韓國數學教育學會誌<數學教育>
1982. 2. Vol. XX No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Feb. 1982. Vol. XX No. 2

關係로서의 指數函數 및 對數函數의 指導

金 薰 稙

I. 序 言

본 연구의 목적은 函數의 지도에 있어서 주로 대응규칙만으로 정의되고 설명되어지고 있으나 순서쌍의 集合인 關係로서 函數 및 逆函數를 정의하여 줌으로서 指數函數 및 對數函數 지도와 그의 성질을 이해시키는데 도움을 주도록 모색하였다.

II. 순서쌍의 집합으로서의 函數 및 逆函數

1. 函 數

카데이션곱 $A\times B$의 부분집합인 관계 f에서

① $\{x \mid (x, y)\in f\}=A$이고

② $(a, b)\in f$, $(a, c)\in f$이면 반드시 $b=c$인

위의 두가지 성질을 만족하는 관계 f를 A에서 B에로의 함수(function) f라고 정의 한다.

즉 A에서 B에로의 함수 f는 $a\in A$인 모든 a가 f에 속하는 하나, 그리고 단 하나의 순서쌍의 첫 원소로서 나타나는 $A\times B$의 부분집합을 뜻한다.

이때 함수 f에 대응되는 두변수명제함수 $P(x, y)$를 $y=f(x)$로 나타낸다. 곧 함수 $f=\{(x, y) \mid (x, y)\in A\times B,\ y=f(x)\}$로 표시된다.

(예 1-1) 관계 $R=\{(x, y) \mid x\in[0, \infty),\ y\in[k, \infty),\ y^2-6y-x+9=0\}$에서

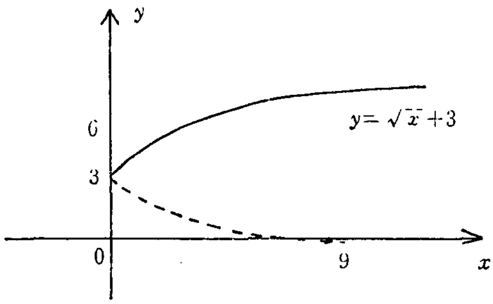
위의 관계 R이 함수가 되는 실수 k의 값을 구하고,

이때 함수 f를 구하여라.

(해) $k=3$일때만 함수가 된다.

또 $k=3$일때 함수 $f=\{(x, y) \mid x\in[0, \infty),\ y\in[3, \infty),\ y=\sqrt{x}+3\}$

※ $(y-3)^2=x \Leftrightarrow (y-3)=\pm\sqrt{x}$에서 문제의 뜻에 따라, $y=\sqrt{x}+3$임.



순서쌍의 집합으로서의 함수 개념 이외에 함수의 정의를 다만 대응관계 만으로 설명되기도 한다.

2. 對應 규칙으로의 函數

두집합 A, B가 있어서

A의 임의의 원소 x가 B에 오직 하나의 원소 y에 대응 할대,

이 대응관계를 A에서 B에로의 함수라 하고

기호로는 $f: A\rightarrow B$ 또는 $A\xrightarrow{f}B$ 로 나타낸다.
$x \mapsto f(x)$

3. 定義域, 値域

함수 $f=\{(x, y) \mid (x, y)\in A\times B,\ y=f(x)\}$에서

f의 정의역 $D=\{x \mid (x, y)\in f\}$인데 $D=A$이고

f의 치역 $f(A)=\{y \mid (x, y)\in f\}$인데 $f(A)\subset B$이다.

또 집합 B를 함수 f의 공변역(codomain)이라 한다.

함수의 정의역과 치역은 관계의 정의역과 치역에 준한다.

4. 像, 原像

함수 $f=\{(x,y)\mid(x,y)\in A\times B,\ y=f(x)\}$에서

$(a,b)\in f$이면

b를 f에 의한 a의 像(image), 또는 함수값이라 하고

$f(a)$로 표시하며

a를 함수 f에 의한 b의 原像(pre-image)다 하고, $f^{-1}(b)$로 표시한다.

