

# 移動荷重과 軸荷重이 作用하는 柔軟한 基礎위에 支持된 無限보의 動特性

## Dynamic Characteristics of Flexibly Supported Infinite Beam Subjected to an Axial Force and a Moving Load.

洪 桐杓\* · 金 光 植\*\*  
(D. P. Hong · K. S. Kim)

### Abstract

This paper presents analytic solutions of deflection and their resonance diagrams for a uniform beam of infinite length subjected to a constant axial force and moving transverse load simultaneously.

Steady solutions are obtained by a time-independent coordinate moving with the load. The supporting foundation includes damping effects.

The influences of the axial force, the damping coefficient and the load velocity on the beam response are studied.

The limiting cases of no damping and critical damping are also investigated.

The profiles of the deflection of the beam are shown graphically for several values of the load speed, the axial force and damping parameters.

From the results, following conclusions have been reached.

1. The critical velocity  $\Theta_{cr}$  decreases as the axial compressive force increases, but increases as the axial tensile force increases.
2. At the critical velocity  $\Theta_{cr}$  the deflection have a tendency to decrease as the axial tensile force increases and to increase gradually as the axial compressive force increases.
3. In case of relatively small dampings, the deflection increases suddenly as the velocity of the moving load approaches the critical velocity, and it reaches its maximum at the critical velocity, and it decreases and become greatly affected by the axial force as the velocity increases further.
4. In case of relatively large dampings, as the velocity increases the deflection decreases gradually and it is affected little by the axial load.

### 1. 緒 論

移動荷重을 받는 構造物이 여러 産業分野에서 많이 利用되고 있다. 빠른 速度의 移動荷重을 받는 鐵路, 橋梁, 로켓試驗, 트랙 등에 利用되고 있는 보의 動特性에 관한 研究가 活潑하게 進行되고 있다.

最近 橋梁, 構造物의 築造過程에서 軸荷重을 받는 보의 利用度가 높아가고 있으며, 특히 鐵道車輛 등이 超高速化 되어감에 있어서 乘客의 乘車感을 向上시키는 同時에 鐵路의 마모를 減少시키기 위하여 鐵路끝을 熔接하였으며<sup>(1)</sup> 따라서 溫度가 올라가거나 내려가면 鐵路에 상당한 軸荷重을 加하게 되므로<sup>(2)</sup> 最近에는 軸荷重과

\* 正會員: 漢陽大學校 大學院 機械工學科

\*\* 正會員: 漢陽大學校 工科大學 機械工學科

移動荷重을 받는 形態의 보가 注目을 끌게 되었다.

Criner와 McCann<sup>(1)</sup>는 鐵路를 모델로 하여 減衰를 考慮한 彈性基礎위에 놓인 보에 一定速度의 移動荷重이 通過할 때 문제를 analog-computer를 利用하여 보의 처짐과 굽힘모멘트를 求하였다.

Kenney<sup>(2)</sup>는 彈性基礎위에 놓인 보에 一定速度의 移動荷重이 通過할 때의 定常應答의 解析의 解와 共振을 일으키는 危險速度를 求하였고 減衰가 있을 때 擴大係數를 求하였다.

Crandall<sup>(3)</sup>은 彈性基礎위에 놓인 Timoshenko 보에 移動荷重이 通過할 때의 定常解를 Fourier 積分으로 求하였다.

Florence<sup>(4)</sup>은 基礎가 없는 半無限길이의 Timoshenko보에 移動荷重이 通過할 때의 過渡解를 laplace 變換으로 求하였다.

Achenbach와 Sun<sup>(5)</sup>은 彈性基礎위에 놓인 Timoshenko 보에 移動荷重이 通過할 때의 定常解를 Fourier 變換으로 求하고, 基礎減衰를 考慮하여 減衰와 移動速度가 보의 應答에 미치는 影響을 研究하였다.

Steele<sup>(6)(7)</sup>은 彈性基礎가 없이 有限支持된 Bernoulli-Euler 보에 빠른 移動集中荷重이 作用할 때의 解를 Fourier 變換으로 求하였다. 또한 一定速度의 移動荷重이 半無限길이의 Timoshenko 보에 階段荷重(step-load)으로 作用한다고 假定하여 여러가지 荷重速度의 範圍에서 近似的으로 過渡解를 求하였다.

