韓國OR學會誌
第7卷 第2號
1982年 10月

一般限界문제의 感度分析

(Sensitivity Test for a Linear Programming Problem with Bounded Variables)

朴 淳 達*

正規型(cannonical form) 또는 標準型(standard form)의 線型計劃法문제의 感度分析은 이미 잘 알려져 있다. 여기에서는 다음과 같은 一般限界문제의 感度分析을 다루기로 한다.

$$\max\ CX \quad \text{s.t.} \quad AX=\boldsymbol{b}, \quad 0\le \boldsymbol{l}\le X\le \boldsymbol{u} \tag{1}$$

이 경우에서도 일반 線型計劃法문제와 같이 $C, \boldsymbol{b}, A$에 대해 감도분석을 수행할 수 있다. C와 $\boldsymbol{b}$에 대한 감도분석은 비교적 쉬우나 A에 대한 것은 퍽 복잡하다.

이들의 범위는 일반적인 선형계획법문제와 마찬가지로 현재의 基底를 변화시키지 않는 범위이기 때문에 다음 조건을 만족시켜야 한다.

$$\begin{aligned} &C_BB^{-1}A._j-c_j\ge 0, \quad x_j=l_j \\ &C_BB^{-1}A._j-c_j\le 0, \quad x_j=u_j \\ &\boldsymbol{l}\le X_B=B^{-1}\boldsymbol{b}-\sum_j B^{-1}A._jx_j\le \boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{2}$$

마지막 조건은 基底변수의 값 X_B가 下限과 上限 사이에 있어야 하기 때문이다.

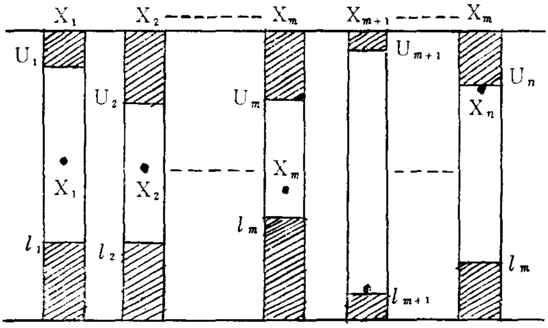

그림 1 解의 상태

지금 最適基底를 편리상 $x_1, \cdots\cdots, x_n$이라고 하자. 그러면 최종회에서 각 변수의 상태는 다음 그림 1과 같다.

I. 目的函數의 係數

지금 $c_k'=c_k+\theta$라고 하자. 즉 $c'=c+\theta e_k$라고 하자. 두가지 경우를 분리하여 생각하도록 하자.

x_k가 非基底인 경우

이 경우에는 (2)의 마지막 조건에는 영향을 미치지 않는다. 그러나 x_k가 上限에 있을 때와 下限에 있을 경우가 구별되는데 上限에 있을 경우에는 모든 c_j에 대해 $\bar{c}_j\le 0$가 되어야 하고 下限에 있는 모든 c_j에 대해서는 $\bar{c}_j\ge 0$가 성립되어야 한다. 따라서

$x_k=u_k$일 때에는

$$\begin{aligned} \bar{c}_k' &= C_BB^{-1}A._k-c_k'=C_BB^{-1}A._k-c_k-\theta \\ &=\bar{c}_j-\theta\le 0 \end{aligned}$$

이므로

$$\bar{c}_j\le\theta\le\infty \tag{3}$$

가 성립한다. 비슷하게 $x_k=l_k$일 때에는

$$-\infty\le\theta\le\bar{c}_j \tag{4}$$

이다.

x_k가 基底인 경우

x_k가 基底이고 基底B에서의 指數를 k'라고 하자. 그리고 $C_B'=C_B+\theta e_{k'}$이라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} \bar{c}_j' &= C_B'B^{-1}A._j-c_j=(c_B+\theta e_k')B^{-1}A._j-c_j \\ &=C_BB^{-1}A._j-c_j+\theta e_k'B^{-1}A._j \\ &=\bar{c}_j'+\theta e_k'\bar{A}._j \end{aligned}$$

