韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1982. 2. Vol. XX No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Feb. 1982. Vol. XX No. 2

F분포에 관한 연구

徐 復 源

I. 서 론

통계적 추측은 표본조사를 통하여 얻은 지식을 토대로 모집단에 관한 정보를 귀납적으로 추론해 내는 것이 그 중심과제로 되고 있다.

그 방법으로서 모수의 추정과 가설의 검정이 있는 바 본고에서는 여러가지 검정중 분산에 관한 검정으로서 두개의 표본분산이, 같은 분산을 갖는 정규모집단으로부터 추출한 표본의 것인지를 검정할 때 활용되는 이론으로서의 F분포(Snedecor's F-distribution)에 관한 연구로 첫 째 F분포함수의 유도과정에서 대부분의 저술이 변수변환의 야코비안(Jacobian) J를 활용하고 있는 바 좀 더 쉬운 1변수변환법으로 유도해 보려하고, 둘 째 활용공식에 대한 이론적인 근거 제시가 불완전한 부분을 완전히 제시해 보고자 한다.

II. 본 론

1. F통계량

분산이 같은 두 정규모집단 $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$으로부터 각각 독립적으로 임의추출한 크기 m, n인 두 확률표본

$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m$ 및 $Y_1, Y_2, \cdots\cdots, Y_n$에서

$$\chi_1^2=\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{x_2-\mu_1}{\sigma}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{x_m-\mu_1}{\sigma}\right)^2=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma}\right)^2$$

$$\chi_2^2=\left(\frac{y_1-\mu_2}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{y_2-\mu_2}{\sigma}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{y_n-\mu_2}{\sigma}\right)^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{y_j-\mu_2}{\sigma}\right)^2$$

이라 할 때 χ_1^2, χ_2^2는 각각 자유도 m, n인 χ^2분포변수이고 이 두 χ^2변수를 각각의 자유도로 나눈 값의 비율 즉

$$F=\frac{\chi_1^2/m}{\chi_2^2/n} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

를 F통계량이라 하며 이 통계량을 확률변수로 하는 분포를 F분포라고 한다. 또 이 때의 F를 자유도 m, n인 F분포변수라고 한다.

〔정리 1〕 위의 두 확률표본 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m$ 및 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$에 의한 각 모분산의 불편분산을 각각 S_1^2, S_2^2이라고 하면 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$은 자유도 $m-1$, $n-1$인 F분포변수이다.

〔증명〕 $$S_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2=\frac{\sigma^2}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2$$

$$S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(y_j-\bar{y})^2=\frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{y_j-\bar{y}}{\sigma}\right)^2$$

여기서 $\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2$과 $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{y_j-\bar{y}}{\sigma}\right)^2$는 각각 자유도 $m-1, n-1$인 χ^2통계량이다. ($\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2$의 자유도가 m이 아니고 $m-1$인 이유는 $\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})=0$이므로 m개의 변수중 $m-1$개는 자유로운 값을 취할 수 있지만 나먹지 하나는 일의적으로 결정되기 때문이다). $\chi'^2_1=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2$, $\chi'^2_2=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{y_j-\bar{y}}{\sigma}\right)^2$이라 놓으면

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{\frac{\sigma^2}{m-1}\chi'^2_1}{\frac{\sigma^2}{n-1}\chi'^2_2}=\frac{\chi'^2_1/m-1}{\chi'^2_2/n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

따라서 $\frac{S_1^2}{S_2^2}$은 자유도 $m-1$, $n-1$인 F분포변수이다.

2. F분포의 밀도함수

F분포의 확률밀도함수가 어떻게 유도되는지에 대하여 알아 보기로 하자.

〔정리 2〕 χ_1^2, χ_2^2가 각각 자유도 m, n인 χ^2분포에 따르고, 서로 독립인 변수일 때 F통계량 $F=\frac{\chi_1^2/m}{\chi_2^2/n}$의 확률밀도 함수는

$$f(F)=\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(mF+n)^{-\frac{m+n}{2}} \times F^{\frac{m}{2}-1} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

이다.

