韓國O R學會誌
第7卷 第1號
1982年 5月

—研究論文—

파라메트릭 非線形計劃問題의 解法 : 線形制約의 경우

(A Method for Solving Parametric Nonlinear Programming Problems with Linear Constraints)*

梁 容 準**

Abstract

A method is described for the solution of a linearly constrained program with parametric nonlinear objective function. The algorithm proposed in this paper may be regarded as an extension of the simplex method for parametric linear programming. Namely, it specifies the basis at each stage such that feasibility and optimality of the original problem are satisfied by the optimal solution of the reduced parametric problem involving only nonbasic variables. It is shown that under appropriate assumptions the algorithm is finite. Parametric procedures are also indicated for solving each reduced parametric problem by maintaining the Kuhn-Tucker conditions as the parameter value varies.

I. 序 論

파라메트릭 計劃法은 線形計劃法 또는 2次 計劃法의 分野에서 오랫동안 硏究되어왔다[11, 13]. 그러나 一般的인 非線形計劃問題에 대한 파라메트릭 計劃法은 Geoffrion[4]의 Strictly Concave Parametric Programming 의 몇개의 硏究結果가 있을 뿐이다.

이 論文은 파라메트릭 非線形目的 函數를 갖는 線形制約條件인 計劃問題를 풀기위한 algorithm을 提案한다. algorithm은 파라메트릭 線形計劃法에 대한 Simplex法의 擴張으로 간주할 수 있다. 特히 變數는 初期 Parameter에 대한 問題의 最適値에 관하여 基底變數와 非基底變數로 나눈다. 그러면 Parameter의 값이 변함에 따라 非基底變數만을 포함하는 縮小된 파라메트릭 問題에 대한 解를 얻는다. 이때 基底는 原問題에 대한 基底變數의 實行可能性이 任意의 parameter値에 대하여 유지되도록 變換되어야 한다. 縮小된 파라메트릭 問題는 parameter의 各各의 값에 대하여 原問題의 最適解를 준다.

algorithm의 妥當性을 保證하기 위하여 parameter의 값에 대한 原問題의 最適解의 極小的 一意性 및 연속성을 가정해 둔다. 이것은 파라메트릭 線形計劃法과는 對照的이다. 파라메트릭 線形計劃法에 있어서의 最適解는 最適基底가 변함에 따라 制約으로 된 多面體內에서 하나의 頂點에서 다른 頂點으로 뛰기 때문에 그러한 條件들은 一般的으로 만족하지 않는다.

이 論文에 있어서 縮小된 파라메트릭 問題에 관한 基本的 idea는 線形制約을 갖는 非線形計劃問題에 관한 硏究結果인 reduced gradient method[9, 14]에 그 動機가 된다.

이 論文은 다음과 같이 構成된다. 다음 節에서는 縮小된 파라메트릭問題를 定義하고 最適性條件을 얻는다. 3節에서는 解가 原問題의 解가 되도록 각 단계에서 縮小된 파라메트릭問題를 풀기 위한 algorithm을 記述한다. 또한 적당한 가정밑에서 algorithm은 有限回에 끝난다는 것을 說明한다. 4節에서는 縮小問題에 대하여

*本論文은 1981年度 문교부 학술연구조성비에 의하여 수행된 것임.
**仁荷大學校 理科大學 數學科

파라메트릭 計算過程을 記述한다.

Ⅱ. 縮小 파라메트릭 問題

scalar parameter t에 의존하고서 線形制約을 갖는 非線形計劃問題를 생각하여보자. 즉 parameter $t \in T$에 대하여

$$\text{最小化} \quad f(x,t) \qquad (1)$$
$$\text{制約條件} \quad Ax=b, \ x \geqq 0$$

이다. T는 R에 있어서 compact區間이고 f는 $R^n \times T \to R$인 固定된 어떤 t에 의존하는 x에 관하여 2回連續微分可能인 函數이다. 行列 A와 벡터 b는 各各 $m \times n (m<n)$과 $m \times 1$이다.

n次元벡터 x가 주어졌다고하자. x를 m 벡터 y와 $(n-m)$벡터 z, 즉 $x=(y,z)$로 分割한다. y를 基底, z를 非基底라 한다. 變數의 分割과 마찬가지로 行列 A도 $A=[B, C]$와 같이 分割한다. B는 $m \times n$行列이고 C는 $m \times (n-m)$이다. 여기서 式 (1)에 대하여 다음의 條件을 假定한다.

