韓國數學敎育學會誌<數學敎育>
1982. 6. Vol. XX, No. 3

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1982. Vol. XX, No. 3

Markov Chain에 關한 硏究

李 殷 九
大田大學

I. 序 論

日氣豫報, 自動制御, 通信網의 構造, 經濟學에서의 價格變動……物理, 化學, 工學, 生物, 學等, 自然 및 人文科學 諸專門分野 硏究에 應用되는 Markov Chain에 關하여 興味를 가지고 그 아름다운 理論을 數學的 측면에서 考察해 보고자 한다.

또 몇 個의 model을 例擧함으로 諸分野에서 應用하는데 도움을 주고자 한다. Markov chain을 理解하는데 必要한 數學的 基本事項을 第Ⅱ章에서 다루고 第Ⅲ章에서 Markov chain을 論하려 한다.

II. 基本事項

§1. Fixed point

u가 한 벡터이고 A가 행렬일 때

$uA=u$이면 u를 行列 A의 fixed vector or fixed point라 한다.

ex. 1 $u=(2,-1)$, $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$이라 할 때

$$uA=(2,1)\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}=(2,-1)=u$$

따라서 u는 行列 A의 fixed point이다.

§2. 確率벡터

한 벡터가 그 元素들이 모두 음이 아니고 그 元素들의 合이 1일때 그 벡터를 確率벡터라 한다.

例 1. $U=(u_1, u_2, \cdots, u_n)$에서

$u_i \nless 0$, for all i

$\sum_i u_i=1$이면 U는 確率벡터이다.

例 2. $U=\left(0, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$은 確率벡터이다.

例 3. nonzerovector $V=(2,3,1,0,5,7)$은 確率벡터가 아니지만

그 元素의 합 $\lambda=2+3+1+0+5+7=18$일 때 V의 스칼라 $\frac{1}{\lambda}$배

$\frac{1}{\lambda}V=\left(\frac{2}{18}, \frac{3}{18}, \frac{1}{18}, 0, \frac{5}{18}, \frac{7}{18}\right)$은 probability vector이다.

§3. 推移行列

各行이 確率벡터로 되어 있는 正方行列을 推移行列이라 한다.

例 1. $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$은 正方行列이면서 各行이 確率벡터이므로 推移行列이다.

§4. 確率過程

時系列을 表現하는데는 먼저 觀測을 施行한 時刻의 集合 T를 定하여야 한다.

觀測을 一定한 時間間隔을 가지고 할 때

$T=\{0,1,2,\cdots, N\}$ 이때 N은 觀測한 回數이다. 이 경우를 離散型 施行이라 하고

觀測을 連續해서 하는 경우

$T=\{t\,|\,0\leq t\leq L\}$ 이때 t는 觀測한 時間이다. 이 경우를 連續型 施行이라 한다.

時刻 t에서 觀測한 量을 $X(t)$로 나타내고 그 集合 $\{X(t)\,|\,t\epsilon T\}$로 時系列을 表現한다.

特히 各 t에 對하여 $X(t)$가 確率變數일 때 $\{X(t)\,|\,t\epsilon T\}$를 確率過程이라 한다.

III. Markov Chain

§1. Markov Chain의 定義

$\{X(t)\}$가 確率過程일 때 $X(t)$가 取하는 값을 狀態라 한다.

$X(n)=a_i$인 것을 n단계(n회) 施行에서 狀態 a_i

에 있다고 한다.

따라서 確率變數 $X(t)$가 $X_1, X_2, \cdots$, X_n일때 對應하는 狀態空間은 有限, 可算集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$에 屬한다. 狀態의 順序雙 (a_i, a_j)의 確率은 $P_{ij}^{(n)}$으로 나타내고 確率變數 $X(n)$, $X(n+1)$의 狀態가 a_i, a_j일때 狀態 a_j는 狀態 a_i의 바로 다음 단계의 시행결과의 確率이 $P_{ij}^{(n)}$이라는 뜻이다.

이러한 推移過程을 Markov chain이라 한다.

§2. Markov行列(推移確率行列)

수 P_{ij}를 推移確率이라 하고

行列로 늘어놓으면

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12}\cdots\cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2}\cdots\cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$P=(p_{ij})$를 markov 行列 또는 推移確率行列이라 한다. 推移確率 p_{ij} (P의 entry)는 다음 條件을 만족한다.

i) $p_{ij} \geqq 0$ ii) $\sum_{r} p_{ij}=1$

$P=(p_{ij})$에서 p_{ij}는 1回의 施列에서 狀態 a_i에서 a_j에 推移하는 確率이다.

例 1.

