

# 不規則의인 支持形態를 갖는 曲線桁橋의 靜的解析에 관한 研究

A Study on the Statical Analysis of the Curved Girder Bridges  
Having Irregular Supports

馬 根 殖\*  
Mha, Geun Sick  
鄭 慶 燮\*\*  
Chung, Kyoung Sup

## Abstract

This study is directed toward the statical analysis of the curved girder bridge having irregular supports, This paper is specifically intended to propose an analytical methods in order to obtain the forces and displacements a section of girder bridges for mini-computer design.

Transfer matrix, one of the efficient and widely used techniques in the structural analysis for mini-computer, is applied for characteristics of the section of curved girder bridges considering practical applicability of the solution method. Also, by eliminating the terms which contain the central angle of the member, in their denominators it has shown that this solution may also be used for the girder bridges whose axes become straight.

## 要 旨

本 研究는 不規則의인 支持形態를 갖는 曲線桁橋의 靜的 解析에 關한 것으로서 그 目的은 小型 電子計算機에 의해 曲線桁橋의 斷面力과 變位量을 구하기 위한 解法을 提示하는 데 있다.

本 研究에서는 曲線桁橋 斷面特性과 풀이式의 實際設計에의 利用 可能性을 考慮하여 傳達매트릭스法을 適用하였다. 이 傳達매트릭스法은 小型 電子計算機에 의한 構造解析에 효율적이며 보편적으로 사용되는 電算解法이다. 또한 本 研究에서는 部材中心角으로 나누어지는 項을 제거시킴으로써 桁의 軸線이 直線化되어도 풀이가 可能하도록 하였다.

## 1. 序 論

最近의 道路線形計劃에 있어서는 交通工學的 配慮가 우선하여 路線形狀이 決定되고 있으므로 立體交差, 立體 by-pass 路線 等の 曲線橋 形式이 많이 要求되고 있다.

그런데 從來의 曲線橋 解析은 高次的인 理論과 複雜한 計算이 所要되므로 一般의으로 設計者는 近似的인 解法으로 使用하여 오다가, 近來 大型 電子計算機를 利用한 構造解析의 發展으로 曲線桁의 解析을 위한 프로그램도 많이 發表되고 있다.

그러나 最近 많이 보급되고 있는 小型電子計算機로서 풀이가 可能的인 曲線橋의 解析法은 아

\* 正會員·漢陽大學校 工科大學 教授

\*\* 漢陽大學校 工科大學 授業助教

직 우리나라에서는 發表되고 있지 않고 있다. 따라서 本 研究論文에서는 小型 電子計算機(PC-1500, 8K-bytes module 使用, sharp 社)로서 演算可能한 曲橋桁 解析方法을 提示한다.

그런데, 曲線桁橋의 斷面形狀은 통상 非對稱 斷面이 되기 때문에 圖心과 剪斷中心이 一致하지 않는다. 게다가 桁軸線이 曲率을 갖기 때문에 任意荷重을 받을 때의 嚴密한 基本式을 세우면 曲率面外 變形과 曲率面內의 變形이 同時에 일어나는 複雜한 微分方程式을 얻게 된다<sup>(1,2,3)</sup>.

任意斷面을 갖는 曲線桁橋에 任意的 靜的荷重이 作用할 경우를 對象으로 하기 위해 槓比楮理論에 의한 基礎微分方程式으로 文獻<sup>(1,2)</sup>에서의 式을 利用하는 것으로 하고, 構造解析法으로는 桁의 軸線이 크로소이드 曲線과 같이 變化하는 경우, 桁의 높이가 變化하는 경우 뿐만 아니라 桁의 支持條件이 어떠한지라도 취급이 容易하며, 또한 小型電子計算機에 의해서도 演算이 可能한 傳達매트릭스法을 使用하였다<sup>(3,4,5,6,7,8,9,10)</sup>.

또한 桁의 軸線이 直線化되어도 취급할 수 있도록 部材의 部材角으로 나누어지는 項이 없도록 曲線桁 풀이式을 變形하였으며 曲率面外 變形에 關한 格間行列에서의 雙曲線函數項은 比楮定數比가 커질 때 計算精密度가 나빠지므로 이 점에 對하여는 雙曲線函數項을 分離 單位化하는 方法에 의해 高精度의 解가 얻어지도록 하였다<sup>(5)</sup>.

## 2. 曲線桁橋의 基本式

### 2.1 記號 및 解析上의 假定

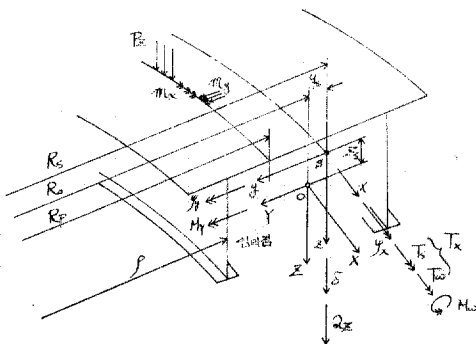


그림 1. 座標系

표 1. 記號 表

기 호	기호의 정의		
과 표 점	S	전단 중심	
	O	도심	
	D	횡단면상의 임의점	
	P	하중재하점	
과 표 축	x, y, z	전단중심을 원점으로 한 좌표계(오른손 좌표계)	
	X, Y, Z	도심을 원점으로 한 좌표계(오른손 좌표계)	
	중심 각	$\phi$	각좌표
	곡 물 반 경	$S_s$	각각 곡률중심으로부터
$S_0$		S, OP, D 점까지의 거리	
$S_p$			
$\rho$			
길이	$\lambda$	곡선형 부재 길이	

표 2. 작용하중과 단면력·변형량

기 호	기호의 정의	
작 용 하 중	$P_z$	z축 방향으로 작용하는 등분포 선하중
	$m_x$	x, y축 방향으로 작용하는 등분포 torque 하중
	$m_y$	
단 면 력	$Q_z$	Z축방향의 전단력
	$M_y$	Y축 둘레의 휨모우멘트
	$T_s$	단순 비틀모우멘트
	$T_w$	뒹비틀 모우멘트
	$T_x$	비틀모우멘트(= $T_s + T_w$ )
	$M_w$	뒹모우멘트
변 위 량	$\delta$	S점의 연직변위
	$\phi_x$	S점의 단면회전각
	$\phi_y$	y축 둘레의 처짐각
	$\theta$	S점의 비틀각(= $\phi_x + \delta/R_s$ )

표 3. 단면정수 및 재료특성

단 면 정 수	$I_y$	y, z축에 관한 단면 2차모우멘트
	$I_z$	
	$I_{yz}$	yz축에 관한 단면 상승 모우멘트
	$I_y$	회산단면 2차 모우멘트
	J	단순비틀상수
	$C_w$	뒹 비틀 상수
재 료 특 성	E	탄성계수
	G	전단탄성계수

수평面內에 曲率을 갖는 薄板曲線形의 座標系

를 그림 1과 표 1과 같이 定義한다. 표 2에 定義한 荷重과 그것에 의해 생기는 斷面力, 變形量의 符號는 그림 1의 좌상표 方向을 正(+)으로 하고 本 論文에서 使用하는 斷面諸量은 표 3과 같이 定義한다.