非縮退의 假定

式(1)의 實行可能解에 대하여 B가 正則이고 $y>0$인 分割 $x=(y,z)$가 存在한다.

分割 $x=(y,z)$에 對應하여 問題(1)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{最 小 化} \quad f(x,y,t) \qquad (2)$$
$$\text{制約條件} \quad By+Cz=b$$
$$y \geqq 0, \ z \geqq 0$$

基底變數는 다음과 같이 非基底變數의 式으로 나타낼 수 있다.

$$y=B^{-1}b-B^{-1}Cz$$

이와 같이 하여 原問題(1)은 非基底變數만을 포함하는 縮小된 파라메트릭 問題로 定義할 수 있다. 즉 $t \in T$에 대하여

$$\text{最 小 化} \quad F(z,t) \leqq f(B^{-1}b-B^{-1}Cz, z, t)$$
$$\text{制約條件} \quad z \geqq 0 \qquad (3)$$

이다. 물론 $F(z,t)$는 各 t에 대하여 2回連續微分可能이다. (3)式을 (2)式과 비교하여 보면 縮小된 問題 (3)은 原問題(1)에서 非陰의 制約 $y \geqq 0$가 (3)에서는 생략되어 있다.

이 節의 끝부분에 問題 (1)과 (3)의 關係를 硏究한다. 여기서 問題(1)의 局小的 最小値에 대한 **2次充分條件**을 생각하여 보자. 즉 任意의 $t \in T$에 대하여 $x(t)$가 式(4)를 滿足하고 式(5), (6), (7)을 滿足하는 $\lambda \in R^m$이 存在하면 $x(t)$는 式(1)의 局小的 最小이다.

$$Ax(t)=b, \ x(t) \geqq 0 \qquad (4)$$
$$\nabla f(x(t),t)-\lambda A \geqq 0 \qquad (5)$$
$$[\nabla f(x(t),t)-\lambda A]x(t)=0 \qquad (6)$$
$$S^T \nabla^2 f(x(t),t) S>0 \qquad (7)$$

式(7)에서 $S \neq 0$는 $AS=0$와 $S_i=0$, $i \in \{i : (\nabla f(x(t),t)-\lambda A)_i>0\}$를 滿足한다. 記號 ∇와 ∇^2은 各各 x에 관하여 1回 또는 2回微分可能임을 나타낸다. 위와같은 條件들은 [9, p. 235]의 2次充分條件定理를 應用하면 곧 얻어진다. 유사하게, $z(t) \in R^{n-m}$가 縮小問題(3)의 局小的 最小로되는 2次充分條件을 얻을 수 있다. $t \in T$에 대하여 $z(t)$는 다음의 式 (8), (9), (10), (11)를 滿足한다.

$$z(t) \geqq 0 \qquad (8)$$
$$\nabla F(z(t),t) \geqq 0 \qquad (9)$$
$$\nabla F(z(t),t)z(t)=0 \qquad (10)$$
$$V^T \nabla^2 F(z(t),t) V>0 \qquad (11)$$

式(11)에서 $(n-m)$벡터를 $V \neq 0$ $V_j=0, j \in J \leqq \{j : \nabla F(z(t),t)_j>0\}$를 滿足한다. ∇, ∇^2은 z에 관하여 1回 또는 2回의 微分을 뜻한다. 式(11)은 $\nabla^2 F(z(t),t)$의 部分行列 $\nabla_I^2 F(z(t),t)$가 正定値임을 보인다. $\nabla_I^2 F(z(t),t)$는 $z_i, i \in I \leqq \{1,2,\cdots n\}-J$에 관하여 2次偏導函數인 行列이다. 그것은

$$\nabla F(z,t)=\nabla_z f(y,z,t)-\nabla_y f(y,z,t)B^{-1}C \qquad (12)$$
$$\nabla^2 F(z,t)=\begin{bmatrix} -B^{-1}C \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{yy}^2 f & \nabla_{yz}^2 f \\ \nabla_{zy} f & \nabla_{zz}^2 f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B^{-1}C \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

이다. $y=B^{-1}b-B^{-1}Cz$이고 I_{n-m}은 $n-m$次의 單位行列이다.