어떤 사람이 自家用車(drive)로 가거나, 電鐵(train)으로 出勤한다. 연 이틀을 電鐵을 利用하지 않는다. 또 自家用車로 出勤한 다음날에는 自家用이나 電鐵을 같은 確率로 利用한다.

이때 Markov chain(推移確率行列)은

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} t & d \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$ 이다.

例 2. 野球선수가 공던지기를 한다.

한 선수는 다른 두 선수의 어느 쪽에 확률 $\frac{1}{2}$로 공을 던진다. 이때 상태공간은 {1번, 2번, 3번}(1번, 2번, 3번은 선수의 배번)

(推移確率行列)

$$P=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

위에서와 같이 狀態 a_i에서 1단계 거쳐 狀態 a_j로 변하는 과정을 $a_i \to a_j$로 나타낼때 그 確率은 $p_{ij}^{(1)}=p_{ij}$이고 狀態 a_i에서 n단계 거쳐 狀態 a_j로 推移하는 過程을 $a_i \to a_{k_1} \to a_{k_2} \to \cdots \to a_{k_{n-1}} \to a_j$로 表示한다. 이때 그 確率은 $p_{ij}^{(n)}$이다.

$p_{ij}^{(n)}$은 行列 $p^{(n)}$에 있는 元素들이다.

$p^{(n)}$을 n단계 推移確率行列이라 한다.

§3. 定常 Markov行列(定常推移確率行列)

모든 n에 對하여 P^n의 모든 원소가 양수이면 P를 定常라 한다.

例 1. 推移行列

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ 일 때

$$P^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

이므로

P는 定常 Markov 行列이다.

§4. 定常推移行列의 性質

P가 定常推移行列이면 다음과 같은 性質이 있다.

i) P는 唯一한 fixed probability vector t를 갖는다. (t의 모든 원소는 양수)

ii) P의 수열 $P, P^2, P^3, \cdots$은 行列 T에 수렴한다. 行列 T의 各行은 各各 fixed point t로 되어 있음.

iiii) p가 어떤 確率벡터이면
벡터의 수열
$pP, pP^2, \cdots pP^n \cdots$은 fixed point t에 수렴한다.

§5. k단계에서의 推移確率行列

定常인 Markov Chain에서는 임의의 기에 a_i라는 狀態에서 다음기에 $1, 2, \cdots n$이라하는 狀態로 推移되는 確率은

p_{i1}, $p_{i2}, \cdots p_{in}$이므로 a_i에서 $1, 2, \cdots n$의 어느 것으로 반드시 推移되므로 $p_{i1}+p_{i2}+\cdots+p_{in}=1$.

一般的으로 K단계의 推移確率 $p_{ij}^{(k)}$를 行列로 나타내면 定常 Markov Chain 行列은

$$P^{(k)}=\begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)}\cdots & p_{1n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1}^{(k)} & p_{n2}^{(k)}\cdots & p_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

이고 各行의 合은 1이다.

그런데

$P^{(k+l)}=P^{(k)}\cdot P^{(l)}$이 成立하므로

$P^{(1)}=P$

$P^{(k+1)}=P^{(k)}\cdot P=P^{k+1}$

$P^{(n)}=P^n$

P가 Markov Chain의 推移行列일 때

n단계의 추이행렬은 P의 n제곱 P^n과 같다.

즉 $P^{(n)}=P^n$

例 1. 어느 해의 농작물이 풍작이었다. 그 다음해도 풍작일 확률은 8/10이고 어느해 흉작이었는데 그 다음해 흉작일 확률은 1/10이다. 풍작인 상태를 a_1, 흉작인 상태를 a_2라 할 때

Markov 行列은

$$P=\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P^{(2)}=P^2=\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.82 & 0.18 \\ 0.81 & 0.19 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\vdots$

$p_{11}^{(2)}$: $a_1\to a_1$일 확률 0.82

$p_{12}^{(2)}$: $a_1\to a_2$ 〃 0.18

$p_{21}^{(2)}$: $a_2\to a_1$ 〃 0.81

$r_{22}^{(2)}$: $a_2\to a_2$ 〃 0.19

例 2. Markov 行列 P

$$P=\begin{array}{c} \\ t \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \text{ 일때}$$

$$P^4=P^2\cdot P^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{array}{c} \\ t \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix} \end{array}$$

$P_{td}^{(4)}=\frac{5}{8}$

4단계에서 상태 t에서 상태 d로 推移될 確率은 $\frac{5}{8}$이다.

§6. k단계에서의 確率分布

第 k단계에서 a_i라는 狀態에 있을 確率 $p_i^{(k)}$를 성분으로 하는 vector를

$\pi(k)=(p_1^{(k)},\ p_2^{(k)}, \cdots,\ p_n^{(k)})$라 하고

k단계의 確率分布라 한다.