그리고 以下의 解析에 있어서의 假定 및 適用制限은 다음과 같다.

- 1) 變形 前의 桁은 한 平面內에서 뒹고 있다.
- 2) 桁의 斷面 및 曲率은 한 區間마다 一定하고, 境界斷面에서 양쪽 桁軸線의 接線方向은 一致한다.
- 3) 應力 및 變形率 사이에는 Hook의 法則이 成立한다.
- 4) 微小變形 理論이다.
- 5) 桁은 그 桁의 曲率面에 垂直인 荷重의 作用에 대하여  $N=0, M_x=0$ 가 成立되도록 支持되어 있다.

### 2.2 曲線桁橋의 基礎微分方程式

그림 1에 表示한 것처럼 曲線桁橋에 任意의 荷重이 作用할 경우 斷面力에 關한 힘의 平衡式

$$\begin{pmatrix} \delta(\phi) \\ \varphi_x(\phi) \\ \varphi_y(\phi) \\ T_s(\phi) \\ M_w(\phi) \\ M_Y(\phi) \\ T_x(\phi) \\ Q_z(\phi) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_s(1-\cos\phi) & R_s\sin\phi & f_{14} & \dots\dots\dots & f_{19} \\ & \cos\phi & -\sin\phi & f_{24} & & f_{29} \\ & \sin\phi & \cos\phi & f_{34} & & \vdots \\ & & & \cos h\kappa & f_{45} & \vdots \\ & & & f_{54} & \cos h\kappa & f_{56} \\ & & & & \cos\phi & -\sin\phi & R_s\sin\phi & f_{68} \\ & & & & \sin\phi & \cos\phi & R_s(1-\cos\phi) & f_{79} \\ & & & & & & 1 & f_{89} \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta(0) \\ \varphi_x(0) \\ \varphi_y(0) \\ T_s(0) \\ M_w(0) \\ M_Y(0) \\ T_x(0) \\ Q_z(0) \\ 1 \end{pmatrix} \dots\dots(3)$$

式 (3)의 要素  $f_{ij}$ 는 모두 雙面線項을 包含하고 있으므로 그대로의 形態로 使用하면 文獻(5)에서 說明한 바와 같이 비틀定數比(= $\nu\lambda$ )가 커질 때 雙曲線函數로서 주어지는 要素의 값은 다른 項에 比하여 매우 크게 되고, 매트릭스곱셈을 계속해 나가면 演算誤差가 集積하는 原因으로 된다. 그래서 斷面諸量에 의해 結定되는 無次元과 라메타  $\alpha, \nu$ 를 다음과 같이 定義하고 새로운 變位量  $\delta_s, \varphi_{xs}, \varphi_{ys}$ 를 使用하여 雙曲線函數項을 分離한다.

$$\alpha = R_s \sqrt{\frac{GJ}{EC_w}} = R_s \nu, \quad I = I_Y \frac{R_s}{R_0}, \quad \lambda = \phi R_s \dots\dots(4)$$

을 斷面의 剪斷中心軸上에 세우면

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_z}{dx} &= -P_z \\ \frac{dM_Y}{dx} - Q_z + \frac{T_x}{R_s} &= -m_y \\ \frac{dT_x}{dx} - \frac{M_Y}{R_s} &= -m_x \\ T_x &= T_s + T_w, \quad T_w = \frac{dM_w}{dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

變形量과 斷面力의 關係式은

$$\left. \begin{aligned} T_x &= GJ \left( \frac{1}{R_s} \frac{d\delta}{dx} + \frac{d\varphi_x}{dx} \right) \\ -EC_w \left( \frac{1}{R_s} \frac{d^3\delta}{dx^3} + \frac{d^3\varphi_x}{dx^3} \right) \\ M_Y &= -EI_Y \frac{R_s}{R_0} \left( \frac{d^2\delta}{dx^2} - \frac{\varphi_x}{R_s} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

로 된다<sup>(1)</sup>.

### 3. 傳達매트릭스法에 의한 曲線桁橋의 解析

式 (1), (2)와  $y$ 軸에 대한 처짐角이  $\varphi_y = d\delta/dx$ 되는 條件을 考慮하여 微分方程式을 풀면 다음과 같은 matrix로 표시된다.

#### 3.1 雙曲線函數項의 分離와 單位化

傳達매트릭스는 式 (3)과 같이 部材左端의 變位量, 斷面力 등의 物理量을 右端에 傳達하는 것이지만, 變位量과 斷面力과를 組合시켜 새로이 定義된 物理量을 傳達하여도 一般性을 잃지 않는다. 그래서 다음과 같은 物理量을 導入한다

$$\left. \begin{aligned} \delta_s &= \delta + \frac{\lambda\phi}{GJ(\phi^2 + \kappa^2)} M_w = \delta + aM_w \\ \varphi_{xs} &= \varphi_x + \frac{\lambda^2}{EC_w(\phi^2 + \kappa^2)} M_w = \varphi_x + bM_w \\ \varphi_{ys} &= \varphi_y - aT_s \end{aligned} \right\} (5)$$

式(5)를 式(3)에 代入하면  $T_s(\phi)$ 와  $M_w(\phi)$ 의

行要素만이 雙曲線函數를 包含하게 된다.