Sridharan과 Mallik<sup>(8)</sup>는 單純支持보에서 移動荷重이 通過할 때 처짐擴大係數를 有限要素法을 利用하여 求하였고, 有限要素法이 連續보와 斷面이 變化하는 보에도 有用하게 적용될 수 있음을 밝혔다.

Kerr<sup>(9)</sup>은 鐵路를 모델로 하여 減衰를 考慮하지 않고 Euler 보에 移動荷重이 通過할 때 軸荷重에 따른 처짐의 定常解를 求하였고, 軸荷重이 危險速度에 커다란 影響을 미친다는 것을 밝혔다.

Chonan<sup>(10)</sup>은 減衰를 考慮하지 않고 彈性的으로 支持된 Timoshenko 보에서의 定常解를 求하였고, 軸荷重과 移動速度가 보의 처짐에 미치는 影響에 관하여 論하였다.

이상과 같이 移動荷重을 받는 無限보에서 軸荷重을 考慮한 解析은 없었으나 最近 Kerr<sup>(9)</sup>과 Chonan<sup>(10)</sup>이 減衰를 無限한 式을 利用하여 軸荷重을 考慮한 解를 求하였다.

그 結果 軸壓縮力이 危險速度를 減少시킬 수 있다고 하였다.

이상의 研究는 軸荷重을 考慮하지 않은 無限보에서는 減衰를 考慮하였고, 軸荷重을 考慮한 無限보에서는 減衰를 考慮하지 않고 解를 求하였으나 本 研究에서는 軸荷重과 移動荷重을 받고 柔軟한 基礎위에 놓인 無限보의 처짐 嚴密解를 減衰를 考慮하여 求하고, IBM 370 電子計算機를 利用하여 軸荷重과 移動荷重速度 및 減衰가 보의 動特性에 미치는 影響을 研究하였다.

荷重에 따라 移動하는 座標系를 利用하여 定常解를 求하였다.

本 研究의 parameter는 無次元 軸荷重變數 $\alpha$ , 無次元移動速度 $\theta$ , 減衰比 $\zeta$ 로 하였다.

$\zeta \rightarrow 0$ 인 條件으로 求한 解는 純粹한 彈性基礎위에 놓인 보의 解<sup>(9)</sup>와 一致하였다.

臨界減衰係數를 求하였고 이 減衰係數는 無次元軸荷重變數 $\alpha$ 와 無次元移動速度 $\theta$ 의 函數가 됨을 알았다.

移動荷重과 軸荷重을 받는 보를 設計하는데 必要한 軸荷重變數, 無次元移動速度, 減衰比에 따른 無次元처짐 動擴大線圖를 詳細하게 나타내었다.

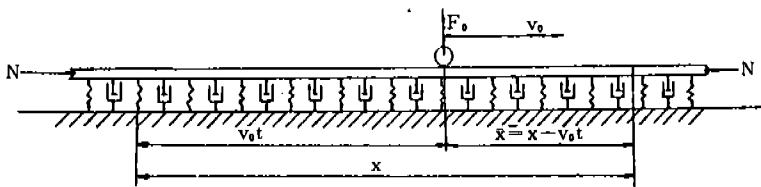


Fig. a

2. 理論解析

Fig. a에 無限보가 나타나 있다. x軸은 中心部를 따라서 놓여 있고 y軸은 x軸과 垂直으로 놓았다.

一定速度의 移動荷重을 받고 軸荷重이 作用하는 보에서 基礎의 減衰를 考慮한 微分方程式은 다음과 같다.

$$EI \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + kw = F_0 \delta(x - v_0 t) \dots\dots\dots(1)$$

여기서 EI는 보의 굽힘剛性係數, N은 軸荷重, m은 單位 길이當의 보의 質量, c는 基礎의 單位 길이當의 減衰係數, k는 基礎의 單位 길이當의 彈性係數이며 集重荷重으로 看做한 移動荷重 F<sub>0</sub>는 Dirac's delta function으로 表示되고 一定速度 v<sub>0</sub>로 보의 위를 移動한다.

보와 基礎는 均一한 材料로 되어있고, 無限히 길며 v<sub>0</sub>가 一定하다는 假定下에서 一定時間이 지나면 過渡解는 無視할 程度로 작게 되어서 보의 처짐은 定常狀態로 된다.