가 된다. 그런데 $x_j=u_j$이면 $\bar{c}_j'\le 0$이고 $x_j=l_j$이면 $\bar{c}_j'\ge 0$이어야 한다. 따라서 上限에 있는 x_j에 대해서

$$\max_{\substack{j \\ \bar{a}_{k'j}<0 \\ x_j=u_j}}\left\{-\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{k'j}}\right\}\le\theta\le\min_{\substack{j \\ \bar{a}_{k'j}>0 \\ x_j=u_j}}\left\{-\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{k'j}}\right\} \tag{5}$$

* 서울大學校 工科大學

이고 下限에 있는 x_j에 대해서는

$$\max_{j\,|\,\bar{a}_{k'j}>0,\ x_j=l_j}\left\{-\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{k'j}}\right\} \leq \theta \leq \min_{j\,|\,\bar{a}_{k'j}<0,\ x_j=l_j}\left\{-\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{k'j}}\right\} \qquad (6)$$

가 성립한다. 따라서 c_k의 변화범위는 식(5)와 식(6)을 만족시키는 θ의 범위이다.

Ⅱ. 右邊常數

지금 b_k의 변화범위를 알고 싶다고 해보자. 우선 $\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}+\theta e_k$라고 두자. 그런데 $\boldsymbol{b}$의 변화는 조건 (2)의 첫째와 두째와는 상관없다. 세번째 조건을 보자. 基底변수의 값을 X_B라고 두자.

$$\begin{aligned} X_B' &= B^{-1}b' - \sum_j B^{-1}A_{.j}x_j \\ &= B^{-1}(b+\theta e_k) - \sum_j B^{-1}A_{.j}x_j \\ &= (B^{-1}b - \sum_j B^{-1}A_{.j}x_j) + \theta B^{-1}e_k \\ &= X_B + \theta B^{-1}e_k, \end{aligned} \qquad (7)$$

단 $e_k=(0, \cdots\cdots, 0, 1, 0, \cdots\cdots, 0)^T$

x_{n+k}가 여유변수일 경우

k行의 여유변수가 基底변수일 경우이다. 여유변수는 下限을 가지고 있을 뿐이고 下限은 零이다. 따라서 식(7)는

$$(X_{B'})_k = (X_B)_k + \theta \geq 0$$

가 되어

$$-(X_B)_k \leq \theta \leq \infty \qquad (8)$$

가 된다. $(X_B)_k$는 k行의 基底변수의 값이다.

x_{n+k}가 여유변수가 아닐 경우

이 때에는 (2)의 조건을 만족시켜야 한다. 즉 $l_i \leq (X_B')_i \leq u_i$ 지금 $l_i \leq (X_B')_i$만을 생각하면

$$\max_{i\,|\,b_{ik}>0}\left\{\frac{-(X_B)_i - l_i}{b_{ik}}\right\} \leq \theta \leq \min_{i\,|\,b_{ik}<0}\left\{\frac{-(X_B)_i - l_i}{b_{ik}}\right\} \quad (9)$$

단 b_{ik}는 B^{-1}의 要素임.

이 된다. 그리고 $(X_B)_i \leq u_i$만을 생각하면

$$\max_{i\,|\,b_{ik}<0}\left\{\frac{u_i - (X_B)_i}{b_{ik}}\right\} \leq \theta \leq \min_{i\,|\,b_{ik}>0}\left\{\frac{u_i - (X_B)_i}{b_{ik}}\right\} \quad (10)$$

이 된다. 따라서 b_k의 범위는 (9)과 (10)을 만족시키는 θ의 범위가 된다.

Ⅲ. 行列係數

$a_{pq}'=a_{pq}+\theta$가 변화해도 현재의 底基가 변하지 않는 범위를 구해보자. 이때에도 조건 (2)를 만족시키는 범위를 구한다.