### 3.2 雙曲線函數項의 單位化

3.1에서  $T_s(\phi)$ 와  $M_w(\phi)$ 의 行要素만이 雙曲線函數項을 갖도록 分離되었으므로 單純비틀 모우멘트  $T_s$ 와 됨 모우멘트  $M_w$ 를 다음과 같이 單位化한다.

$$\left. \begin{aligned} T_s &= T_s / \cos h \kappa \\ M_w &= M_w / \cos h \kappa \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

그러면 格點  $k-1$ 과 格點  $k$  사이의 格間길이  $\lambda_k (=R_s \phi_k)$  되는 曲線桁橋 要素에 대하여 다음과 같이 傳達메트릭스로 表示할 수 있다.

$$y_k^r = F_k \cdot y_k^l \dots\dots(7)$$

여기서  $y_k^l, y_k^r$ 은 각각 部材  $k$ 의 左端( $\phi=0$ ) 및 右端( $\phi=\phi_k$ )의 狀態벡터이다. 또  $F_k$ 는 求하려는 雙曲線函數項을 分離, 單位化한 部材  $k$ 의 格間行列이고 그것들의 要素內의 雙曲線函數項들은 文獻(5)에서 밝힌 바와 같이  $\kappa$ 값이 크게 되어도 어느것도 1.0 정도로 되어 高精密度의 演算이 可能하다.

다음, 第  $k+1$  格點 左端의 狀態벡터  $y_{k+1}^l$ 는

$$y_{k+1}^l = P_k \cdot y_k^r \dots\dots(8)$$

로서 表示할 수 있다. 여기서,  $P_k$ 는 格點行列이고, 格點  $k$ 에 관한 變形量의 連續條件, 斷面力의 平衡條件을 나타낸 것으로서 그림 2와 같이 힘과 同時に 비틀을 考慮하고 이들을 모두 桁中心軸에 關한 座標系( $x, y, z$ )에서 생각하면 다음과 같다.

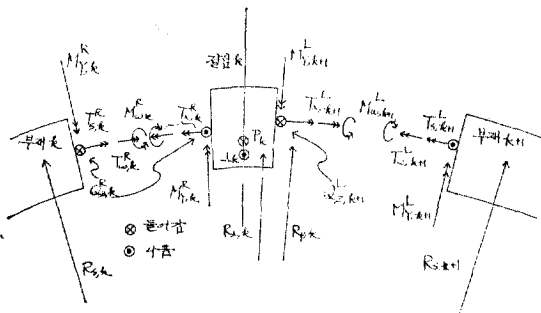


그림 2. 節點의 連續條件

그림 2와 같이 格點行列을 위한 連續條件式을 세우면,

$$Q_{z,k+1}^L = Q_{z,k}^R - P_k \dots\dots(a)$$

$$\begin{aligned} T_{x,k+1}^L &= T_{x,k}^R + (R_{s,k+1} - R_{s,k}) Q_{z,k}^R \\ &\quad - (R_{s,k} - R_p) P_k \dots\dots(b) \end{aligned}$$

단, 여기서  $P_k$ 는 節點에 作用하는 集中荷重을,  $R_p$ 는 曲率中心에서 節點荷重 作用點까지의 距離를 나타낸다. 또한,

$$M_{y,k+1}^L = M_{y,k}^R \dots\dots(c)$$

$$\phi_{x,k+1}^L = \phi_{x,k}^R \dots\dots(d)$$

$$\delta_{k+1}^L = \delta_k^R - (R_{s,k+1} - R_{s,k}) \phi_{x,k}^R \dots\dots(e)$$

그런데,  $\frac{d\delta}{dx} = \frac{d\delta}{R_s d\phi} = \phi_y$ 이므로

$$\begin{aligned} \phi_{y,k+1}^L &= \frac{1}{R_{s,k+1}} \frac{d\delta_{k+1}^L}{d\phi_k} \\ &= \frac{1}{R_{s,k+1}} \left( \frac{d\delta_k^R}{d\phi_k} - (R_{s,k+1} - R_{s,k}) \frac{d\phi_{x,k}^R}{d\phi_k} \right) \\ &= \frac{d\delta_k^R}{R_{s,k}} \frac{R_{s,k+1} - R_{s,k}}{R_{s,k+1}} \left( \frac{d\delta_k^R}{R_{s,k}} + \frac{d\phi_{x,k}^R}{d\phi_k} \right) \frac{R_{s,k}}{R_{s,k}} \\ &= \phi_{y,k}^R \frac{R_{s,k+1} - R_{s,k}}{R_{s,k+1}} \cdot R_{s,k} \cdot \frac{T_{s,k}^R}{GJ} \\ &= \phi_{y,k}^R - \frac{R_{s,k}}{R_{s,k+1}} (R_{s,k+1} - R_{s,k}) \frac{d\theta_k^R}{R_{s,k} d\phi_k} \dots\dots(f) \end{aligned}$$

단, 여기서  $\theta = \phi_x + \delta / R_s$  되는 剪斷中心에서의 비틀각이다.

따라서 위의 式 (e)로부터 다음 式을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{s,k+1}} \frac{d\theta_{k+1}^L}{d\phi_k} &= \left( \frac{R_{s,k}}{R_{s,k+1}} \right)^2 \frac{1}{R_{s,k}} \frac{d\theta_k^R}{d\phi_k} \\ \text{즉, } T_{s,k+1}^L &= \left( \frac{R_{s,k}}{R_{s,k+1}} \right)^2 T_{s,k}^R \dots\dots(g) \end{aligned}$$

됨 모우멘트에 關한 連續條件式은 가상일의 原理로부터 구할 수 있다.

$$\delta_{k+1}^R = \phi_{x,k+1}^R = \phi_{y,k+1}^R = 0, \quad \frac{1}{R_{s,R}} \frac{d\theta_k^R}{d\phi_k} = 1$$

을 選擇하면 式 (d, e, f, g)로부터

$$\begin{aligned} \delta_{k+1}^R &= \phi_{x,k+1}^R = 0, \\ \phi_{y,k+1}^R &= -\frac{R_{s,k}}{R_{s,k+1}} (R_{s,k+1} - R_{s,k}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R_{s,k+1}} \frac{d\theta_{k+1}^L}{d\phi} = \left( \frac{R_{s,k}}{R_{s,k+1}} \right)^2$$

이 된다. 따라서,

$$\begin{aligned} 1 \times M_{wk}^R - \left( \frac{R_{s,k}}{R_{s,k+1}} \right)^2 \times M_{wk+1}^L + 0 \times M_{yk}^R \\ - \left( -\frac{R_{s,k}}{R_{s,k+1}} \right) (R_{s,k+1} - R_{s,k}) M_{yk+1}^L = 0 \end{aligned}$$

그러므로

$$M_{w,k+1}^L = \left( \frac{R_{S,k+1}}{R_{S,k}} \right)^2 M_{w,k}^R + \frac{R_{S,k+1}}{R_{S,k}} \cdot (R_{S,k+1} - R_{S,k}) M_{Y,k+1}^L \quad \dots\dots(h)$$