고로 함수 $f:A\to B$일때 f의 치역은 정의역인 A의 모든 원소의 f에 의한 상들의 집합이고, 정의역 A는 f에 의한 집합 B의 원상들의 모임이다.

(예 4-1) $A=\{0,1,2,3,4\}$일때,

$f=\{(x,y)\mid(x,y)\in A\times A,\ y=(x-2)^2\}$에서

① $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 및 $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(4)$를 구하고

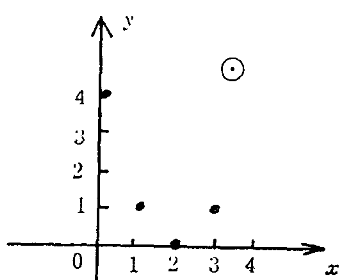
② 치역 $f(A)$를 구하고, f의 graph를 그려라. 또 f를 순서쌍으로 나타 내어라.

(해) ① $f(0)=f(4)=4$, $f(1)=f(3)=1$, $f(2)=0$

$f^{-1}(0)=2$, $f^{-1}(1)=\{1,3\}$, $f^{-1}(2)=f^{-1}(3)=\phi$, $f^{-1}(4)=\{0,4\}$

② 치역 $f(A)=\{0,1,4\}$

$f=\{(0,4),(1,1),(2,0),(3,1),(4,4)\}$



〈f의 graph〉

5. 單射函數

함수 $f=\{x,y)\mid(x,y)\in A\times B,\ y=f(x)\}$에서 $a,a'\in A$인 모든 a,a'에 대하여 $a\neq a'$이면 $f(a)\neq f(a')$인 함수 f를 단사함수, 또는 일대일 대응함수(one to one function)라 한다.

곧 단사함수란 A의 어떤 상이한 원소도 동일한 상을 갖지 않음을 뜻한다.

(예 5-1) 함수 $f:R^{\#}\to R^{\#}$의 대응규칙이 다음과 같을때 단사함수 인것은 어느것인가?

① $f(x)=x^2$

② $f(x)=x^3$

(해) ① $f:R^{\#}\to R^{\#}$, $y=x^2$은 단사함수가 아니다. ($\because f(2)=f(-2)=4$이므로)

② $f:R^{\#}\to R^{\#}$, $y=x^3$은 단사함수임, ($\because x_1\neq x_2\to x_1^3\neq x_2^3$)

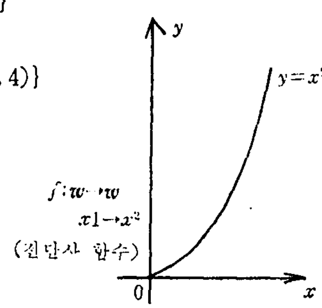
6. 全射函數

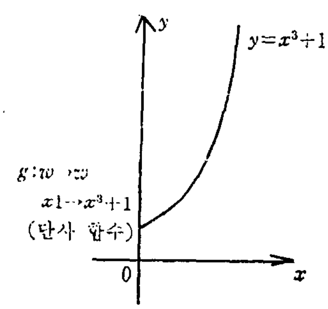
함수 $f=\{(x,y)\mid(x,y)\in A\times B, y=f(x)\}$에서 $f(A)=B$일때, 곧 함수 f의 치역이 공변역 B와 일치할때 A를 B위로 전사한다고 하고, f를 전사함수(onto function)라 한다.

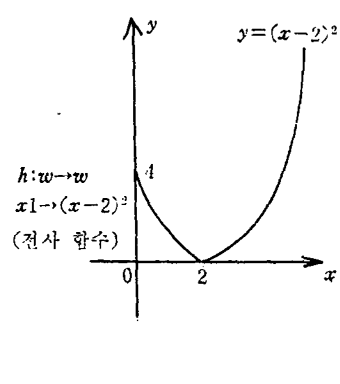
특히 함수 f가 전사이고, 단사일때, 함수 f를 전단사함수(bijective function)라 한다.