〔증명〕 $F=\frac{\chi_1^2/m}{\chi_2^2/n}$, $\chi_1^2=x$, $\chi_2^2=y$라 놓으면 x, y는 각각 자유도 m, n인 χ^2분포에 따르므로

$$g(x)=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}x^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

($\Gamma(\alpha)$는 감마함수라고 하며 $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ 이다).

$$g(y)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}$$

여기서 두 변수 x, y는 서로 독립적이므로 x, y의 결합밀도함수 $g(x,y)$는

$g(x,y)=g(x)\cdot g(y)$을 만족한다.

따라서

$$g(x,y)=g(x)\cdot g(y)$$
$$=\frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{m}{2}-1}y^{\frac{n}{2}-1} \times e^{-\frac{x+y}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

여기서

$$\frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=c_1\text{라 놓으면}$$

$$g(x,y)=c_1x^{\frac{m}{2}-1}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x+y}{2}}$$

$\omega=\frac{x}{y}$라 놓으면 $\frac{\partial x}{\partial\omega}=y$, $x=\omega y$

x, y의 함수를 먼저 ω, y의 함수로 변환하려면 $h(\omega,y)=g(x,y)\frac{\partial x}{\partial\omega}$에 의하여

$$h(\omega,y)=c_1(\omega y)^{\frac{m}{2}-1}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{\omega y+y}{2}}y$$
$$=c_1\omega^{\frac{m}{2}-1}y^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{\omega+1}{2}y}$$

다음 ω만의 함수를 얻기위하여는 $h(\omega,y)$를 y로 적분해야한다. 즉

$$h(\omega)=\int_0^\infty h(\omega,y)dy \quad (0<y<\infty)$$
$$=c_1\omega^{\frac{m}{2}-1}\int_0^\infty y^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\frac{\omega+1}{2}y}dy$$

감마함수 $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$를 활용하기 위하여 $\frac{\omega+1}{2}y=t$라 놓으면 $dy=\frac{2}{\omega+1}dt$, $y=\frac{2t}{\omega+1}$, $y=0$이면 $t=0$, $y\to\infty$이면 $t\to\infty$이므로

$$=c_1\omega^{\frac{m}{2}-1}\int_0^\infty\left(\frac{2t}{\omega+1}\right)^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-t}\frac{2}{\omega+1}\,dt$$
$$=c_1 2^{\frac{m+n}{2}}\frac{\omega^{\frac{m}{2}-1}}{(\omega+1)^{\frac{m+n}{2}}}\int_0^\infty t^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-t}\,dt$$
$$=2^{\frac{m+n}{2}}c_1\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\frac{\omega^{\frac{m}{2}-1}}{(\omega+1)^{\frac{m+n}{2}}} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

이제 ω의 밀도함수에서 F의 밀도함수로 변수변환하기 위하여 $f(F)=g(\omega)\frac{d\omega}{dF}$를 이용하면 $F=\frac{n}{m}\omega$, $\omega=\frac{m}{n}F$, $\frac{d\omega}{dF}=\frac{m}{n}$이므로

$$f(F)=g(\omega)\frac{d\omega}{dF}$$
$$=g\left(\frac{m}{n}F\right)\cdot\frac{m}{n}$$

(6)식에서 $2^{\frac{m+n}{2}}c_1\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)=c_2$라 놓으면

$$=c_2\frac{\left(\frac{m}{n}F\right)^{\frac{m}{2}-1}}{\left(\frac{m}{n}F+1\right)^{\frac{m+n}{2}}}\cdot\frac{m}{n}$$

$$=c_2\cdot\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\cdot n^{\frac{m+n}{2}}F^{\frac{m}{2}-1}}{(mF+n)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$=c_2\cdot m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}F^{\frac{m}{2}-1}(mF+n)^{-\frac{m+n}{2}}$$

여기에 $c_2=2^{\frac{m+n}{2}}\cdot c_1\ \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)$,

$$c_1=\frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\text{이므로}$$

$$c_2=2^{\frac{m+n}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\text{을 대입하면}$$

$$f(F)=\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}F^{\frac{m}{2}-1}(mF+n)^{-\frac{m+n}{2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

또 감마함수와 베타함수사이의 관계

$\Gamma(m)\ \Gamma(n)=B(m,n)\Gamma(m+n)$

($B(m,n)$을 베타함수라 하며

$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$이다.)