그런데 式 (5)를 이용하기 위하여 式(c, d, e, f, g, h)를 利用하여 고치고, 格間行列의 雙曲線函數項을 分離, 單位化한 影響을 考慮하면 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \delta_s \\ \varphi_{xs} \\ \varphi_{ys} \\ T_s \\ M_w \\ M_Y \\ T_x \\ Q_z \\ 1 \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & f_{1,2} & 0 & 0 & f_{1,5} \cdot \Pi_i^k & f_{1,6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & f_{2,5} \cdot \Pi_i^k & f_{2,6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & f_{3,4} \cdot \Pi_i^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{5,5} & f_{5,6} / \Pi_i^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & f_{7,8} & f_{7,9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \delta_s \\ \varphi_{xs} \\ \varphi_{ys} \\ T_s \\ M_w \\ M_Y \\ T_x \\ Q_z \\ 1 \end{pmatrix}_k \quad \dots\dots(9)$$

여기서, 7行 9列, 8行 9列째의 要素는 각각 格點  $k$ 에 作用하는 集中 torque 荷重과 集中荷重이다.

式 (7)과 式 (9)를 利用하여 曲線桁 左端의 狀態벡터  $y_k^L$ 을 계속 오른쪽으로 傳達하면 格點番號  $n$ 의 右端의 狀態벡터  $y_n^R$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y_n^R = F_n P_{n-1} F_{n-1} P_{n-2} \dots P_1 F_1 y_1^L \quad \dots\dots(10)$$

그렇지만, 格間行列은 雙曲線函數項을 單位化하여 놓았기 때문에 매트릭스곱셈을 行할 때는 약간의 研究가 必要하다. 예를 들면,

$$y_k^R = F_k P_{k-1} F_{k-1} P_{k-2} \dots P_1 F_1 y_1^L = Y_k^R \cdot y_1^L \quad \dots\dots(11)$$

에서  $Y_k^R$ 은 狀態매트릭스로 定義되는 것이며, 다음 式 (11)에 格點行列  $P_k$ 를 곱하면 格點  $k+1$  左端에 關한 狀態벡터  $y_{k+1}^L$ 이 얻어지게 된다.

$$y_{k+1}^L = P_k y_k^R = Y_{k+1}^L \cdot y_1^L \quad \dots\dots(12)$$

여기서  $Y_{k+1}^L$ 에  $F_{k+1}$ 을 곱할 때, 第 6~9行째의 要素는 원래의 값과 그것을  $\Pi_i^k \cos h\kappa_i (= \cos h\kappa_1 \cdot \cos h\kappa_2 \dots \cos h\kappa_i)$ 로서 나눈 2개의 것을 考慮하고,  $Y_{k+1}^L$ 의 第 1~3, 6~9行째 要素의 計算은 원래의 값을 이용하고 第 4, 5行의 要素를 계산할 때는 원래의 값을  $\Pi_i^k \cos h\kappa_i$ 로 나눈 값을 利用하여 계속 계산해나가야 할 것이다.

### 3.3 無次元化

傳達매트릭스法에서는 變形量과 斷面力 등이 併存하고 게다가, 그 값들의 次元이 顯저하게 다르다. 그래서 計算의 精密度의 向上을 높이기 위하여 다음과 같은 無次元化를 行하여 놓는다.

$$\text{變形量: } \delta_s = \delta_s^* \frac{P_c \lambda_c^3}{GJ_c}, \quad \varphi_{xs} = \varphi_{xs}^* \frac{P_c \lambda_c^2}{GJ_c},$$

$$\varphi_{ys} = \varphi_{ys}^* \frac{P_c \lambda_c^2}{GJ_c}$$

$$\text{斷面力: } T_s = T_s^* P_c \lambda_c, \quad M = M_w^* P_c \lambda_c^2,$$

$$M_Y = M_Y^* P_c \lambda_c, \quad T_x = T_x^* P_c \lambda_c,$$

$$Q_z = Q_z^* P_c$$

$$\text{荷重: } P = P^* P_c, \quad p_z = p_z^* \frac{P_c}{\lambda_c},$$

$$T^p = T_p^* P_c \lambda_c$$

$$m_x = m_x^* P_c, \quad m_y = m_y^* P_c \quad \dots\dots(13)$$

여기서,  $P_c, \lambda_c, J_c$ 는 各各 基準이 되는 荷重, 部材길이, 斷面비틀常數이다. 그리고, 以上의 式에 의해 無次元化된 格間行列  $F_k^*$ 의 要素 값을 求하는 式에 있어서 部材角( $\phi$ )으로 나누어지는 일이 없도록 하여 桁軸線이 直線으로 되어도 ( $R_s = \lambda/\phi = \infty, \phi = 0$ ) 풀이가 可能토록 한다.

그러면, 格間行列( $F_k^*$ )의 要素는 아래와 같이 된다.

$$F(1, 1) = F(8, 8) = F(9, 9) = 1$$

$$X = \frac{\lambda^2}{2} \left( 1 - \frac{\phi^2}{12} + \frac{\phi^4}{360} \right)$$

$$F(1, 2) = X\phi/\lambda/\lambda_c = F(7, 8)$$

$$Y = B \left( 1 - \frac{\phi^2}{6} \left( 1 - \frac{\phi^2}{20} \right) \right)$$

$$F(1, 3) = Y/\lambda_c = F(6, 8)$$

$$Z = \frac{1}{GJ}, \quad N = \frac{\lambda^2}{(\phi^2 + \kappa^2) EC_w},$$

$$P = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E \cdot I} - N \right)$$