이러한 觀點에서 座標系를 移動座標系(x, y, z)로 變換하여 表示하면

$$\bar{x} = x - v_0 t, \bar{y} = y, \bar{z} = z \dots\dots\dots(2)$$

式(1)을 移動座標系(2)를 利用하여 表示하면

$$EI \frac{d^4 w}{d\bar{x}^4} + (N + m v_0^2) \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2} - c v_0 \frac{dw}{d\bar{x}} + kw = F_0 \delta(\bar{x}) \dots\dots\dots(3)$$

式(3)을 EI로 나누어 整理하면

$$\frac{d^4 w}{d\bar{x}^4} + 4 \lambda^2 (\theta^2 + \alpha) \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2} - 8 \theta \zeta \lambda^3 \frac{dw}{d\bar{x}} + 4 \lambda^4 w = \frac{F_0}{EI} \delta(\bar{x}) \dots\dots\dots(4)$$

여기서 變數는 다음과 같다.

$$\theta = \frac{v_0}{v_{cr1} \alpha - 0}, \zeta = \frac{c}{2 \sqrt{mk}}, \alpha = \frac{N}{N_{cr}}$$

$$v_{cr1} \alpha - 0 = 4 \sqrt{\frac{4kEI}{m^2}}, N_{cr} = 2 \sqrt{kEI}$$

$$\lambda = 4 \sqrt{\frac{k}{4EI}}$$

Dirac delta function 定義로 부터 式(4)는

$$\frac{d^4 w}{d\bar{x}^4} + 4 \lambda^2 (\theta^2 + \alpha) \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2} - 8 \theta \zeta \lambda^3 \frac{dw}{d\bar{x}} + 4 \lambda^4 w = 0, (\bar{x} \neq 0) \dots\dots\dots(5)$$

式(5)는  $\bar{x} < 0$  領域과  $\bar{x} > 0$  領域에서 各各 解를 갖는다.

$$w = w_1(\bar{x}), \bar{x} < 0$$

$$w = w_2(\bar{x}), \bar{x} > 0$$

無限大에서 처짐과 기울기가 有限하다는 條件으로 부터 4個의 積分常數가 남는다.

이 積分常數는 移動座標系의 原点에서 처짐, 기울기, 굽힘 모멘트의 變化量이 없다는 것과 剪斷力의 不連續값이 F<sub>0</sub>가 된다는 것으로 부터 求할 수 있다. 以上과 같은 境界條件을 式으로 表示하면

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} w(0 + \epsilon) - w(0 - \epsilon) &= 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{dw}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0+\epsilon} - \frac{dw}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0-\epsilon} &= 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2} \Big|_{\bar{x}=0+\epsilon} - \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2} \Big|_{\bar{x}=0-\epsilon} &= 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d^3 w}{d\bar{x}^3} \Big|_{\bar{x}=0+\epsilon} - \frac{d^3 w}{d\bar{x}^3} \Big|_{\bar{x}=0-\epsilon} &= \frac{F_0}{EI} \dots\dots(6) \end{aligned}$$

한편 輕減衰(under damping), 非減衰(undamping), 臨界減衰(critical damping), 過度減衰(over damping) 各 境界에 대하여 보의 처짐을 無次元 變數 x\*로 나타내면 다음과 같다.

2-1 輕減衰의 解

$x^* < 0, \zeta < \zeta_{cr}$

$$w^* = w/w_{st} = \frac{\eta \exp(\eta x^*)}{\left[ \eta^4 + (\theta^2 + \alpha) \eta^2 + \frac{1}{2} (\theta \zeta / \eta)^2 \right]} \times$$

$$\left[ \frac{-(\theta \zeta / \eta + \eta^2) \sin [2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 - 2\theta \zeta / \eta]^{\frac{1}{2}} x^*}{\eta [2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 - 2\theta \zeta / \eta]^{\frac{1}{2}}} \right.$$

$$\left. + \cos [2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 - 2\theta \zeta / \eta]^{\frac{1}{2}} x^* \right]$$

