 (10, 40)		Present beam elements			
		f_n	% ϵ	f_n	% ϵ	f_n	% ϵ	f_n	% ϵ	DB6 (10, 40)		DB7 (10, 41)	
										f_n	% ϵ	f_n	% ϵ
1	9.78902	9.8696	0.823	9.7907	0.02	9.7954	0.07	9.78909	0.0007	9.7893	0.003	9.78909	0.007
2	38.2444	39.478	3.23	38.274	0.08	38.347	0.27	38.2485	0.01	38.260	0.040	38.245	0.002
3	82.986	88.826	7.04	83.162	0.21	83.515	0.64	83.031	0.05	83.149	0.196	82.989	0.003
4	140.95	157.91	12.04	141.59	0.45	142.65	1.20	141.19	0.17	141.76	0.578	140.94	-0.005
5	209.12	246.74	17.99	210.86	0.83	213.35	2.02	209.95	0.40	211.84	1.301	209.00	0.055
6	284.90	355.31	24.71	288.84	1.38	293.81	3.13	287.16	0.79	291.99	2.490	284.32	-0.203
7	366.23	483.61	32.05	373.99	2.12	382.97	4.57	371.43	1.42	381.90	4.280	364.10	-0.581
8	451.55	631.65	38.66	465.37	3.06	480.27	6.36	462.13	2.34	482.32	6.814	444.73	-1.510
9	539.73	799.44	48.12	562.47	4.21	584.74	8.34	559.26	3.62	595.21	10.280	518.09	-4.009
10	629.91	986.96	56.68	665.05	5.58	669.96	6.36	665.53	5.65	723.94	14.928	605.67	-3.849

보이고 있으며 평면응력 연속체의 값에 가장 잘 수렴하고 있음을 알 수 있다.

3.3 單純支持보의 自由振動

DB7 요소의 정확성을 설명하기 위해 여러번 解析된 바 있는 單純支持보^(10,13,22)의 自由振動을 解析하였다. 이 單純支持보는 $\frac{E}{G} = \frac{8}{3}$, 그리고 $(\frac{EI}{\rho AL^4})^{1/2} = 1$ 이 되게끔 단면이 결정되었으며 얇은 보 ($\frac{L}{r} = 50$)의 경우와 깊은 보 ($\frac{L}{r} = 10$)의 경우를 解析하였다. 여기서 r 은 단면 2

차반경을 의미한다. 만족한 결과를 얻기 위해 보를 각각 10개의 DB6와 DB7 요소로 분할하여 解析하였다. $\frac{L}{r} = 10$ 과 $\frac{L}{r} = 50$ 의 경우에 대한 보 요소들의 初期 10개의 自然頻度數와 Timoshenko 解에 대한 오차는 表 5와 表 6에 보여지고 있다. DB7 요소는 보의 얇고 깊음에 관계없이 어떤 경우에서나 다른 보 요소들보다 매우 정확한 값을 보여주고 있으며 DB6 요소도 다른 두 요소들^(10,22)보다 대체로 정확한 값을 보여주고 있음을 알 수 있다.