에 의하여

$$f(F)=\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}\right)}F^{\frac{m}{2}-1}(mF+n)^{-\frac{m+n}{2}}\cdots\ (8)$$

로·나타내기도 한다.

〔정리 1〕과 〔정리 2〕를 종합해 보면 분산이 같은 두 정규모집단으로부터 추출한 크기 m, n인 확률표본의 불편분산비 $\frac{S_1^2}{S_2^2}$은 자유도 $m-1$, $n-1$인 F통계량이며 그 밀도함수는

$$f(F)=\frac{(m-1)^{\frac{m-1}{2}}(n-1)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

임을 알 수 있다.

자유도가 각각 (m=6, n=6), (m=20, n=6), (m=30, n=30)인 F분포곡선의 모양은 그림 〔1〕과 같다.

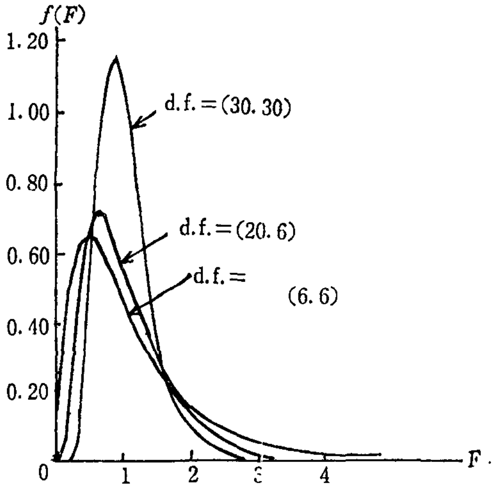

그림 〔1〕

3. F분포의 평균과 분산

F통계량의 평균과 분산에 대하여 알아 보면 다음과 같다.

〔**정리 3**〕 자유도 m, n인 F분포의 평균 μ_F와 분산 σ_F는

$$\mu_F=\frac{n}{n-2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$\sigma_F=\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

이다.

〔**증명**〕 확률밀도함수가 $f(x)$인 확률분포의 k차 원점적률 μ_k'는

$$\mu_k'=E\{x^k\}=\int_{-\infty}^{\infty}x^kf(x)dx\ \ (-\infty<x<\infty)$$

이므로 (7)식에 대한 F분포의 k차 원점적률은

$$\mu_k'=\int_0^{\infty}F^kf(F)\ dF$$

$$=\int_0^\infty F^k \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} F^{\frac{m}{2}-1}$$

$$(mF+n)^{-\frac{m+n}{2}}\, dF$$

$$=\frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty F^{k+\frac{m}{2}-1}$$

$$(mF+n)^{-\frac{m+n}{2}}\, dF$$

여기서 베타함수 $B(m,\ n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}$ dx를 이용하기 위하여 $u=\frac{mF}{mF+n}$라 놓으면

$$F=\frac{n}{m}\cdot\frac{u}{1-u},\quad dF=\frac{n}{m}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}du$$

$F=0$이면 $u=0$, $F\to\infty$이면 $u=1$ 이므로

$$=\frac{m^{\frac{m}{2}}\ n^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 \left(\frac{n}{m}\cdot\frac{u}{1-u}\right)^{k+\frac{m}{2}-1}$$

$$\left(\frac{1-u}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}} \frac{n}{m}\,\frac{du}{(1-u)^2}$$

$$=\frac{m^{\frac{m}{2}}\ n^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{m}\right)^{k+\frac{m}{2}} n^{-\frac{m+n}{2}}\ \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\int_0^1 u^{k+\frac{m}{2}-1}\,(1-u)^{\frac{n}{2}-k-1}\,du$$

$$=\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^k \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} B\left(k+\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}-k\right)$$

$$\left(\because B\left(k+\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}-k\right)=\int_0^1 x^{k+\frac{m}{2}-1}(1-x)^{\frac{n}{2}-k}dx\right)$$