$x^* > 0, \zeta < \zeta_{cr}$

$$w^* = w/w_{st} = \frac{\eta \exp(-\eta x^*)}{\left[ \eta^4 + (\theta^2 + \alpha) \eta^2 + \frac{1}{2} (\theta \zeta / \eta)^2 \right]} \times$$

$$\left[ \frac{-(\theta \zeta / \eta - \eta^2) \sin [2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 + 2\theta \zeta / \eta]^{\frac{1}{2}} x^*}{\eta [2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 + 2\theta \zeta / \eta]^{\frac{1}{2}}} \right.$$

$$\left. + \cos [2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 + 2\theta \zeta / \eta]^{\frac{1}{2}} x^* \right]$$

.....(7)

여기서  $\eta$ 는 다음 方程式의 陽의 實根이다.

$$\eta^4 + 2(\theta^2 + \alpha) \eta^2 + [(\theta^2 + \alpha)^2 - 1] \eta^2 - \theta^2 \zeta^2 = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$w_{st} = F_0 \lambda / 2k, x^* = \lambda x$

$w_{st}$ 은 軸荷重을 받지 않는 無限彈性보에서 集重荷重  $F_0$ 에 依한 最大 처짐이다.

2-2 非減衰의 解

2-2-1 移動速度가 危險速度보다 작은 境遇

減衰가 없고 移動速度가 危險速度보다 작은 境遇 式(8)은  $\zeta = 0$ 으로 놓고  $\eta$ 에 關하여 풀어 陽의 實根을 求하면 (8a)가 된다.

$$\eta = (1 - \theta^2 - \alpha)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (8a)$$

式 (8a)을 式(7)에 代入 整理하면 (7a)가 된다.

$x^* < 0, \zeta = 0, \theta < (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}}$

$$w^* = \frac{\exp [1 - \theta^2 - \alpha]^{\frac{1}{2}} x^*}{(1 - \theta^2 - \alpha)^{\frac{1}{2}}} \times \left[ -\frac{(1 - \theta^2 - \alpha)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \theta^2 + \alpha)^{\frac{1}{2}}} \sin (1 + \theta^2 + \alpha)^{\frac{1}{2}} x^* + \cos (1 + \theta^2 + \alpha)^{\frac{1}{2}} x^* \right]$$

$x^* > 0, \zeta = 0, \theta < (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}}$

$$w^* = \frac{\exp [-(1 - \theta^2 - \alpha)^{\frac{1}{2}} x^*]}{(1 - \theta^2 - \alpha)^{\frac{1}{2}}} \times \left[ \frac{(1 - \theta^2 - \alpha)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \theta^2 + \alpha)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin (1 + \theta^2 + \alpha)^{\frac{1}{2}} x^* + \cos (1 + \theta^2 + \alpha)^{\frac{1}{2}} x^* \right] \dots\dots\dots (7a)$$

이 式으로 부터  $\theta \rightarrow (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}}$ 로 됨에 따라 처짐은 無限히 增加된다.

따라서 軸荷重을 받지 않는 보에 대한 軸荷重을 받는 보의 危險速度比  $\theta$ 는

$$\theta = \frac{v_{cr}}{v_{cr|N=0}} = (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}} = \left( 1 - \frac{N}{N_{cr}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

로 되어 Kerr<sup>(6)</sup>이 誘導한 結果와 같게 된다.

2-2-2 移動速度가 危險速度보다 큰 境遇

이 境遇에 減衰를 考慮하여 求한 解式(7)을 利用하고  $\eta$ 에 關한 方程式(8)을 利用하여  $\eta$ 를  $\zeta$ 에 關한 series 近似解를 求한 다음  $\zeta \rightarrow 0$ 으로 極限을 取함으로써 求한다.  $\eta$ 에 關한 series 解는

$$\eta = \frac{\theta \zeta}{[(\theta^2 + \alpha)^2 - 1]^{\frac{1}{2}}} \left[ 1 - \frac{\theta^2 (\theta^2 + \alpha) \zeta^2}{[(\theta^2 + \alpha)^2 - 1]^2} \dots\dots\dots \right] \dots\dots\dots (8b)$$

이 解에서  $\eta$ 를  $\zeta$ 에 關해서 線型인 部分만 取하여  $\zeta \rightarrow 0$ 으로 하고 wave number 를 구하면

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \lambda \left[ 2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 \pm 2\theta \zeta / \eta \right]^{\frac{1}{2}} = \lambda \left\{ [(\theta^2 + \alpha) + 1]^{\frac{1}{2}} \pm [(\theta^2 + \alpha) - 1]^{\frac{1}{2}} \right\} \dots\dots (9)$$