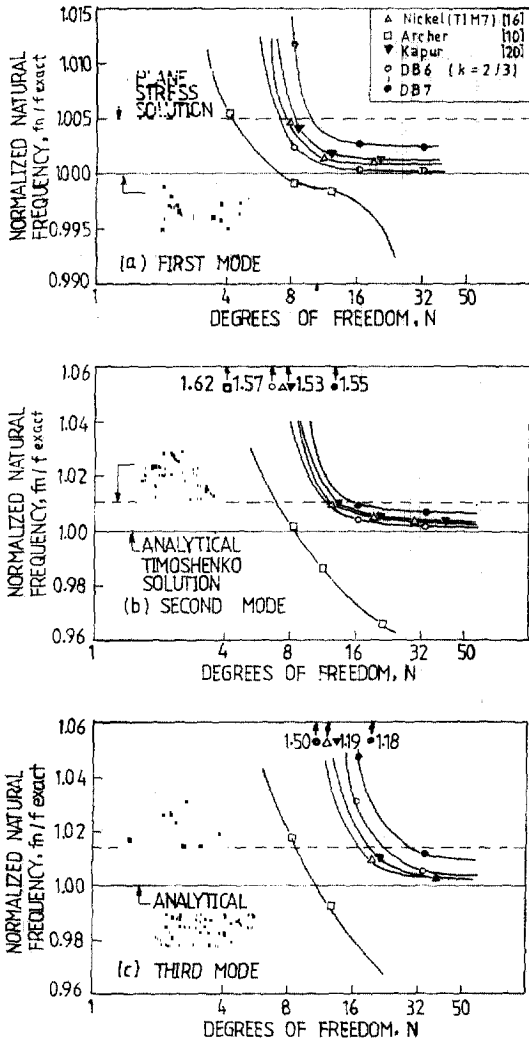


그림 7. Convergence characteristics of various Timoshenko beam elements in comparison with those of the DB6 and DB 7 elements.

4. 結 論

본 연구에서는 Timoshenko 보 이론에 근거한 DB6 보 요소와 3차 축방향 변위를 가정한 DB7 보 요소의 Degeneration 을 보여주었다. 이들 보 요소들에 대한 결론은 다음과 같이 요약될 수 있다.

(1) 보의 정력학적 解析에서는 평면응력 연속체 解를 기준으로 하여 하나의 DB7 보 요소는 보의 大小에 관계없이 현저하게 정확한 결과를 보여줄 뿐 아니라 다른 Timoshenko 보 요소들에

비하여도 월등한 정확성을 나타내고 있다. 이러한 정확성은 단지 DB7 보 요소의 실제에 가까운 축방향변위의 가정에 기인한다.

(2) 自由振動의 경우에도 마찬가지로 DB7 보 요소는 항상 어떠한 Timoshenko 보 요소들 보다 좋은 결과를 보여주고 있으며 이러한 우월성은 특히 깊은 보의 경우에 더욱 뚜렷하다. 또한 DB7 보 요소는 극히 얇은 보의 경우에도 다른 보 요소들에 비하여 월등한 정확성을 보여주고 있으며 어떠한 경계조건도 완벽하게 만족하고 있다.

이상에서 알 수 있듯이 DB7 보 요소는 지금까지 개발된 보 요소중 보의 정력학적 解析이나 自由振動 解析에 가장 효율적이고 정확한 보 요소라고 할 수 있다.

감사의 말씀

본 연구를 수행함에 있어 아낌없는 助言과 指導를 해주었던 Asian Institute of Technology 의 K. Worsak 教授와 M. Wieland 教授에게 깊은 감사의 뜻을 표하는 바이다.

參 考 文 獻

1. Lord Rayleigh, 'On the free vibration of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter', *Proc. of London Math. Soc.*, 10, 225~234 (1889).
2. S.P. Timoshenko, 'On the correction for shear of the differential equation for the transverse vibrations of prismatic bars', *Phil. Mag.*, 41, 744~746 (1921).
3. R.A. Anderson, 'Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory', *ASME Trans., J. Appl. Mech.*, 20, 504~510 (1953).
4. C. Dolph, 'On the Timoshenko theory of transverse beam vibrations', *Quart. Appl. Math.*, 12, 175~178 (1954).
5. T.C. Huang, 'The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with