가. x_q가 非基底일 경우

지금 $A'_{.q}=A_{.q}+\theta e_p$라고 하자. 그러면 모든 j에 대해 행렬변수의 변화에 대한 목적함수係數의 변화는

$$\bar{c}_q = C_B B^{-1}A'_{.q} - c_j = (C_B B^{-1}A_{.q} - c_j) + \theta C_B B^{-1}e_p \quad (11)$$

가 된다. 이것이 $x_q=l_q$일 때는 非陰이라야 하며 $x_q=u_q$이면 非陽이라야 한다. 따라서 $x_q=l_q$일 때에는

$$\begin{aligned} \theta &\geq -\bar{c}_j/\pi_q, \quad \pi_q>0 \\ &\leq -\bar{c}_j/\pi_q, \quad \pi_q<0 \end{aligned} \qquad (12)$$

이고 $x_q=u_q$이면

$$\begin{aligned} \theta &\leq -\bar{c}_j/\pi_q, \quad \pi_q>0 \\ &\geq -\bar{c}_j/\pi_q, \quad \pi_q<0 \end{aligned} \qquad (13)$$

단 $\pi_q=(C_B B^{-1})_q$

가 된다. 그런데 $\pi \geq 0$이기 때문에 식 (12)와 식(13)은 각각

$$\begin{aligned} -\bar{c}_j/\pi_q \leq \theta \leq -\bar{c}_j/\pi_q, &\quad x_q=l_q\text{일 때} \\ -\bar{c}_j/\pi_q \leq \theta \leq -\bar{c}_j/\pi_q, &\quad x_q=u_q\text{일 때} \end{aligned} \qquad (14)$$

가 된다. 이것은 a_{pq}가 이 범위 사이에서 변할 때는 雙對可能性(dual feasibilty)는 유지된다는 것을 뜻한다. 다음은 原可能性(primal feasibilty)를 유지하는 범위를 찾아보자.

지금 a_{pq}를 a_{pq}'로 대체했을 때의 基底값을 X_B'이라고 하면 이 X_B'은

$$\boldsymbol{l} \leq X_B' \leq \boldsymbol{u}$$

이어야 한다. 따라서 $x_q \neq 0$일 때는

$$\begin{aligned} X_B' &= B^{-1}b - \sum_{j\neq q} B^{-1}A_{.j}x_j - B^{-1}A_{.q}'x_q \\ &= B^{-1}b - \sum_j B^{-1}A_{.j}x_j - \theta B^{-1}e_p x_q \\ &= X_B - \theta B^{-1}e_p x_q \end{aligned} \qquad (15)$$

가 된다. 그래서 $\boldsymbol{l} \leq X_B'$만을 보면

$$\max_{i\,|\,b_{ip}<0}\left\{\frac{(X_B)_i - l_i}{b_{ip}\cdot x_q}\right\} \leq \theta \leq \min_{i\,|\,b_{ip}>0}\left\{\frac{(X_B)_i - l_i}{b_{ip}x_q}\right\} \quad (16)$$

가 되고

$X_B \leq \boldsymbol{u}$를 보면

$$\max_{i\,|\,b_{ip}>0}\left\{\frac{(X_B)_i - u_i}{b_{ip}\cdot x_q}\right\} \leq \theta \leq \min_{i\,|\,b_{ip}<0}\left\{\frac{(X_B)_i - u_i}{b_{ip}x_q}\right\} \quad (17)$$

단 b_{ip}는 B^{-1}의 (i, p)要素

가 된다.

결국 x^b가 非基底일 때의 a_{pq}의 변화범위는 식 (14) (16), (17)을 만족시키는 범위가 된다.

나. x_q가 基底일 경우

x_q의 B에서의 指數를 q'이라고 하자. 즉 x_q가 基底 X_B에서 q'번째 있다고 하자. E_{ij}를 (i, j)要素만 1이고 기타는 모두 0인 行列이라고 하자.

먼저 基底B의 변화를 보자. $B'=B+\theta E_{pq}'$라고 두면

$$B'^{-1} = [B(I+\theta B^{-1}E_{pq}')]^{-1} = (I+\theta B^{-1}E_{pq}')^{-1}B^{-1}$$

가 된다. 그리고

이것을 $I+E_q'$라고 두자. 그러면

$$B'^{-1} = (I+E_q')B^{-1} = B^{-1} + E_q B^{-1} \qquad (19)$$

$$(I+\theta B^{-1}E_{pq})^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & -b_{1q}\cdot\theta/1+b_{pq}\cdot\theta & & \\ & \ddots & \vdots & & 0 \\ & & 1/1+b_{pq}\cdot\theta & & \\ & 0 & \vdots & \ddots & \\ & & -b_{mq}\cdot\theta/1+b_{pq}\cdot\theta & & 1 \end{pmatrix}$$

$$=I+\begin{pmatrix} & -b_{pq}\cdot\theta/1+b_{pq}\cdot\theta & \\ & \vdots & \\ 0 & -b_{pq}\cdot\theta/1+b_{pq}\cdot\theta & 0 \\ & \vdots & \\ & -b_{mq}\cdot\theta/1+b_{pq}\cdot\theta & \end{pmatrix}$$

이 된다.