以上과 같은 結果들을 利用하여 式(7)에 代入하면

$$\begin{aligned}
 &x^* < 0, \zeta = 0, \theta > (1-\alpha)^{\frac{1}{2}} \\
 &w^* = \frac{-2 \cdot \sin\left[\left(\theta^2 + \alpha + 1\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\theta^2 + \alpha - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right] x^*}{\left[\left(\theta^2 + \alpha\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}} \left[\left(\theta^2 + \alpha + 1\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\theta^2 + \alpha - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right]} \\
 &x^* > 0, \zeta = 0, \theta > (1-\alpha)^{\frac{1}{2}} \\
 &w^* = \frac{-2 \cdot \sin\left[\left(\theta^2 + \alpha + 1\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\theta^2 + \alpha - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right] x^*}{\left[\left(\theta^2 + \alpha\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}} \left[\left(\theta^2 + \alpha + 1\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\theta^2 + \alpha - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right]} \dots\dots\dots (7b)
 \end{aligned}$$

2.3 臨界動減衰係數 (critical damping coefficient)

臨界動減衰係數는 式(7)의 解에서  $x^* < 0$  인 境遇에 波長이 無限히 커질 條件과 같다.

따라서

$$\lambda [2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 - 2\theta\zeta/\eta]^{\frac{1}{2}} = 0$$

이 式으로부터  $\theta\zeta = \frac{1}{2}\eta^2 [2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2] \dots\dots\dots (10)$

이 式을 式(8)에 代入하여  $\zeta_{cr}$ 을 求하면

$$\begin{aligned}
 &\zeta_{cr} \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ 2 \left[ \frac{(1 + \alpha/\theta^2) + \{(1 + \alpha/\theta^2)^2 + 3/\theta^4\}^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1 + \alpha/\theta^2)}{\left[ \frac{(1 + \alpha/\theta^2) + \{(1 + \alpha/\theta^2)^2 + 3/\theta^4\}^{\frac{1}{2}}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} \dots\dots\dots (11)
 \end{aligned}$$

臨界動減衰係數  $c_{cr}$ 은  $\zeta$ 의 定義로 부터 求하면

$$c_{cr} = 2(mk)^{\frac{1}{2}} \zeta_{cr} \dots\dots\dots (12)$$

2.4 過度減衰의 解

減衰比가 臨界減衰比보다 크면 過度減衰가 되며 이 境遇의 解를 求하면,

$$x^* < 0, \zeta > \zeta_{cr}$$

$$\begin{aligned}
 &w^* = w/w_{st} = \frac{\eta \exp(\eta x^*)}{\left[ \eta^4 + (\theta^2 + \alpha) \eta^2 + \frac{1}{2} (\theta\zeta/\eta)^2 \right]} \times \\
 &\left\{ \frac{-(\theta\zeta/\eta + \eta^2) \sinh[-2(\theta^2 + \alpha) - \eta^2 + 2\theta\zeta/\eta]^{\frac{1}{2}} x^*}{\eta[-2(\theta^2 + \alpha) - \eta^2 + 2\theta\zeta/\eta]^{\frac{1}{2}}} \right. \\
 &\quad \left. + \cosh[-2(\theta^2 + \alpha) - \eta^2 + 2\theta\zeta/\eta]^{\frac{1}{2}} x^* \right\} \\
 &x^* > 0 \quad \zeta > \zeta_{cr} \dots\dots\dots (7c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &w^* = w/w_{st} = \frac{\eta \cdot \exp(-\eta x^*)}{\left[ \eta^4 + (\theta^2 + \alpha) \eta^2 + \frac{1}{2} (\theta\zeta/\eta)^2 \right]} \times \\
 &\left\{ \frac{-(\theta\zeta/\eta - \eta^2) \cdot \sin[2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 + 2\theta\zeta/\eta]^{\frac{1}{2}} x^*}{\eta[2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 + 2\theta\zeta/\eta]^{\frac{1}{2}}} \right. \\
 &\quad \left. + \cos[2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 + 2\theta\zeta/\eta]^{\frac{1}{2}} x^* \right\}
 \end{aligned}$$

3. 數值解에 대한 結果 및 考察

減衰比  $\zeta$ , 軸荷重 變數  $\alpha$ , 移動速度 變數  $\theta$ 에 따른 無次元 처짐 結果가 Fig. 1에서 부터 Fig. 9에 無次元 變位  $x^*$ 의 函數로서 나타내었다.