또 베타함수와 감마함수사이의 관계 $\Gamma(m)\Gamma(n)=B(m,n)\Gamma(m+n)$에 의하여

$$B\left(k+\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}-k\right)$$

$$=\frac{\Gamma\left(k+\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{\Gamma\left(k+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}-k\right)}=\frac{\Gamma\left(k+\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$$

이므로

$$=\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^k \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(k+\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$$

$$\therefore\ \mu_k'=\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^k \Gamma\left(k+\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

그러므로 1차적률 μ_1'는

$$\mu_1'=\frac{\frac{n}{m}\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

감마함수의 성질 $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1)$에서

$$=\frac{\frac{n}{m}\,\frac{m}{2}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}$$

$$\therefore\ \mu_F=\frac{n}{n-2}\quad(n>2)$$

또 2차적률 μ_2'는

$$\mu_2'=\frac{\frac{n^2}{m^2}\Gamma\left(\frac{m}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

감마함수의 성질 $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1)$에서

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}+2\right)=\left(\frac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)$$

$$=\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

$$=\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)$$

이므로

$$\mu_2'=\frac{\frac{n^2}{m^2}\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)}$$

$$=\frac{n^2\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}}{m^2\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)}=\frac{n^2(m+2)}{m(n-2)(n-4)}$$

그런데 분산 $\sigma_F{}^2=\mu_2'-\mu_1'^2$에서

$$\sigma_F{}^2=\frac{n^2(m+2)}{m(n-2)(n-4)}-\frac{n}{n-2}$$

$$=\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$$

〔정리 4〕 F_1이 F통계량의 한 값이고 $F_1>1$일 때

$$\int_0^{\frac{1}{F_1}} f(F)dF=\int_{F_1}^{\infty} f(F)dF \text{이다.}$$

〔증명〕 $f(F)=\dfrac{m^{\frac{m}{2}}\, n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}\right)}\, F^{\frac{m}{2}-1}\,(mF+n)^{-\frac{m+n}{2}}$

((8)식에서)

$$\frac{m^{\frac{m}{2}}\, n^{\frac{n}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\ \frac{n}{2}\right)}=c \text{라 하자}$$

$$\int_0^{\frac{1}{F_1}} f(F)dF=c\int_0^{\frac{1}{F_1}} F^{\frac{m}{2}-1}\,(mF+n)^{-\frac{m+n}{2}}\,dF$$

$F=\frac{1}{F'}$로 놓으면 $dF=-\frac{dF'}{F'^2}$이고

$F=0$이면 $F'\to\infty$, $F=\frac{1}{F_1}$이면 $F'=F_1$이므로

$$=c\int_{\infty}^{F_1}\left(\frac{1}{F'}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{m}{F'}+n\right)^{-\frac{m+n}{2}}\left(-\frac{dF'}{F'^2}\right)$$

$$=c\int_{F_1}^{\infty}\frac{F'^{\frac{m+n}{2}}}{F'^{\frac{m}{2}+1}\,(m+nF')^{\frac{m+n}{2}}}dF'$$

$$=c\int_{F_1}^{\infty} F'^{\frac{n}{2}-1}\,(m+nF')^{-\frac{m+n}{2}}\,dF'$$

여기서 F'는 F의 역수로서 역시 F통계량이고, F의 자유도가 m, n인데 반하여 F'의 자유도는 그 순서를 바꾸어 놓은 n, m이므로

$$=\int_{F_1}^{\infty} f(F')dF'$$

$$=\int_{F_1}^{\infty} f(F)dF$$

4. F분포의 응용

두 개의 임의표본(그 불편분산이 각각 S_1^2, S_2^2인)이 같은 분산을 갖는 정규모집단에 속하면 그 분산비 $F\left(=\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$의 값은 1에 근사해 간다고 기대할 수 있고 역으로 1에서 일정한 한도 이상으로 멀어지면 그 두 표본은 각각 분산이 다른 모집단에 속한다고 할 수 있겠다. 등분산의 가설이 채택되는 F의 표본치의 존재구간을 구간 $(F_1,\ F_2)$라고 하면 등분산의 가설이 기각되는 F의 표본치의 존재구간은 $F<F_1$ 또는 $F>F_2$이다.