雙對可能性

먼저 a_{pq}가 변하여도 雙對可能性이 유지되는 범위를 계산해 보자. B^{-1}가 변하면 모든 割引價가 변하기 때문에 변하는 割引價 $\bar{c}_j'$는

$$\begin{aligned}\bar{c}_j' &= C_B B'^{-1}A._j = C_B(B^{-1}+E_qB^{-1})A._j - c_j \\ &= (C_BB^{-1}A._j - c_j) + C_BE_qB^{-1}A._j \\ &= \bar{c}_j + C_BE_q\bar{A}._j \\ &= \bar{c}_j - \frac{a_{pj}}{1+b_{pq}'\cdot\theta}\sum_{i=1}^{m}(C_B)_i b_{iq}\cdot\theta \end{aligned} \qquad (20)$$

가 된다.

그런데 $x_j=l_j$일 경우에는 $c_j'\geq 0$이어야 하며 $x_j=u_j$일 경우에는 $c_j'\leq 0$이어야 현재의 基底가 雙對可能性을 유지한다.

먼저 $x_j=l_j$일 경우 θ의 범위를 구해보자. 우선 $1+b_{pq}'\theta>0$인 범위 즉

$$\begin{aligned}\theta &> -1/b_{pq}',\ b_{pq}'>0\text{일 때} \\ &< -1/b_{pq}',\ b_{pq}'<0\text{일 때}\end{aligned} \qquad (21)$$

에서 보자. $\bar{c}_j'\geq 0$이어야 하기 때문에,

$$d_j=\bar{a}_{pj}\sum_{i=1}^{m}(C_B)_i b_{iq}'-\bar{c}_j b_{pq}' \qquad (22)$$

이라고 두면

$$\begin{aligned}\theta &\leq \bar{c}_j/d_j,\ d_j>0 \\ &\geq \bar{c}_j/d_j,\ d_j<0\end{aligned}$$

가 된다. 따라서 모든 $x_j=l_j$에 대한 범위는 식(21) 범위와

$$\max_{\substack{d_j<0\\x_j=l_j}}\{\bar{c}_j/d_j\}\leq\theta\leq\min_{\substack{d_j\geq 0\\x_j=l_j}}\{\bar{c}_j/d_j\} \qquad (23)$$

가 겹치는 범위에 해당된다.

결국 $x_j=l_j$에 대한 θ의 범위는

$$\{식(21)\cap 식(23)\} \qquad (24)$$

이 된다.

다음에는 $x_j=u_j$일 경우의 θ의 범위를 구해보자. 이 때에는 $\bar{c}_j'\leq 0$이어야 한다. $1+b_{pq}'\theta\geq 0$인 부분 즉 식(21)에서

θ의 범위가

$$\begin{aligned}\theta &\geq \max_{\substack{d_j>0\\x_j=u_j}}\{\bar{c}_j/d_j\} \\ &\leq \min_{\substack{d_j<0\\x_j=u_j}}\{\bar{c}_j/d_j\}\end{aligned} \qquad (25)$$

과 겹치는 부분이 된다.

그래서 雙對可能性이 유지되는 θ는

$$[\{식(21)\cap 식(23)\}]\cap[\{식(21)\cap 식(25)\}] \qquad (26)$$

$$\{식(21)\cap 식(23)\cap 식(25)\}$$

으로 표현될 수 있다.