다음의 定理는 任意의 $t \in T$에 대하여 (1)의 最適解의 存在는 縮小問題(3)의 最適解의 存在를 의미하며 (3)의 最適解는 (1)의 最適解와 同一함을 보인다.

[定理 1] $t \in T$에 대하여 $x(t)$가 問題(1)에 대한 2次充分條件式(4)—(7)을 滿足한다고하자. 그러면 $y(t)>0$이고 $z(t)$가 縮小問題(3)에 대한 2次 充分條件式 (8)-(11)을 滿足하는 分割 $x(t)=[y(t), z(t)]$가 存在한다.

[證明] 非縮退假定에 의해

$$y(t)>0 \qquad (14)$$
$$z(t) \geqq 0 \qquad (15)$$

인 分割 $x(t)=[y(t), z(t)]$가 存在한다. 이와같은 分割에 의하여 式 (5)는

$$\nabla_y f(y(t),z(t),t)-\lambda B \geqq 0 \qquad (16)$$
$$\nabla_z f(y(t),z(t),t)-\lambda c \geqq 0 \qquad (17)$$

이 된다. 더구나 式 (6)은

$$[\nabla_y f(y(t),z(t),t)-\lambda B]y(t)$$
$$+[\nabla_z f(y(t),z(t),t)-\lambda c] \ z(t)=0$$

와 같이 쓸 수 있고

$$[\nabla_y f(y(t),z(t),t)-\lambda B]y(t)=0 \qquad (18)$$

$$[\nabla_z f(y(t), z(t), t) - \lambda C] z(t) = 0 \qquad (19)$$

로 縮小할 수 있으므로 式 (19)의 왼편의 項은 式(14)-(17)에 의해 非陰이다. 式 (14)와 (18)로부터 부등식 (16)은

$$\nabla_y f(y(t), z(t), t) - \lambda B = 0$$

로 되므로

$$\lambda = \nabla_y f(y(t), z(t), t) B^{-1} \qquad (20)$$

이 된다. 式 (20)을 式(17)과 (19)에 代入하고 式(12)를 참작하여

$$\nabla F(z(t), t) \geqq 0$$

$$\nabla F(z(t), t) z(t) = 0$$

를 얻는다. 이것을 式 (15)와 合하여 式 (8)-(10)을 얻는다. 式 (11)이 滿足함을 보이기 위하여 우선 S를 U와 V로 分割하면 式 (7)은

$$[U^T \ V^T] \nabla^2 f(y(t), z(t), t) \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} > 0 \qquad (21)$$

$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \neq 0$는 $BU + CV = 0$와 $V_j = 0, j \in J = \{j : \nabla_z f(y(t), z(t), t) - \nabla_y f(y(t), z(t), t) B^{-1} C)_j > 0\}$를 滿足한다. 式 (20)을 利用하여 式(21)에서 $U = -B^{-1}CV$를 代入하면 U가 消去되고 式(12)와 (13)을 고려해보면 式(21)은 式(11)을 의미함을 알 수 있다.

다음 定理는 定理 1의 逆으로 縮小問題가 最適解를 갖는다면 原問題의 最適解는 그 副產物로 곧 얻어짐을 알 수 있다.

〔定理 2〕 任意의 $t \in T$에 대하여 $z(t)$가 縮小問題 (3)의 2次充分條件式 (8)-(11)과

$$B^{-1}b - B^{-1}Cz(t) \geqq 0 \qquad (22)$$

를 滿足한면 $x(t) = [y(t), \ z(t)]$는 原問題 (1)에 대하여 2次充分條件式 (4)-(7)을 滿足한다. $y(t)$는

$$y(t) = B^{-1}b - B^{-1}Cz(t)$$

에 의해 얻어진다.

〔證明〕 式 (8)과 (22)에 의해 實行可能條件 (4)는 分明히 滿足한다. $\lambda = \nabla_y f(y(t), \ z(t), t) B^{-1}$로 놓고 式 (12)를 고려하면 式 (5)와 (6)은 各各 (9)와 (10)으로부터 곧 나온다. 式 (13)에 의해 條件式 (7)은 式(11)로부터 $S = \begin{bmatrix} -B^{-1}CV \\ V \end{bmatrix}$로 놓으므로서 구해진다.