特히 $\pi(0)=(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \cdots p_n^{(0)})$을 初期確率分布라 한다.

P가 Markov Chain의 推移行例일 때

$p=(p_i)$가 임의의 기의 確率分布이면

pP는 1단계 후의 確率分布가 된다.

特히 pP^n은 n단계후의 確率分布이다.

$p^{(1)}=\pi(0)P,\ p^{(2)}=p^{(1)}P=\pi(0)P^2\cdots$

$p^{(n)}=p^{(n-1)}\ P=\pi(0)P^n$

例 1. §2, 例 1에서 어느날 出勤에 주사위를 던져 6의 눈이 나올 때 自家用車로 出勤하기로 한다면

$$\text{初期確率分布}\quad \pi(0)=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & d \end{array} \\ \left(\frac{5}{6},\ \frac{1}{6}\right) \end{array}\text{이다.}$$

$$p^{(4)}=\pi(0)\ P^4=\left(\frac{5}{6},\ \frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} \frac{3}{8}, & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16}, & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & d \end{array} \\ \left(\frac{35}{96},\ \frac{61}{96}\right) \end{array}$$

4日째, 즉 4단계째의

確率分布 $p^{(4)}=\left(\frac{35}{96},\ \frac{61}{96}\right)$

따라서 $p_t^{(4)}=\frac{35}{96},\quad p_d^{(4)}=\frac{61}{96}$

§7. Markov Chain의 固定分布

Markov Chain의 推移行列 P가 定常이면

n단계의 수열 P^n은 行列 T에 수렴한다.

T의 各行은 P의 fixed point t로 된다.

따라서 $P_{ij}^{(n)}$은 充分히 큰 n에 對하여 상태 a_j는 상태 a_i에 관계없이 t의 성분 t_j에 가까워진다.

推移行列의 各行이 P의 fixed point t에 수렴할 때 Markov Chain은 固定分布를 한다고 한다.

다른 측면에서 살펴보면

X_i를 第 t기에 a_i라는 狀態에 있을 때 1, 다른 狀態에 있을 때 0으로 되는 確率變數라 하면

$E(X_t)=p_i^{(t)}\cdot 1+(1-p_i^{(t)})0=p_i^{(t)}$이므로

$X_1+X_2+\cdots+X_t$는 第 t 기까지 a_i라는 상태에 있는 수를 나타내는 確率變數이므로

이것을 t로 나눈 것이 그 平均이다.

따라서 a_i라는 狀態에 있는 期의 平均은

$$\frac{1}{t}E(X_1+X_2+\cdots+X_t)=\frac{1}{t}\{p_i^{(1)}+\cdots+p_i^{(t)}\}$$

이다.

$t\to\infty$일때 $p_i^{(t)}\to \bar{p}_i$라 하면

이 平均의 極限값은 $\bar{p}_i$이다.

$$(\therefore\ a_n\to\alpha\text{일때 } \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\to\alpha)$$

充分히 큰 n에 대한 n단계에서

定常 Markov Chain은 固定分布를 하게 된다.

例 1. 어느 外販員의 販賣區域이 세 都市 A, B, C이다. 같은 都市에서 連이틀 판매치 않는다.

A에서 판매했으면 다음날은 B에서 판매한다. 그러나 B, C에서 판매했으면 다음날은 A에서 판매할 확률이 B 또는 C에서 판매할 확률의 2배이다.

i) Markov Chain 行列 P는?

ii) long run後의 A, B, C 판매률은?

풀이 i)

$$P=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ii) $u=(x, y, z)$

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}=(x, y, z)$$

$u=(8, 9, 3)$

$$\begin{array}{c} \quad\quad\ \ \text{A}\quad\ \ \text{B}\quad\ \ \text{C} \\ \frac{1}{\lambda}u=t=\left(\frac{8}{20}, \frac{9}{20}, \frac{3}{20}\right) \end{array}$$

여기에서 t는 P의 fixed point이다.

long run 後에는 A에서 40%

B 〃 45%

C 〃 15%로 판매한다.

III. 結 語

以上에서 考察한 것은 確率變數가 離散型인 것만 取扱하였다.

다음에는 연속형의 고찰 및 Markov Chain에 關한 解析的 立場에서 이것을 研究하려 한다.

參 考 文 獻

〔1〕 Samuel Karlim: A First Course in Stochastic Process.

〔2〕 渡部隆一：確率，共公出版社

〔3〕 Seymour Lipschuts: Probability Shaum Series.

〔4〕 河田龍夫：確率と統計 朝倉書店

〔5〕 Serge Lang: Linear Algebra