$$\begin{aligned}
F(1, 6) &= (XZ - YP\lambda)GJ_c/\lambda^2 \\
H &= \frac{\lambda^2}{3} \left( 1 - \frac{\phi^2}{10} + \frac{\phi^4}{280} \right) \\
F(1, 7) &= \phi/\lambda \cdot (P \cdot H + Y \cdot N/\nu) \cdot G \cdot J_c/\lambda_c^2 \\
F(1, 8) &= (-P \cdot H + Z \cdot \lambda^3/6 \cdot (1 - \phi^2/20)) \cdot \\
&\quad G \cdot J_c/\lambda_c^2 \\
F(2, 2) &= -X \cdot \phi^2/\lambda^2 + 1 = F(3, 3) = F(6, 6) \\
&= F(7, 7) \\
F(2, 3) &= -Y \cdot \phi/\lambda = -F(3, 2) = F(6, 7) \\
&= -F(7, 6) \\
F(2, 6) &= Y \cdot P \cdot \phi \cdot G \cdot J_c/\lambda_c = F(3, 7) \\
F(2, 7) &= (-P \cdot H \cdot \phi^2/\lambda^2 + Y \cdot N) \cdot G \cdot J/\lambda_c \\
F(2, 8) &= P \cdot H \cdot \phi/\lambda \cdot G \cdot J_c/\lambda_c^2 \\
F(3, 6) &= (-P \cdot \lambda \cdot (2 - 2/3 \cdot \phi^2 + \phi^4/20) + Y \cdot N) \\
&\quad \cdot G \cdot J_c/\lambda_c \\
F(3, 8) &= (-Y \cdot P \cdot \lambda + X \cdot N) \cdot G \cdot J_c/\lambda_c^2 \\
I &= \phi^2 - \kappa^2, \quad O = \phi^2 + \kappa^2 \\
\kappa \leq 1 \text{ 일 때} \\
R &= 1 + \frac{\kappa^2}{2} + \frac{\kappa^4}{24} + \frac{\kappa^6}{720} \\
F(4, 4) &= 1 = F(5, 5) \\
F(4, 5) &= -\nu(\kappa + \kappa^3/6 + \kappa^5/120)/R \cdot \lambda_c \\
Q &= \frac{\kappa^2}{6} \left( -1 + \frac{I}{20} \right) / R \\
F(4, 6) &= Q \cdot \phi \\
F(4, 7) &= \kappa^2/2 \cdot (-1 + I/12)/R \\
F(4, 8) &= -\phi \cdot \lambda \cdot \kappa^2/24 \cdot (1 - I/30)/R/\lambda_c \\
F(5, 7) &= \lambda \cdot (1 - I/6 - (\kappa^2 \cdot I - \phi^4)/120)/R/\lambda_c \\
\kappa > 1 \text{ 일 때} \\
D &= \frac{\exp \kappa + \exp(-\kappa)}{2}, \quad U = \frac{\exp \kappa - \exp(-\kappa)}{2} \\
F(4, 4) &= 1, \quad = F(5, 5) \\
F(4, 5) &= -\nu \cdot U \cdot \lambda_c/D \\
Q &= \kappa/O \cdot (\nu \cdot Y - U)/D, \quad F(4, 6) = Q \cdot \phi \\
F(4, 7) &= \kappa^2 \cdot (-X \cdot \phi^2/\lambda^2 + 1 - D)/O/D \\
F(4, 8) &= \phi \cdot \lambda/O \cdot (1 + \kappa^2 \cdot X/\lambda^2 - D)/D/\lambda_c \\
F(5, 7) &= (Y \cdot \phi^2 + \lambda \cdot \kappa \cdot U)/O/D/\lambda_c \\
F(5, 4) &= F(4, 5)/\nu/\lambda_c^2 \\
F(5, 6) &= -F(4, 7) \cdot \phi/\lambda/\nu/\lambda_c \\
F(5, 8) &= -F(4, 6)/\nu/\lambda_c^2
\end{aligned}$$

그리고 나머지 모든 項은 零으로 된다. 9열 째의 하중항은 다음과 같이 表示될 수 있다.

a. 等分布 格間 荷重  $P_z$  가 作用할 때

$$\begin{aligned}
F(1, 9) &= P_z \cdot \lambda^4 \cdot (P/12(1 - \phi^2/15) \\
&\quad - Z/24 \cdot (1 - \phi^2/30)) \cdot G \cdot J_c/\lambda_c^4 \\
F(2, 9) &= -P_z \cdot (\phi/12 - \phi^3/180) \cdot P \cdot \lambda^3 \cdot G \cdot J_c/\lambda_c^3 \\
F(3, 9) &= P_z \cdot (P \cdot H - \lambda^3 \cdot N \cdot (1 - \phi^2/20 \\
&\quad + \phi^4/840))/6 \cdot G \cdot J_c/\lambda_c^3 \\
\kappa \leq 1 \text{ 일 때} \\
F(4, 9) &= P_z \cdot \phi \cdot \lambda^2 \cdot \kappa^2/120 \cdot (1 + I/42)/R/\lambda_c^2 \\
\kappa > 1 \text{ 일 때} \\
F(4, 9) &= P_z \cdot \phi \cdot \lambda/\nu/O \cdot (U - \kappa - \kappa^3/6 \\
&\quad \cdot (1 - \phi^5/20))/D/\lambda_c^2 \\
F(5, 9) &= P_z \cdot F(4, 8)/\nu/\lambda_c^2 \\
F(6, 9) &= -P_z \cdot X/\lambda_c^2 \\
F(7, 9) &= -P_z \cdot \lambda^2/6 \cdot (\phi - \phi^3/20)/\lambda_c^2 \\
F(8, 9) &= -P_z \cdot \lambda/\lambda_c
\end{aligned}$$

b. 等分布 格間 torque 荷重  $m_x$  가 作用할 때

$$\begin{aligned}
F(1, 9) &= -m_x \cdot \phi \cdot (\lambda^3 \cdot P/12 \cdot (1 - \phi^3/15) \\
&\quad + N \cdot X/\lambda/\nu) \cdot G \cdot J_c/\lambda_c^3 \\
F(2, 9) &= m_x \cdot (X/E/I - P \cdot Y \cdot \lambda) \cdot G \cdot J_c/\lambda_c^2 \\
F(3, 9) &= -m_x \cdot F(2, 8) \\
F(4, 9) &= -m_x \cdot \lambda \cdot Q/\lambda_c \\
F(5, 9) &= m_x \cdot F(4, 7)/\nu/\lambda_c^2 \\
F(6, 9) &= m_x \cdot F(1, 2) \\
F(7, 9) &= -m_x \cdot F(1, 3)
\end{aligned}$$

c. 等分布 格間 torque 荷重  $m_y$  가 作用할 때

$$\begin{aligned}
F(1, 9) &= -m_y \cdot F(1, 8) \\
F(2, 9) &= -m_y \cdot F(2, 8) \\
F(3, 9) &= -m_y \cdot F(3, 8) \\
F(4, 9) &= -m_y \cdot F(4, 8) \\
F(5, 9) &= -m_y \cdot F(5, 8) \\
F(6, 6) &= -m_y \cdot F(6, 8) \\
F(7, 9) &= -m_y \cdot F(7, 8) \quad \dots \dots (14)
\end{aligned}$$