注. 이 節에 있어서의 모든 결과는 parameter에 의해 獨立的으로 滿足한다. 다음 節에서는 이들을 應用하기 위한 parameter形式에 관하여 언급한다.

Ⅲ. Algorithm

問題 (1)의 解를 얻기위하여 縮小問題 (3)을 푸는 algorithm을 求한다. 여기서 T는 單位區間 [0, 1]이라 하자.

algoritm

step 1 : $t=0$일때의 問題(1)의 最適解가 어떤 適當한 方法에 의해 求해진다. 充分히 작은 $\gamma \geqq 0$와 $t' = 0$로 놓는다.

step 2 : x를 基底 y와 非基底 z로 分割한다. $y(t')$의 各要素는 γ보다 커도록하고 對應하는 基底行列 B는 正則이 되도록한다. step 3으로 간다.

step 3 : 基底에 對應하여 t의 값을 t'부터 증가시키면서 式 (3)을 푼다. 따라서 $z(t)$와 $y(t) = B^{-1}b - B^{-1}Cz(t)$, $t \geqq t'$가 求해진다. $t^* = \sup\{t; y_i(\tau) > \gamma \ \forall_i, t' \leqq \tau \leqq t \leqq 1$인 $\tau\}$를 얻는다. $t^* = 1$이면 끝난다. 그렇지 않으면 $t' = t^*$로 놓고 step 2로 간다.

注. step 1에서 問題 (1)은 非線形計劃問題에 있어서 어떤 유용한 方法에 의하여 풀 수 있다. 그 중에서 reduced gradient方法 [9, 14]은 가장 有效한 方法으로 알려져 있다. 이 方法은 基底를 明確히 하여 問題(1)을 풀기 때문이다.

step 2에서 基底를 결정하기 위하여 그 節에서 非縮退假定은 不充分할런지 모르나 다음 條件에 의해 step 2는 γ보다 큰 값을 갖는 非縮退基底變數를 늘 찾을 수 있다. 여기서 γ는 充分히 작은 數를 말한다.

〔命題〕 非縮退假定이 다음의 强非縮假定이 되도록 $\gamma > 0$이 存在한다. 즉 (1)의 實行可能解 x에 대하여 B가 正則이고 모든 i에 대하여 $y_i > \gamma$인 分割 $x = (y, z)$가 存在한다.

〔證明〕 命題의 結論이 모순이라고 假定하자. 그러면 集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$의 分割 (I, J, K)가 存在하고

$$\begin{cases} Ax = b \\ x_i \geqq \delta, \ \ i \in I; 1/k \geqq x_i > 0, i \in J; x_i = 0 \end{cases}$$

$$i \in k \ \ (k = 1, 2, \cdots)$$

를 滿足하는 陽數 δ가 存在한다. 그리고 階數가 m인 列벡터 a_i, $i \in I \cup J$로 이루어진 行列이 存在한다. 한편 m보다 작은 階數의 列벡터 a_i, $i \in I$가 存在한다. a_i는 A의 i번째 列이다. J는 nonempty이다. 式(23)의 解를 x^k라 하면 x^k는

$$\sum_{i \in I} x_i^k a_i + \sum_{j \in J} x_j^k a_j = b$$

를 滿足한다.

$$||b - \sum_{i \in I} x_i^k a_i|| = ||\sum_{j \in J} x_j^k a_j|| \leqq \sum_{j \in J} x_j^k ||a_j||$$

$$\leqq \frac{1}{K} \sum_{j \in J} ||a_j||, K = 1, 2, \cdots \qquad (24)$$

集合 $M \leqq \{y \in R^m; y = b - \sum_{i \in I} x_i a_i, \ \ x_i \geqq \delta, \ \ i \in I\}$는 閉多面體凸集合이므로 M은 式 (24)에 의해 原點을 포함한다.

즉

$$\begin{cases} Ax^*=b \\ x_i^*\geqq\delta>0, \ \ i\in I; \ \ x_i^*=0, \ \ i\in J\cup K \end{cases}$$

를 滿足하는 點 x^*가 存在한다. 非縮退假定에 의해 a_i, $i\in I$에서 一次獨立인 m個의 벡터를 고를 수 있다. 이것은 모순이므로 證明은 끝난다.

다음 定理는 t에 관한 式 (1)의 最適解에 있어서 연속성의 假定 밑에서의 algorithm의 타당성 및 有限性을 保證한다.