(예 6-1) $W=[0,\infty)$이고, 함수 $f:W\to W$, $f(x)=x^2$, $g:W\to W$, $g(x)=x^3+1$, $h:W\to W$, $h(x)=(x-2)^2$일때, 단사, 전사, 전단사 함수를 찾아라.

(해)







7. 逆函數

함수 $f\subset A\times B$가 전단사 함수이면 f의 역관계 $f^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in f\}$은 B에서 A위로의 전단사 함수이므로, 함수 f^{-1}를 함수 f의 역함수(inverse function)라고 한다.

함수 $f=\{(a,b)\mid(a,b)\in A\times B,\ b=f(a)\}$에서 $b\in B$일때 함수 f에 의한 b의 원상 $f^{-1}(b)$는 일반적으로 한개이상이거나 ϕ집합이다.

그러나 함수 f가 전단사함수이면 $b\in B$인 모든 b에 대하여 $f^{-1}(b)$인 a가 $(a\in A)$ 존재하고, 또한 1개뿐이므로 전단함수인 B에서 A위로의 역함수 f^{-1}가 존재한다.

이때 $f(a)=b$이면 $f^{-1}(b)=a$인 관계, 즉 $(a,b)\in f$이면 반드시 $(b,a)\in f^{-1}$인데, 일반적으로 함수의 정의역의 원소를 x, 치역의 원소를 y로 표시해야 되므로, 함수 f의 명제함수가 $y=f(x)$이면 그의 역함수의 명제함수 $y=f^{-1}(x)$는 $x=f(y)$가 되어진다.

또 함수 $y=f(x)$와 역함수$y=f^{-1}(x)$의 graph가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이 됨은 $(a,b)\in f$이면 $(b,a)\in f^{-1}$이고 점(a,b)와 점(b,a)는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이기 때문이다.

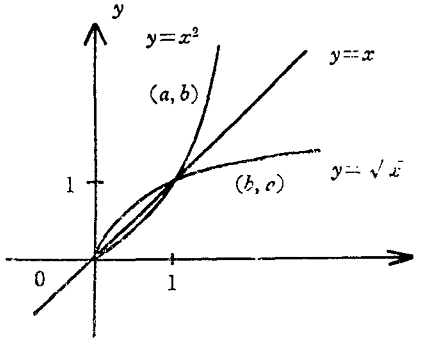
(예 7-1) $A=[0,\infty)$일때 함수 $f:A\to A$, $f(x)=x^2$의 역함수 $f^{-1}:A\to A$를 구하고, graph를 그려라.

(해) 함수 f는 전단사 함수임.

함수 f의 명제함수 : $y=x^2$

함수 f^{-1}의 명제함수 : $x=y^2\to$, $\therefore\ y=\sqrt{x}$ 이다.

고로 $f^{-1}:A\to A$, $y=\sqrt{x}$ 임.



III. 指數函數, 對數函數 및 그의 性質

1. 指數函數

함수 $f=\{(x,y)\mid(x,y)\in R^\#\times R^\#,\ y=a^x,\ a>0,\ a\neq1\}$일때

함수 f를 指數함수라 한다.

이때 정의역 $D=\{x\mid x$는 모든실수$\}$

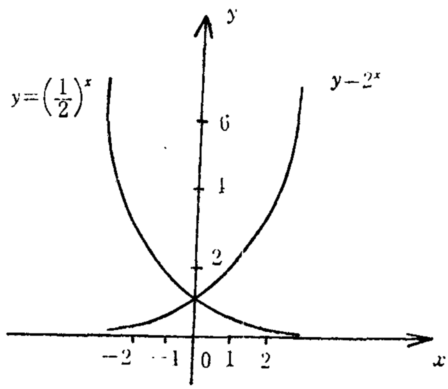
치 역 $f(R^\#)=\{y\mid y>0\}$이다.