그리고, 格點行列  $P_i^*$ 의 要素는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
P(1, 1) &= 1 = P(2, 2) = P(3, 3) = P(6, 6) \\
&= P(7, 7) = P(8, 8) \\
X &= R_{s, s+1} - R_{s, s}, \quad Y = R_{s, s+1}/R_{s, s} \\
P(1, 2) &= -X/\lambda_c \\
P(1, 5) &= -(N \cdot \phi \cdot \lambda/\nu \cdot (1 - Y^2) - N \cdot X) \cdot \\
&\quad \Pi_1^* \cosh h\kappa_1 \cdot G \cdot J_c/\lambda_c \\
P(1, 6) &= N \cdot \phi/\lambda/\nu \cdot X \cdot Y \cdot G \cdot J_c/\lambda_c^2 \\
P(2, 5) &= -N(1 - Y^2) \cdot \Pi_1^* \cosh h\kappa_1 \cdot G \cdot J_c \\
P(2, 6) &= N \cdot X \cdot Y \cdot G \cdot J_c/\lambda_c \\
P(3, 4) &= (N \cdot \phi/\lambda/\nu \cdot (1 - Y^2) - X/Y \cdot Z) \cdot
\end{aligned}$$

$$\prod_i^t \cos h\kappa_i \cdot G \cdot J_c / \lambda_c$$

$$P(4, 4) = 1/Y^2$$

$$P(5, 5) = Y^2$$

$$P(5, 6) = X \cdot Y / \prod_i^t \cos h\kappa_i / \lambda_c$$

$$P(7, 8) = X/\lambda_c$$

$$P(7, 9) = -P_k(R_{S,k} - P_R)$$

$$P(8, 9) = -P_k$$

$$P(9, 9) = 1$$

格點行列 역시 위의 項 이외의 成分들은 零이 된다. ....(15)

### 3.4 境界條件

이제 曲線桁 右端  $n$ 의 狀態벡터는 (10), (14) (15)式로 부터 다음과 같이 된다.

$$y_n^{R*} = F_n^* P_{n-1}^* F_{n-1}^* P_{n-2}^* \dots P_2^* F_2^* \dots P_1^* F_1^* y_1^{L*} \quad (16)$$

따라서, 桁의 左端, 中間, 右端에 관한 境界條件으로부터 未知量을 구하면 曲線桁 全體의 構造解析을 式 (11), (12)에 의해서 行할 수 있다.

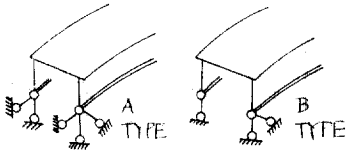


그림 3. 曲線桁橋의 支持條件

#### a. 初期條件

曲線桁橋의 兩端支接條件으로서는 그림 3에 表示한 바와 같은 2개의 形式이 一般의이며 單純支持 曲線桁은 一端은 type A, 他端은 type B로서 支持되고 있다. 假定에서와 같이  $N=M_Z=0$ , 그리고 幾何學的 境界條件으로서 兩端에서  $\delta=\varphi_x=0$ 로 됨을 알 수 있다.

結局 未知量은  $\varphi_{y,51}^L, T_{51}^L, T_{k1}^L, Q_{21}^L$ 의 4개로 되고 이것을 매트릭스 表示하여 無次元化하면 初期 매트릭스  $Y_1^{L*}$ 는 式 (17)과 같다.

여기서, 中間支點의 未知量에 해당하는 項은 左端에서는 모두 零으로 되고 있음을 보이고 있다.

#### b. 中間條件

連續曲線桁橋의 中間支點에서는 不靜定 剪斷

$$Y_{L*}^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi_{y,51}^L & T_{51}^L & T_{k1}^L & Q_{21}^L & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots(17)$$

力과 不靜定 비틀 모멘트  $Q_{2k}^S, T_{x,k}^S$ 가 생긴다 이것을 求하는 條件式으로서는 原則的으로  $\delta_k^R=0, \varphi_x^R=0$  ( $\delta_{S,k}^R \neq 0, \varphi_{x,S}^R \neq 0$ ) 2개 만으로 좋다. 그러나, 本論文에서와 같이 雙曲線函數項을 分離, 單位化하고 있는 解法에서는 文헌 (5)에서와 같이 拘束度를 強하게 하고 計算精密度를 向上시키기 위하여 支點에 관한 처짐 및 斷面回轉角이 零으로 되는 條件에서

$$\left. \begin{aligned} \delta_{S,k}^R &= \delta_k^R + a_k M_{w,k}^S = a_k M_{w,k}^S \\ \varphi_{x,S}^R &= \varphi_x^R + b_k M_{w,k}^S = b_k M_{w,k}^S \\ M_{w,k}^R &= M_{w,k}^S / \prod_i^t \cos h\kappa_i \\ T_{S,k}^R &= T_{S,k}^S / \prod_i^t \cos h\kappa_i \end{aligned} \right\} \quad \dots(18)$$

으로 된다. 위의 左邊값은 式(17)에 格間行列이랑 格點行列을 곱하여 求해진 第  $k$  格點 右端의 狀態 매트릭스  $Y_k^{R*}$ 의 第 1, 2 行과 4, 5 行제의 行要素이다. 그렇지만 式(18)에 동반하는 未知剪斷力과 비틀모멘트가 第  $k$  格點에서 發生하게 된다. 즉,

$$\left. \begin{aligned} T_{x,k+1}^L &= T_{x,k}^R + (R_{S,k+1} - R_{S,k}) Q_{2k}^S + T_{x,k}^S \\ Q_{2,k+1}^L &= Q_{2k}^R + Q_{2k}^S \end{aligned} \right\} \dots(19)$$

따라서, 式 (18), (19)의 條件을 利用하여 格點行列을 修正하면 式 (15)에서  $P_{1,1}, P_{1,2}, P_{1,5}, P_{2,2}, P_{2,5}, P_{4,4}, P_{5,5}$ 의 成分要素를 零으로 할 수 있다. 또, 第  $k+1$  格點 左端의 狀態 매트릭스는 中間未知量  $T_{x,k}^S, Q_{2k}^S$ 에 의한 項을 追加하여 式 (20)과 같이 쓸 수 있다.