- simple end conditions', *ASME Trans., J. Appl. Mech.*, 28, 579~584 (1961).
6. B. Aalmi and B. Atzori, 'Flexural vibrations and Timoshenko's beam theory', *AIAAJ.* 12, 679~685 (1974).
 7. J.W. Nicholson and J.G. Simmonds, 'Timoshenko beam theory is not always more accurate than elementary beam theory', *ASME Trans., J. Appl. Mech.*, 44, 337~338 (1977).
 8. N.G. Stephen, 'Considerations on second order beam theories', *Int. J. Solids. Structures*, 17, 325~333 (1981).
 9. N.G. Stephen and M. Levinson, 'A second order beam theory', *J. Sound. Vib.*, 67, 293~305 (1979).
 10. J.S. Archer, 'Consistent matrix formulations for structural analysis using finite-element techniques', *AIAAJ.*, 3, 1910~1918 (1965).
 11. T.J.R. Hughes, R.L. Taylor and W. Kanok-Nukulchai, 'A simple and efficient finite element for plate bending', *Int. J. num. Meth. Eng.*, 11, 1529~1543 (1977).
 12. W. Kanok-Nukulchai, P.H. Dayawansa and P. Karasudhi, 'An exact finite element model for deep beams', *Int. J. Structures*, 1, 1~7 (1981)
 13. A. Tessler and S.B. Dong, 'On a hierarchy of conforming Timoshenko beam elements', *Computers & Structures*, 14, 335~334 (1981).
 14. S.P. Timoshenko, *Strength of Materials-Part I*, 3rd Ed., D. Van Nostrand, New Jersey, 1955.
 15. O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, 3rd Ed., McGraw-Hill, New York, 1977.
 16. R.E. Nickel and G.A. Secor, 'Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements', *Int. J. num. Meth. Eng.*, 5, 243~253 (1972).
 17. E. Reissner, 'On bending of elastic plates', *Quart. Appl. Mech.*, 5, 65~68 (1947).
 18. R.T. Severn, 'Inclusion of shear deformation in the stiffness matrix for a beam element', *J. Strain. Anal.*, 5, 239~241 (1970).
 19. R. Davis, R.D. Henshell and G.B. Warburton, 'A Timoshenko beam element', *J. Sound. Vib.*, 22, 475~487 (1972).
 20. K.K. Kapur, 'Vibrations of a Timoshenko beam using finite-element approach', *J. Acoust. Soc. Am.* 40, 1058~1063 (1966).
 21. W. Carnegie, J., Thomas and E. Dokumaci, 'An improved method of matrix displacement analysis in vibration problems', *Aero. Quart.*, 20, 321~332 (1969).
 22. S.B. Dong and J.A. Wolf, 'Effect of transverse shear deformation on vibrations of planar structures composed beam-type elements', *J. Acoust. Soc. Am.*, 53, 120~127 (1973).
 23. D.L. Thomas, J.M. Wilson and R.R. Wilson, 'Timoshenko beam finite element', *J. Sound. Vib.*, 31, 315~330 (1973).
 24. J. Thomas and B.A.H. Abbas, 'Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam', *J. Sound. Vib.*, 41, 291~299 (1975).
 25. D.L. Thomas, 'Comments on finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam', *J. Sound. Vib.*, 46, 285~290 (1976).
 26. D.J. Dawe, 'A finite element for the vibration analysis of Timoshenko beams', *J. Sound. Vib.*, 60, 11~20 (1978).
 27. W. Kanok-Nukulchai, 'A simple and efficient finite element for general shell analysis', *Int. J. num. Meth. Eng.*, 14, 179~200 (1979).
 - 28) W. Kanok-Nukulchai, R.L. Taylor and T.J.R. Hughes, 'A large deformation formulation for shell analysis by finite element method', *Computers & Structures*, 13, 19~27 (1981).
 29. K.S. Sze, 'A large deformation analysis of two dimensional elastic framed structures', *M Eng. Thesis, AIT*, 1981.
 30. T. Iwakuma, M. Ai and F. Nishino, 'On derivation of Timoshenko beam stiffness equation', *Proc. JSCF*, 312, 119~128 (1981).
 31. L.F. Goodman and J.G. Sutherland, 'Discussion of Natural frequencies of continuous beams of uniform span length', *ASME Trans., J. Appl. Mech.*, 18, 217~218 (1951).
 32. R.D. Mindlin and H. Deresiewicz, 'Timoshenko's shear coefficient for flexural vibrations of beams', *TR10, ONR Project NR064-388, 1953, Dept. Civil Eng.*, Columbia University, New York.
 33. R.J. Roark, *Formulas for Stress and Strain*,

- 3rd Ed., McGraw-Hill, New York, 1954.
34. G.R. Cowper, 'The shear coefficient in Timoshenko beam theory', *ASME Trans., J. Appl. Mech.*, 33, 335~340 ((1966).
 35. G.R. Cowper, 'On the accuracy of Timoshenko's beam theory', *ASCE, EM6*, 94, 1447~1452 (1968).
 36. T. Kaneko, 'An experimental study of the Timoshenko's shear coefficient for flexurally vibrating beams', *J. Phys. D: Appl. Phys.* 11, 1979~1988 (1978).
 37. S.P. Timoshenko and D.H. Young, *Vibration Problems in Engineering*, 3rd Ed., D. Van Nostrand, New Jersey, 1961.
 38. C.L. Dym and I.H. Shames, *Solid Mechanics: A Variational Approach*, McGraw-Hill, New York, 1973.
 39. R.D. Cook, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Wiley, New York, 1974.
 40. R.W. Clough and J. Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1975.

(接受: 1982. 8. 20)