(예 1-1) $R^\#$에서 $R^\#$에로의 함수 $f_1=\{(x,y)\mid y=2^x\}$, $f_2=\{(x,y)\mid y=\frac{1}{2}^x\}$ 일때 f_1, f_2를 각각 순서쌍의 집합으로 표시하고, 또 그의 graph를 그려라.

(해) $f_1=\{\cdots\left(-2,\frac{1}{4}\right),\ \left(-1,\frac{1}{2}\right),(0,1)$
$(1,2),(2,4),(3,8)\cdots\}$

$f_2=\{\cdots(-2,4),(-1,2),(0,1)$
$\left(1,\frac{1}{2}\right),\ \left(2,\frac{1}{4}\right),\ \left(3,\frac{1}{8}\right)\cdots\}$

※ 함수 $y=2^x$와 $y=2^{-x}$의 graph는 직선 y축에 대하여 서로 대칭이다.



2. 指數函數의 性質

지수함수 $f=\{(x,y)\mid(x,y)\in R^\#\times R^\#,\ y=a^x,\ a>0,\ a\neq1\}$은

① 정의역 $D=\{x\mid x$는 모든실수$\}$,
치역 $f(R^\#)=\{y\mid y>0\}$

② $(0,1)\in f$이고, $(1,a)\in f$이다.

③ $a>1$일때 $x_2>x_1\Leftrightarrow f(x_2)>f(x_1)$ (단조증가함수)

$0<a<1$일때 $x_2>x_1\Leftrightarrow f(x_2)<f(x_1)$ (단조감소함수)

④ $f(x_1+x_2)=f(x_1)\times f(x_2)$

⑤ $f(x_1-x_2)=f(x_1)\div f(x_2)$

⑥ $f(x_1\times x_2)=\{f(x_1)\}^{x_2}=\{f(x_2)\}^{x_1}$

⑦ 실수에서 양수로의 함수 f는 全單射函數이다.

---

3. 指數函數 性質의 證明

지수함수 $f=\{(x,y)\,|\,y=a^x,\ (x,y)\in R^\#\times R^\#,\ a>0,\ a>1\}$에서

① $x\in R^\#$, $y=a^x$일때 항상 $a^x>0$,
고로 치역 $f(R^\#)=\{y\,|\,y>0\}$이다.

② 함수 $f=\{\cdots\left(-1,\frac{1}{a}\right)\ (0,1)\,(1,0)\,(2,a^2)\cdots\}$
이므로
$(0,1)\in f$, $(1,a)\in f$이다.

③ $x_1, x_2\in R^\#$, $x_2>x_1$ 일때
$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=a_1^{x_2-x_1}$에서
$a>1$이면 $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=a^{x_2-x_1}>1$,
고로 $f(x_2)>f(x_1)$ (증가함수)
$0<a<1$이면 $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=a^{x_2-x_1}<1$,
고로 $f(x_2)<f(x_1)$ (감소함수)

④ $f(x_1+x_2)=a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\times a^{x_2}=f(x_1)\times f(x_2)$

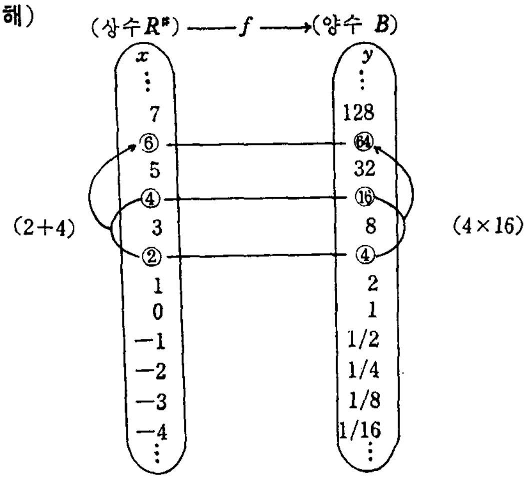
⑤ $f(x_1-x_2)=a^{x_1-x_2}=a^{x_1}\div a^{x_2}=f(x_1)\div f(x_2)$