여기서, 便簡을 위하여  $\prod_i^t = \prod_i^t \cos h\kappa_i$ 로 表示하고, 또 表示 속에 있는 要素는 式(11), (12)에서의 計算方法에 따르는 것으로 한다. 따라서第

初期値の項

$$\mathbf{Y}_{k+1}^{L*} = \begin{pmatrix} \varphi_{s1}^L & T_{s1}^L & T_{z1}^L & Q_{z1}^L & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_k Y^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_k Y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/Y^2/\Pi_i^L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y^2/\Pi_i^L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/\Pi_i^L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ X/\Pi_i^L \end{Bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/\Pi_i^L \end{Bmatrix} \end{pmatrix} \dots\dots(20)$$

“0”으로 되는項이 있다.  
 $P_k^* Y_k^{R*} y_1^L$  로서 구해지는 값

k 格點의 右端의  $T_s$ 와  $M_w$ 의 最終的인 값은 다음과 같이하여 求해야 할 것이다.

$$\left. \begin{aligned} T_{s,k}^R &= T_{s,k}^{R*} \cdot \Pi_i^L \cosh \kappa_i \\ M_{w,k}^R &= M_{w,k}^{R*} \cdot \Pi_i^L \cosh \kappa_i \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

c. 末端條件

初期値  $\delta_{s1}^L, \varphi_{s1}^L, M_{w1}^L, M_{y1}^L$ 을 求하기 위한 末端의 境界條件은 다음과 같다.

$$\delta_{sn}^R = 0, \varphi_{sn}^R = 0, M_{wn}^R = 0, M_{yn}^R = 0 \dots\dots(22)$$

d. 變形量 및 斷面力の 計算

以上과 같이 하여 初期値  $\{\delta_{s1}^L, \varphi_{s1}^L, M_{w1}^L,$

$M_{y1}^L\}$ , 中間未知量  $\{T_{sk}^S, M_{wk}^S, T_{zk}^S, Q_{zk}^S \dots T_{sk+1}^S,$

$M_{wk+1}^S, T_{zk+1}^S, Q_{zk+1}^S\}$ 에 代한 境界條件을 確實히 하였으므로 未知數와 같은 數의 連立方程式을 얻을 수 있고, 모든 未知量을 包含한 初期벡터  $y_1^{L*}$ 를 求할 수 있게 된다. 따라서 任意點의 狀態벡터  $y_k^{R*}, y_{k+1}^{L*}$ 는 式 (11), (12)로부터 求할 수 있다.

그러나, 實際 이들 값들은 桁 左端의 初期벡터  $y_1^{L*}$  및 中間支點에 生기는 未知反力項  $Z^*$  ( $Z^* = [R_1, R_2, \dots, R_n]^T$ )에 의해 나타낼 수 있으므로 式(11) 대신

$$\mathbf{y}_k^{R*} = [\mathbf{Y}_k^{R*} ; \mathbf{Z}_k^{R*}] \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1^{L*} \\ \mathbf{Z}^* \end{Bmatrix} \dots\dots(23)$$

로서 나타낸다. 여기서,  $\mathbf{Y}_k^{R*}, \mathbf{Z}_k^{R*}$ 는

$$\mathbf{Y}_k^{R*} = \mathbf{F}_k^* \mathbf{Y}_1^{L*}, \mathbf{Z}_k^{R*} = \mathbf{F}_k^* \mathbf{Z}_1^{L*} \dots\dots(24-a, b)$$

에서 求할 수 있다.  $k=1$ 일 때의  $\mathbf{Y}_1^{L*}$ 는 桁 左端의 初期값을 行列로 表示한 것이며  $\mathbf{Z}_1^{L*}$ 는 中間支點 反力項을 行列表示한 것이다. 다시 말해서

$$\mathbf{y}_1^{L*} = [\mathbf{Y}_1^{L*} ; \mathbf{Z}_1^{L*}] \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1^{L*} \\ \mathbf{Z}^* \end{Bmatrix} \dots\dots(25)$$

로 쓸 수 있다.

다음 格點行列을 包含한 式 (12)의  $\mathbf{P}_k^*$  속에는 未知의 中間支點 反力도 包含되므로 그것을 分離하여

$$\mathbf{P}_k^* = [\mathbf{P}_{sk}^* ; \mathbf{P}_{rk}^*] \dots\dots(26)$$

로 表示하면 式 (12)의 狀態벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{y}_{k+1}^{L*} = [\mathbf{Y}_{k+1}^{L*} ; \mathbf{Z}_{k+1}^{L*}] \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1^{L*} \\ \mathbf{Z}^* \end{Bmatrix} \dots\dots(27)$$

$$\text{단, } \mathbf{Y}_{k+1}^{L*} = \mathbf{P}_{sk}^* \mathbf{Y}_k^R, \mathbf{Z}_{k+1}^{L*} = \mathbf{P}_{s,k}^* \mathbf{Z}_k^{R*} + \mathbf{P}_{r,k}^* \dots\dots(28)$$

표 4. 死荷重, 活荷重에 따른  $p_z, m_z, P, T_p$ 를 求하는 方法

	부분등분도 하중 ( $P_s \text{ t/m}^2$ )	부분선 하중 ( $P_s \text{ t/m}$ )
하중상태		
단가하중상태		
강가	$P_{zk}$	$P_k$
하중	$\frac{P_s}{2} \frac{R_{out}^2 - R_{in}^2}{R_s}$	$P_s (R_{out} - R_{in})$
	단, $R_p = \frac{2}{3} \frac{R_{out}^3 - R_{in}^3}{R_{out} - R_{in}}$	$P_s (R_{out} - R_{in}) (R_s - R_p)$
		$T_{pk} = \frac{R_{out} + R_{in}}{2}$



式 (23)~(28)로부터  $n$ 개의 部材로 構成된 曲線桁 左端의 狀態벡터  $y_1^{*}$ 를 部材  $n$ 의 右端까지 傳達시킬 수 있으며 그 點의 狀態벡터  $y_n^{*}$ 은

$$y_n^{*} = [F_n^{*} Y_n^{*} : F_n^{*} (P_{n-1}^{*} F_{n-1}^{*} (\dots) + P_{n,n-1}^{*}) + P_{n,n}^{*} \begin{pmatrix} y_1^{*} \\ \vdots \\ Z_n^{*} \end{pmatrix}] \dots (29)$$

으로 된다. 設計 計算時에 必要한 死荷重과 活荷重에 대한 荷重項 計算方法을 表 4에 보인다

#### 4. 프로그래밍

曲線桁 解析을 위한 流通圖를 그림 4에 보였으며, 本 研究에 使用한 小型 電子計算機는 PC-1500 (8K-bytes module, Sharp 社)이다.