〔定理 3〕 問題 (1)은 $t\in T$에 대하여 2次充分條件式 (4)-(7)을 滿足하는 解 $x(t)$를 갖는다고 하자. $x(t)$는 T에서 R^n위로의 連續函數라 하자. 命題에서 γ의 條件을 保證하도록 充分히 작은 γ를 얻을 수 있다면 algorithm은 有限回의 step에서 끝나고 解 $x(t)$를 얻는다.

〔證明〕 algorithm의 step 2와 3에서 定理의 마지막 部分은 定理 2와 3에서 얻을 수 있다. 따라서 algorithm의 有限性을 證明하기 위하여 algorithm의 step 3에서 基底가 變化할때 生成되는 모든點 t^*가 T에서 有限임을 밝히면 된다. $\{t_k\}$가 그러한 모든 點의 列이라하자. 그것이 有限이 아니라고 하자. 그러면 必要한 만큼 部分列을 取하여 $\{t_k\}$는 T에서 根限 $\bar{t}$로 수렴한다고 假定할 수 있다. $x(\bar{t})$를 假定하고서 一般性을 잃지 않고

$$x_1(\bar{t})\geqq x_2(\bar{t})\geqq\cdots\geqq x_m(\bar{t})\geqq\cdots\geqq x_n(\bar{t})$$

를 假定하자. γ의 假定에 의해 $m\leqq l\leqq n$ ($l=n$이면 不等式 $\gamma\geqq x_{l+1}(\bar{t})$는 모순)인 l에 대하여 $x_l(\bar{t})>\gamma\geqq x_{l+1}(\bar{t})$이다. 이와 같이 充分히 작은 $\delta>0$에 대하여 $x(t)$의 連續性으로부터

$$x_i(t)>\gamma+\delta, \ \ i=1,\cdots,l$$
$$x_i(t)<\gamma+\delta, \ \ i=l+1,\cdots,n$$
$$t\in T\cap(\bar{t}-\varepsilon, \ \ \bar{t}+\varepsilon)$$

를 滿足하는 ε이 存在한다. 따라서 基底變換은 이러한 區間에서 여러번 無限回로 일어난다는것은 不可能하다 이것은 $\bar{t}$의 定義에 모순이다. 그러므로 $\{t_k\}$는 有限이다.

定理 3에서는 極小的 唯一性과 式 (1)의 最適解의 連續性을 假定했다. 特히 $x(t)$의 連續性은 證明에서 重要한 役割을 했다. $x(t)$에 있어서의 이러한 連續假定은 目的函數와 制約條件에 있어서 적당한 條件으로 대치할 수 있다. 實際로 point-to-set map 理論 〔1〕에 근거를 두고서 놀랄만한 硏究가 目的函數 및 制約函數로 된 一般的 非線形計劃問題의 最小를 求하는데 連續條件을 추구하고 있다〔2, 3, 5, 6, 7〕. 그러나 이런 개념에 대하여 이 論文에서는 더 以上 추구하지 않는다.

끝으로 制御 parameter의 선택에 注意를 준다. 實際로는 命題에 있어서의 條件을 滿足하는 γ의 最適한 값을 잘 모른다. 實行에 있어서 이런 어려움을 극복하기 위해 algorithm에 있어서 基底를 고르는 方法을 수정한다. 特히 step 1에서는 추측에 의해서 시험적으로 γ를 取해도 좋다. 對應하는 基底行列이 正則이 되도록 몇단계에서 γ보다 큰 값을 갖는 m個의 變數를 얻는 것이 不可能하다면 γ는 예를들어 $\gamma/2$로 수정해도 좋다. 命題에 의해 이러한 變換은 t가 T內를 통과하는 동안 有限回必要하다.