⑥ $f(x_1\times x_2)=a^{x_1\times x_2}=(a^{x_1})^{x_2}=\{f(x_1)\}^{x_2}$

⑦ $x_1, x_2\in R^\#$, $x_1\neq x_2 \rightleftarrows a^{x_1}\neq a^{x_2}>0$, 고로 함수 f는 실수에서 양수로의 전단사 함수임.

(예 3-1) 실수 $R^\#$에서 양수 B위로의 함수 $f=\{(x,y)\,|\,y=2^x\}$의 관계를 대응규칙으로 표시하고 그의 성질을 살펴 보아라.

해)



$(a,b)\in f$이고 $(c,d)\in f$ 일때에는 반드시 $(a+c,\ b\times d)\in f$이고, $(a-c,\ b\div d)\in f$ 임을 확인 하여라.

곧, $(2+4)\rightarrow(4\times16)$
$(2+3)\rightarrow(4\times8)$
$(4-2)\rightarrow(16\div4)$등,

---

4. 對數의 定義

실수 $R^\#$에서 양수 B위로의 지수함수 $g=\{(x,y)\,|\,y=a^x,\ (x,y)\in R^\#\times B,\ a>0,\ a\neq1\}$는 전단사함수 이므로 그의 역함수 $g^{-1}=\{(x,y)\,|\,x=a^y,\ (x,y)\in B\times R^\#,\ a>0,\ a\neq1\}$도 역시 전단사함수이다.

이때 $x_1\in B$인 x_1의 상 $g^{-1}(x_1)$을 a를 밑으로 하는 진수 x_1의 대수라하고, $g^{-1}(x_1)=\log_a x_1$로 표시한다.

즉 $\boxed{x=a^y \xLeftrightarrow{a\neq1,\ a>0} y=\log_a x}$ 를 뜻한다.

5. 對數函數

양수 B에서 실수 $R^\#$위로의 함수 $f=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in B\times R^\#,\ y=\log_a x,\ a>0,\ a\neq1\}$을 a를 밑으로하는 진수 x의 대수함수라 한다.

대수함수 $f=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in B\times R^\#,\ y=\log_a x,\ a>0,\ a\neq1\}=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in B\times R^\#,\ x=a^y,\ a>0,\ a\neq1\}$를 뜻하므로 그의 역함수는 지수함수 $f^{-1}=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in R^\#\times B,\ y=a^x\}$가 된다.

따라서 대수함수 f의 정의역은 B이고 치역 $f(B)=R^\#$이다.

(예 5-1) 함수 $f=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in B\times R^\#,\ y=\log_2 x\}$ 단 $B=\{$양수$\}$, $R^\#=\{$실수$\}$ 일때

① 역함수 f^{-1}를 구하고

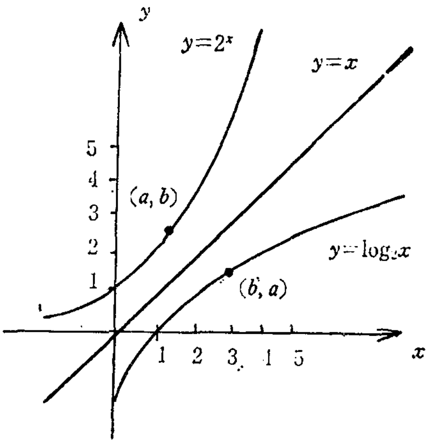
② f 및 f^{-1}의 graph를 그리고, 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭임을 설명하여라.