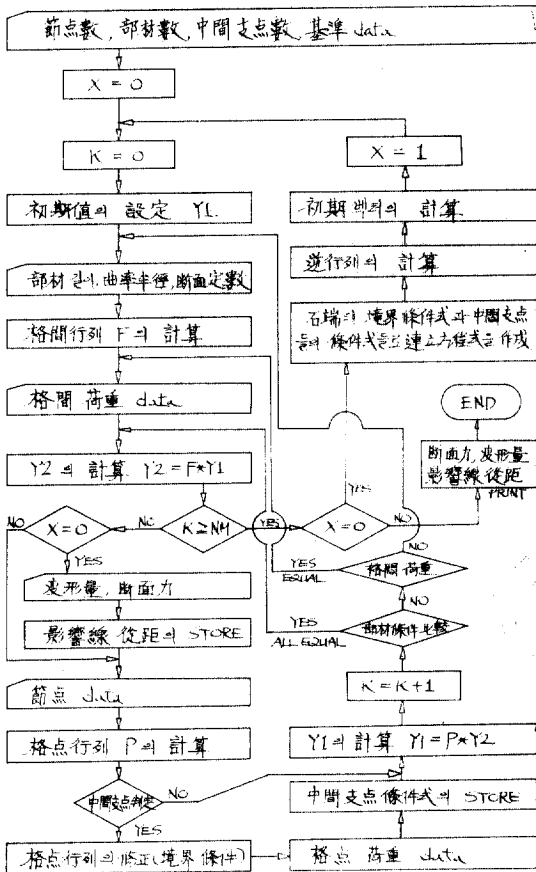


그림 4. 曲線桁 解析을 위한 流通圖

#### 5. 結論

小型電子計算機에 의해 骨組構造를 解析할 경우 가장 유력한 수단인 하나로 되는 傳達매트릭스法(Transfer matrix)을 薄板曲線桁에 適用시킴으로써 얻은 本 研究의 結論을 要約하면 다음과 같다.

(1) 한 平面內에서 一定한 曲率을 갖는 曲線桁의 平衡微分方程式의 一般式<sup>(1)</sup>에서 출발하여 曲率面外 變形, 즉 휨비틀 變形을 分離하여 얻은 基礎微分方程式을 表示했다.

(2) (1)에서의 微分方程式을 基礎로 等断面圓弧曲線桁의 曲率面外 變形에 관한 格間行列을 구하였다.

(3) 斷面의 急變, 曲線의 變化 등을 考慮하여 等断面圓弧曲線桁의 曲率面外 變形에 관한 格點行列을 얻을 수 있었다.

(4) 위에서 얻은 格間行列과 格點行列의 成分要素 求하는 式을 分離, 單位化하여 計算의 精密度를 높이는 한편, 部材角으로 나누어지는 項을 제거하여 直桁의 경우에도 適用이 可能하도록 ( $R_s = \infty, \phi = 0$ ) 하였다.

(5) 傳達매트릭스를 利用함으로써 한 平面內에서 桁軸線이 任意의 曲率을 갖고 또 軸方向으로 任意로 變化하는 斷面을 갖는 曲線桁의 曲率面外 휨비틀 問題를 解析 可能하도록 하였다.

(6) 비틀 定數比  $\kappa (= \nu \lambda)$ 가 현저하게 커져도 높은 精密度의 解析이 可能한 方法을 보였다.

(7) 文獻 (7)에 의하면 曲率面外 變形과 面內 變形이 同時에 일어난다는 程度는 극히 작으므로 死荷重, 活荷重 등의 鉛直荷重에 의한 曲線桁의 設計에 대해서는 本 論文에 의한 解析이 타당성이 있다고 생각된다.

(8) 荷重係數 設計法에 基礎를 두어 曲線桁을 設計할 경우 本 解析方法은 各種 組合荷重에 대하여도 용이하게 適用할 수 있으며 게다가, 엄밀해<sup>(7)</sup>에 가까운 解가 구해지므로 有效한 解析方法이라 생각된다.

本 解法을 利用한 數值計算 例를 變位法 또는 모형실험에 의해 比較 검토할 예정으로 있다.

## 参 考 文 献

1. 馬根殖, 鄭慶燮, 部材要素의 曲率을 考慮한 曲線桁橋의 電算解析에 關한 研究, 漢陽大學校 産業科學研究所 論文集, 1982.
2. 馬根殖, 鄭慶燮, 主桁要素의 曲率을 考慮한 曲線桁橋解析에 關하여, 大韓土木大學會 1981年度 學術發表會 概要集 1981 10, pp. 2-73~83.
3. 深澤泰晴, 小林 潔, “薄肉曲線桁の傳達行列とその變断面連續曲線桁橋解析への應用”, 日本土木學會論文集 No. 244, 1975. 12, pp. 47~55.
4. 遠田良喜, “傳達マトリックス法による薄肉開断面曲線ばりの有限變位理論の解析”, 日本土木學會論文集 No. 199, 1972. 3, pp. 11~20.
5. 中井 博, 事口壽男, “傳達マトリックス法による曲げねじりを受ける薄肉直線桁橋の解析と断面力・變形量に關する研究, 日本土木學會論文集, No. 233, 1975. 1, pp. 55~70.
6. Vladimír Křístek, “*Theory of Box Girders*”, John Wiley & Sons, Inc., 1979, pp. 129~169.
7. John M. McCormick, Mario G. Salvadori, “*Numerical Methods in FORTRAN*”, Prentice Hall, Inc., 1964, pp. 63~71.
8. R.K. Livesley, “*Matrix Methods of Structural Analysis*”, Pergamon Press Ltd., 1964, pp. 111~171.
9. B. Tanimoto, “Some Improvements on Proposed Eign-Matrix Method”, Proc ASCE Vol. 91, No. ST1, 1966.
10. 成岡昌夫, 遠田良喜, “傳達マトリックス法”, コンピュータによる構造學講座 I-2-B, 培風館 1970, pp. 10~44
11. Oris H. Degenkolb, “Concrete Box Girder Bridges”, American concrete institute monograph No. 10.
12. O'Connor, “*Design of Bridge Superstructures*”, Wiley Interscience, 1971, pp. 314~350.
13. M. Amin and A. Ang, “Analytical and Experimental Studies of Curved Members of Closed Thin-Walled Sections”, Illinois Univ., Civ. Eng. Studies, Struct. Res. Ser. 257, Sept. 1962, pp. 102.
14. C.B. Clarke, “Testing of a Model Curved Steel Girder Bridge”, AISC Eng. J. 3(3), 1966. 7, pp. 106~112.
15. B. Velutini, “Analysis of Continuous Circular Curved Beams”, J. Am. Concrete Inst., 22, 1950, pp. 217~228.
16. V.Z. Vlasov, “Thin Walled Elastic Beams”, 2nd ed. translated from Russian, Published for the National Science Foundation, Washington, D.C. and the U.S. Dept. of Commerce, by the Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.

(接受: 1982. 8. 2)