Ⅳ. 縮小問題를 풀기 위한 파라메트릭 過程

이 節에서는 $t\in T$에 대하여 $x(t)$는 問題 (1)에 대하여 2次充分條件 (4)-(7)을 滿足한다고 假定한다. 또한 $x(t)$는 T에서 連續이다. 그러면 定理(1)과 (4)로부터 縮小問題(3)의 有限列을 풀어 (1)의 解를 求할 수 있다. 그 列의 各各은 式(8)-(11)을 滿足하는 極小的 最小를 갖는다. T는 部分區間 예를들면 $[t_0,t_1]$, $[t_1,t_2]$, $\cdots$, $[t_{m-1},t_m]$으로 構成될 수 있다. $T=[t_0,t_m]$이다. 各 $[t_{j-1},t_j]$에 대하여 縮小問題(3)과 原問題 (1)은 同等하며 t_j는 基底가 변할때 algorithm의 step 3에서 決定된다. 各 $[t_{j-1},t_j]$에 대하여 縮小問題(3)에 관한 方程式과 不等式 (8)-(10)의 파라메트릭 解를 구함으로서 式(3)을 풀 수 있다. 여기서 $x(t)$는 連續으로 (8)-(10)의 解 $z(t)$는 各部分區間에서 連續이다.

T'가 任意의 區間 $[t_{j-1},t_j]$, $j=1,2,\cdots,m$ 이라하자. T'에서 式 (8)-(10)을 풀기위해 Geoffrion 〔4〕의 基底파라메트릭過程을 應用하는 것이 좋다. 이것은 方程式

$$\begin{cases} \nabla_I F(z,t)=0 \\ z_j=0, \ \ j\in J \end{cases} \tag{25}$$

를 푸는 것이다. J는 valid set라고 부르는

$$\{i: \frac{\delta}{\delta z_i}F(z(t),t)>0\}\subset J\subset\{i; z_i(t)=0\}$$

인 $\{1,2,\cdots,n-m\}$의 部分集合이다. $\nabla_I F$는 $z_i, i\in I=\{1,\cdots,n-m\}-J$에 關한 F의 gradient(句配)이다. 다시 T'는 $[t^{(\nu)},t^{(\nu+1)}]$, $\nu=0,\cdots,N-1$인 部分區間의 有限個로 이루어졌다고 하자. index集合 $J^{(\nu)}$는 各 $[t^{(\nu)},t^{(\nu+1)}]$에서 valid이다. 開區間$(t^{(\nu)},t^{(\nu+1)})$에서

$$\{i: \frac{\delta}{\delta z_i}F(Z(t),t)>0\}=J=\{i: z_i(t)=0\}$$

를 滿足한다고 하자. $t\in[t^{(\nu)},t^{(\nu+1)}]$에 대하여 (8)-(10)을 풀고 $J=J^{(\nu)}$와 $I=I^{(\nu)}=\{1,\cdots,n-m\}-J^{(\nu)}$

에 의해 式(25) 를 푼다. 다음에는 區間$[t^{(\nu)}, t^{(\nu+1)}]$에서 式(25)의 파라메트릭 解를 얻기 위한 計算過程을 고찰한다. 記號表示를 간단히 하기위하여 區間은$[0, 1]$로 하고 위에 쓴 文字 (ν)는 省略한다.

Discretization Approach

이 approach는 discretization(分離)에 의한 近似의 方法이다. 즉 區間 $[0, 1]$은

$$0=\tau_0<\tau_1< \cdots, <\tau_p=1$$

로 分割하고 p個의 方程式

$$\begin{cases} \nabla_I F(z, \tau_k)=0, \quad k=0, \cdots, p \\ z_j=0 \end{cases} \tag{26}$$

을 뉴톤方法이나 유사한 方法 [12]에 의해 連續的으로 푼다. 물론 k번째에서의 解 $z(\tau_k)$는 $(k+1)$번째를 計算하는데 있어서의 初期值로 利用한다. 事實 τ_{k+1}가 τ_k에 充分히 가깝다면 $z(\tau_k)$는 $z(t)$의 連續性에 의해 $(k+1)$번째의 式의 解에 가장 가까운 近似值로 되고 反復法은 收斂할 것이다. 任意의 $t\in[0, 1]$에 대하여 $z(t)$는 補間法에 의하여 $z(\tau_k)$로부터 얻어진다. 여기서 式 (26)은 n-m-q의 미지수를 포함하고 있는데 주의를 요한다. q는 index set J의 要素이다.