(해) ① 역함수 $f^{-1}=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in R^\#\times B,\ x=\log_2 y\}=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in R^\#\times B,\ y=2^x\}$

② 가) $(a,b)\in f^{-1}$인 모든 (a,b)에 대하여 반드시 $(b,a)\in f$가 되고

나) 점(a,b)와 점(b,a)의 그래프는 반

드시 직선 $y=x$에 대하여 선대칭이 되므로 함수 f^{-1}와 함수 f의 graph는 직선 $y=x$에 대하여 선대칭이다.



(f 및 f^{-1}의 graph)

6. 對數函數의 性質

$B=\{양수\}$, $R^{\#}=\{실수\}$일때

대수함수 $f=\{(x, y)\,|\,y=\log_a x,\ (x, y)\in B\times R^{\#}, a>0,\ a\neq 1\}$은

① 정의역 $D=B$, 치역 $f(B)=R^{\#}$이다.

② $(1, 0)\in f$, $(a, 1)\in f$이다.

③ $a>1$ 일때 $x_2>x_1 \Leftrightarrow f(x_2)>f(x_1)$ (단조증가함수)

$0<a<1$ 일때 $x_2>x_1 \Leftrightarrow f(x_2)<f(x_1)$ (단조감수함수)

④ $f(x_1\times x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

⑤ $f(x_1\div x_2)=f(x_1)-f(x_2)$

⑥ $f\{x^n\}=nf(x)$

---

7. 對數函數 性質의 證明

대수함수의 성질은 그의 역함수인 지수함수의 성질로서 유도된다.

※ 지수함수 $g=\{(x, y)\,|\,y=a^x, (x, y)\in R^{\#}\times B, a>0,\ a\neq 1\}$

즉 $g=\{\cdots(-1, \frac{1}{a}), (0, 1), (1, a)\cdots\}$

에 대하여

그의 역함수 $g^{-1}=f=\{(x, y)\,|\,y=\log_a x,\ (x, y)\in B\times R^{\#},\ a>0,\ a\neq 1\}$

즉 $g^{-1}=f=\{(\frac{1}{a}, -1), (1, 0), (a, 1)\cdots\}$이 되므로

① 지수함수 g의 치역$\equiv g^{-1}$의 정의역$\equiv f$의 정의역$\equiv B$

g의 정의역$\equiv g^{-1}$의 치역$\equiv f$의 치역$\equiv R^{\#}$이다.

② $(0, 1)\in g$, $(1, a)\in g$이므로 $(1, 0)\in g^{-1}$, $(a, 1)\in g^{-1}$이므로

즉 $(1, 0)\in f$, $(a, 1)\in f$이다.

※ 지수함수 $y=g(x)$, 역함수 $y=g^{-1}(x)=f(x)$라 할때

$$\boxed{\begin{matrix} g(m_1)=n_1 \\ g(m_2)=n_2 \end{matrix}} \rightleftarrows \boxed{\begin{matrix} g^{-1}(n_1)=m_1 \\ g^{-1}(n_2)=m_2 \end{matrix}}$$
이 성립하므로

③ 지수함수의 성질에서

$a>1$일때 $m_1>m_2 \rightleftarrows g(m_1)>g(m_2)$인데

곧 $g^{-1}(n_1)>g^{-1}(n_2) \rightleftarrows n_1>n_2$가 되므로

따라서 $f(n_1)>f(n_2) \rightleftarrows n_1>n_2$

$\therefore f(x_1)>f(x_2) \rightleftarrows x_1>x_2$ (증가함수)

또 지수함수의 성질에서

$0<a<1$일때 $m_1>m_2 \rightleftarrows g(m_1)<g(m_2)$인데

곧 $g^{-1}(n_1)>g^{-1}(n_2) \rightleftarrows n_1<n_2$이므로

따라서 $f(n_1)>f(n_2) \rightleftarrows n_1<n_2$

$\therefore f(x_1)>f(x_2) \rightleftarrows x_1<x_2$ (감소함수)