原可能性

다음은 原可能性을 유지시키는 범위를 계산해 보자. 이 범위는 a_{pq}가 변함에 따라 변하는 X_B'가 주어진 한계를 넘지 않는 부분이다. X_B'는

$$\begin{aligned}X_B' &= B'^{-1}b-\sum_j B'^{-1}A._jx_j \\ &= (I+E_q')B^{-1}b-\sum_j(I+E_q')B^{-1}A._jx_j \\ &= B^{-1}b-\sum_j B^{-1}A._jx_j+E_q'(B^{-1}b-\sum_j B^{-1}A._jx_j) \\ &= X_B+E_q'X_B\end{aligned} \qquad (27)$$

단 E_q'은 식(18)

가 된다. 이 X'_B가 모든 i에 대하여

$$l_i\leq(X_B')_i\leq u_i$$

이어야 하기 때문에

$$l_i \leq (X_B)_i - \frac{b_{iq}' \cdot \theta}{1+b_{pq}' \cdot \theta}(X_B)_q' \leq u_i \tag{28}$$

이 된다.

먼저 $1+b_{pq}' \cdot \theta > 0$인 범위 즉 식(21) 범위에서 생각해 보자. 우선 식(28)의 왼쪽만 보자. 즉

$$l_i \leq (X_B)_i - \frac{b_{iq}' \cdot \theta}{1+b_{pq}' \cdot \theta}(X_B)_q' \tag{29}$$

이 식에서

$$\frac{b'_{iq} \cdot \theta (X_B)_q'}{1+b_{pq}' \cdot \theta} \leq (X_B)_i - l_i$$

$$(X_B)_q' \cdot b_{iq}' \cdot \theta \leq ((X_B)_i - l_i)(1+b_{pq}' \cdot \theta)$$

$$\{b_{iq}'(X_B)_q' - b_{pq}'(X_B)_i + b_{pq}' \cdot l_i\}\theta \leq (X_B)_i - l_i \tag{30}$$

이 된다. 여기서

$$\hat{b}_{iq}' = b_{iq}'(X_B)_q' - b_{pq}'(X_B)_i + b_{pq}' l_i \tag{31}$$

이라고 두자. 그러면 식(21)범위 내에서는

$$\theta \leq \min_{\hat{b}_{iq}' > 0} \{(X_B)_i - l_i / \hat{b}_{iq}'\}$$

$$\geq \max_{\hat{b}_{iq}' < 0} \{(X_B)_i - l_i / \hat{b}_{iq}'\} \tag{32}$$

가 된다.

다음에는 식(28)의 오른쪽만 생각해 보자. 그러면

$$(X_B)_i - \frac{b_{iq}' \cdot \theta}{1+b_{pq}' \cdot \theta}(X_B)_q' \leq u_i$$

가 되어

$$-\frac{b_{iq}' \cdot (X_B)_q' \cdot \theta}{1+b_{pq}' \cdot \theta} \leq u_i - (X_B)_i$$

$$\{b_{pq}'(X_B)_i - b_{pq}' u_i - b_{iq}' \cdot (X_B)_q'\}\theta \leq u_i - (X_B)_i \tag{33}$$

이 된다. 지금

$$\check{b}_{iq}' = b_{pq}'(X_B)_i - b_{pq}' u_i - b_{iq}'(X_B)_q' \tag{34}$$

라고 두면

$$\theta \leq \min_{\check{b}_{iq}' > 0} \{u_i - (X_B)_i / \check{b}_{iq}'\} \tag{35}$$

$$\geq \max_{\check{b}_{iq}' < 0} \{u_i - (X_B)_i / \check{b}_{iq}'\}$$

가 된다. 또한 $l_q' \leq (X_B)_q' / 1 + \mathrm{b}_{pq}' \cdot \theta \leq u_q'$를 만족하여야 하므로,

$$\frac{(X_B)_q' - u_q'}{u_q' \cdot b_{pq}' > 0} \leq \theta \leq \frac{(X_B)_q' - u_q'}{u_q' \cdot b_{pq}' < 0} \tag{36}$$

$$\frac{(X_B)_q' - l_q'}{l_q' \cdot b_{pq}' < 0} \leq \theta \leq \frac{(X_B)_q' - l_q'}{l_q' \cdot b_{pq}' > 0} \tag{37}$$

를 만족하여야 한다. 그러므로

$$식(21) \cap 식(32) \cap 식(35) \cap 식(36) \cap 식(37) \tag{38}$$

의 범위 내에서는 原可能性이 유지된다.

종합하면 a_{pq}가 x_q가 基底변수일 때에는 변화범위는 식(26)의 범위와 식(38)이 서로 겹치는 부분이 된다.