Differential Equation Approach

$\nabla F(z, t)$가 z와 t에 대하여 連續的으로 微分可能이라고 하자. 行列 $\nabla_I^2 F(z(t), t)$는 모든 t에 대하여 正則이다. 따라서 $z(t)$는 式 (11)을 滿足한다. 이와같이 式(25)의 Jacobian行列$\begin{bmatrix} \nabla_I^2 F & \nabla_{IJ}^2 F \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$은 $t\in[0, 1]$에 대하여 $(z(t), t)$에서 正則이다. $\nabla_{IJ}^2 F$는 $z_j, j\in J$에 관하여 $\nabla_I F$의 Jacobian行列이다. I_q는 q次의 單位行列이다. 陰函數定理로부터 $z(t)$는 連續的으로 微分可能이고 方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dz_I}{dt}=-\nabla_I^2 F(z, \ t)^{-1}\dfrac{\delta}{\delta t}\nabla_I F(z, t) \\ z_j=0 \end{cases} \tag{27}$$

를 滿足한다. $z=(z_I, z_J)$는 I와 J에 對應한다. $z(0)$의 값을 예측할 수 있다면(바로 앞 step에서 求해짐) $z(t), t\in[0, 1]$는 初期值 $z(0)=z^\circ$를 가지고 微分方程式(27)의 解를 얻을 수 있다. 解는 Runge-kutta의 方法[8]과 같은 유용한 方法에 의해 微分方程式(27)을 數值的으로 積分하여 分析할 수 있다.

Ⅴ. 結　論

本 硏究에서는 線形인 制約條件을 갖는 파라메트릭 非線形計劃問題를 푸는 方法을 提案했다. 原問題를 풀기 보다는 縮小問題를 푸는 利點은 式 (4)-(6)에서 보다는 (8)-(10)을 푸는 것이 變數의 數가 작다는 데 있다. 實際 (8)-(10)은 변수 z가 $n-m$個인 반면에 (4)-(6)은 변수 x가 n個 및 m個의 Lagrange 乘數 λ가 포함되어 있다. 特히 (26)과 (27)에서는 z_I가 n-m-q個의 變數를 갖기 때문에 대단한 次元의 縮小이다. 非線形制約을 갖는 경우의 파라메트릭 非線形計劃問題에 관해서는 [10]에 硏究되었으며 또한 computer에 의한 효율좋은 計算結果가 얻어졌다.

참 고 문 헌

1. Berge, C., *Topological Spaces*, Oliver & Boyd, Edinburgh and London, 1963.
2. Dantzig, G.B. Folkman, J. and Shapiro, N., "On the Continuity of the Minimum Set of a Continuous Function," *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 17(1967), pp. 519-548.
3. Evans, J.P. and Gould, F. J. "Stability in Nonlinear Programming,"*Operations Research*, Vol, 18(1970), pp. 107-118.
4. Geoffrion, A.M. "Strictly Concave Parametric Programming, Part I: Basic Theory," *Management Science*, Vol. 13(1966), pp. 244-253: "Part Ⅱ: Additional Theory and Computational Considerations," *Management Science*, Vol. 13 (1967), pp. 359-370.
5. Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P.," Extensions of the Evans-Gould Stability Theorems for Mathematical Programs," *Operations Research*, Vol. 20(1972), pp. 143-153.
6. Hartfiel, D.J. and Curry, G. L., "Concerning the Solution Vector for Parametric Programming Problems, "*SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 26(1974), pp. 294-296.
7. Hogan, W.W., "Point to Set Maps in Mathematical Programming," *SIAM Review*, Vol. 15(1973), pp. 591-603.
8. Lambert, J. D., *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley, London, 1973.
9. Luenberger, D.G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Adieson Wesley, Reading, Mass., 1973.
10. Mine, H., Fukushima, M., and Ryang, Y. J.,

"Methods of Parametric Nonlinear Programming," *Int. J. Systems Sci.*, Vol. 12(1981), No. 1, pp. 95-110.

11. Orchard-Hays, W., *Advanced Linear-Programming Computing Techniques*, McGraw-Hill, New York, 1968.
12. Ortega, J.M. and Rheinboldt, W.C., *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
13. Van de Panne, C., *Methods for Linear and Quadratic Programming*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
14. Wolfe, P., *"Methods of Nonlinear Programming,"* in Graves, R.L. and Wolfe, P. (eds.), *Recent Advances in Mathematical Programming*, McGraw-Hill, New York, 1963, pp. 67-86.
15. Zangwill, W.I., "The Convex Simplex Method," *Management Science*, Vol. 14(1967), pp. 221-238.