이것을 F분포곡선을 이용하여 표시하면 그림 〔2〕와 같다.

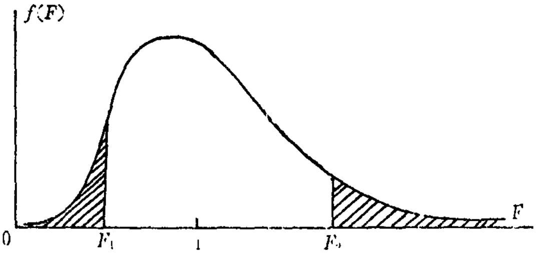

그림 〔2〕

여기서 $\int_0^{F_1} f(F)dF=\int_{F_2}^{\infty} f(F)dF$ 이고, 〔정리 4〕에 의하여 F_1, F_2사이에는 $F_1=\frac{1}{F_2}$인 관계가 있다.

이 때 한계치 F_1, F_2는 F의 자유도 및 유의수준에 의하여 결정된다.

F분포표(수표)는 F분포가 두 개의 모수(자유도) m, n에 의존하므로 서로 다른 확률과 m, n에 대응하는 F값을 나타내는 삼중분류표의 형식을 취하고 있고 F의 값은 우측한계치 F_2의 값만이 나오며 $\int_{F_2}^{\infty} f(F)dF=0.05$인 경우와 $\int_{F_2}^{\infty} f(F)dF=0.01$인 경우만이 표에 나와 있다.

〔보기〕 어느 두 종류의 제품에 대한 강도를 검사한 결과가 아래와 같다.

종류 I :	138	127	134	125		
종류 II :	134	137	140	130	135	134

이 자료를 사용하여 두개의 표본의 분산이 5%의 유의수준에서 등분산인지를 검정하여라.

〔풀이〕

X	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$	Y	$Y-\bar{Y}$	$(Y-\bar{Y})^2$
138	7	49	134	−1	1
127	−4	16	137	2	4
134	3	9	140	5	25
125	−6	36	130	−5	25
			135	0	0
			134	−1	1
524	0	110	810	0	56

$$S_1^2=\frac{\sum(X-\bar{X})^2}{m-1}=\frac{110}{4-1}=\frac{110}{3}=36.67$$

$$S_2^2=\frac{\sum(Y-\bar{Y})^2}{n-1}=\frac{56}{6-1}=\frac{56}{5}=11.20$$

$$F=\frac{36.67}{11.20}=3.27$$

여기서는 S_1^2과 S_2^2이 유의적인 차이가 있는 지를 알고자 하는 것이므로 양측검정을 적용하게 되어 그림 〔3〕에서 알수 있드시

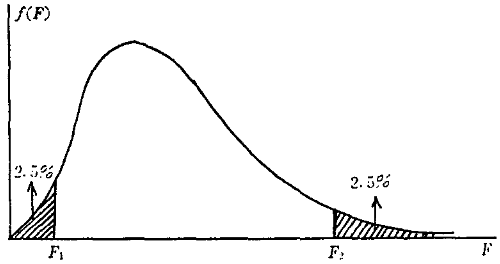

그림 〔3〕

$F_2(3.5)=F_{0.975}(3.5)=7.76$

따라서 $F_1<F(=3.27)<F_2=7.76$으로 되어 두개의 분산은 등분산이라고 할 수 있다.

III. 결　　어

F분포 이론을 수리적인 면을 중심으로 나름대로 체계를 세워 정리해 보았다. 수리통계학의 극히 단편적인 일부이지만 F분포이론을 이해하는데 다소나마 도움이 되었으면 한다.

참 고 문 헌

尹起重, 數理統計學

金正年, 統計學

鄭英鎭, 實用現代統計學

崔鍾碩 外 數名 新制統計學

P.G. Hoel, Introduction to Mathematical Statistics

Erwin Kreyszig, Introductory Mathematical Statistics

Paul L. Meyer, Introductory Probability and Statistical Applications