④ 지수함수의 성질에서

$g(x_1+x_2)=g(x_1)\times g(x_2)$이므로

즉 $g(m_1+m_2)=g(m_1)\times g(m_2)=n_1\times n_2$

고로 $g^{-1}(n_1\times n_2)=m_1+m_2$
$=g^{-1}(n_1)+g^{-1}(n_2)$

곧 $f(n_1\times n_2)=f(n_1)+f(n_2)$

$\therefore f(x_1\times x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

⑤ 지수함수 성질에서

$g(x_1-x_2)=g(x_1)\div g(x_2)$이므로

즉 $g(m_1-m_2)=g(m_1)\div g(m_2)=n_1\div n_2$

고로 $g^{-1}(n_1\div n_2)=m_1-m_2$
$=g^{-1}(n_1)-g^{-1}(n_2)$

곧 $f(n_1\div n_2)=f(n_1)-f(n_2)$

$\therefore f(x_1\div x_2)=f(x_1)-f(x_2)$

⑥ 지수함수 성질에서

$g(x_1\times x_2)=\{g(x_1)\}^{x_2}$이므로

즉 $g(m_1 \times m_2) = \{g(m_1)\}^{m_2} = n_1^{m_2}$

곧 $g^{-1}(n_1^{m_2}) = m_1 \times m_2 = g^{-1}(n_1) \times m_2$

즉 $f(n_1^{m_2}) = m_2 f(n_1)$

$\therefore f\{x^m\} = mf(x)$이다.

〈**참고**〉 지수함수의 성질 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\times f(x_2)$에서 대수함수성질 $f^{-1}(x_1\times x_2)=f^{-1}(x_1)+f^{-1}(x_2)$를 유도됨을 자세히 설명해보자.

지수함수 $y=f(x)$의 성질 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\times f(x_2)$은 $(x_1, f(x_1))\in f$이고 $(x_2, f(x_2))\in f$일때 $(x_1+x_2,\ f(x_1)\times f(x_2))\in f$가 성립함을 뜻하며, 이는 곧 $(a_1, b_1)\in f$이고 $(a_2, b_2)\in f$일때 $(a_1+a_2,\ b_1\times b_2)\in f$로 나타낼수 있다. 따라서 그의 역함수 $y=f^{-1}(x)$ (대수함수)에는 $(b_1, a_1)\in f^{-1}$이고 $(b_2, a_2)\in f^{-1}$일때 $(b_1\times b_2,\ a_1+a_2)\in f^{-1}$가 성립한다. 이는 곧 $(b_1, f^{-1}(b_1))\in f^{-1}$이고 $(b_2, f^{-1}(b_2))\in f^{-1}$일때 $(b_1\times b_2,\ f^{-1}(b_1)+f^{-1}(b_2))\in f^{-1}$를 의미하므로, 대수의 성질 $f^{-1}(b_1\times b_2)=f^{-1}(b_1)+f^{-1}(b_2)$, 곧 $f^{-1}(x_1\times x_2)=f^{-1}(x_1)+f^{-1}(x_2)$가 유도된다.

IV. 結 語

순서쌍의 집합인 관계로서의 함수지도를 모색해 보았고, 나아가서 지수 및 대수의 성질을 함수 및 역함수의 성질로 다루어 보았다. 따라서 함수도 관계의 부분집합으로서 도형과 방정식, 부등식의 영역등과 함께 논리적으로 통합하여 지도되기를 바라고 아울러 현재 지도되어지고 있는 대응규칙으로서의 함수도 병행하여 지도함으로서 함수 개념 및 성질등 이해에 도움이 되기를 바란다.

참고문헌

1. 박한식, 신등선 集合論, 1971.
2. Seymour-Lipschutz, Set theory S.P.C 1964.
3. Frank, B. Allen, Elementary Function, X.U.P 1961.
4. Samuel Selby Relations, Functions, M.G.H, 1969.
5. 김훈직, (졸고), 순서쌍의 집합으로서의 關係 및 函數 지도. 1980.