減衰의 影響을 調査하기 爲하여  $\zeta \ll 0$ ,  $\zeta = 0.1$ ,  $\zeta = 1.1$ 인 境遇에 대하여 數值解析하였다.

또한 以上の 結果들을 總 綜合하여 Fig. 11에서부터 Fig. 18에  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$ 에 따른 最大 처짐에 대한 擴大係數線圖를 나타내었다.

3.1 變位 ( $x^*$ )에 의한 처짐

3.1.1.  $\zeta = 0$ 인 境遇

Fig. 1은 非減衰인 境遇 靜的인 狀態( $\theta = 0$ )에서  $\alpha$ 에 따른 처짐比를 나타내었다.

처짐은 移動荷重에 대하여 對稱으로 나타나며 最大 처짐은 移動荷重 바로 밑에서 나타난다.

軸壓縮力을 增加시키기에 따라 처짐은 크게 增加하며 軸引力을 增加시키기에 따라서는 反對效果가 나타난다.

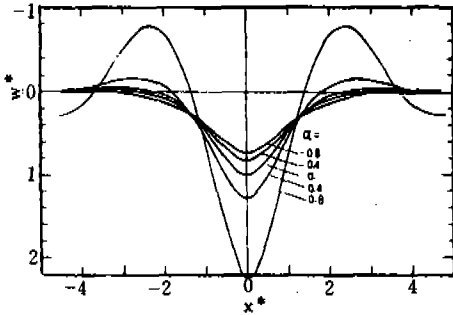


Fig. 1. Beam displacement,  $\theta = 0 \quad \zeta = 0$

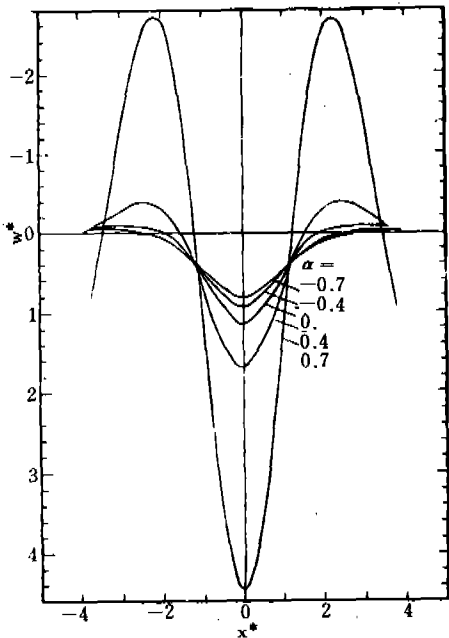


Fig. 2. Beam displacement,  $\theta = 0.5 \quad \zeta = 0$

Fig. 2는 非減衰인 境遇  $\theta = 0.5$ 에서 軸荷重變數  $\alpha$ 에 따른 無次元 처짐比를 보여준다.

처짐은 靜的인 狀態에서와 마찬가지로 移動荷重에 대하여 對稱으로 나타나며 最大처짐은 移動荷重 바로 밑에 나타난다. 軸壓縮力이 增加함에 따라 처짐은 크게 增加하며 軸引張力이 增加함에 따라서는 反對效果가 나타나고 全般的으로 靜的인 狀態보다 처짐은 增加하였다.

Fig. 3은 移動速度가 危險速度보다 큰 移動速度比 2.0의 처짐比를 보여준다.

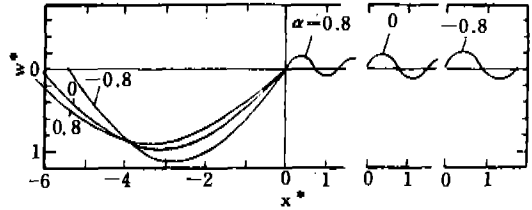


Fig. 3. Beam displacement,  $\theta = 2.0 \quad \zeta = 0$

처짐은 sine 函数로 나타나며 非對稱이다. 最大처짐의 位置는 移動荷重點보다 뒤에서 나타났다. 軸壓縮力이 增加함에 따라서 最大처짐은 荷重點 前後에서 減少되었으며, 軸引張力을 加하였을 때는 그 反對效果가 나타났다.

그러나 軸荷重의 影響은 微少하다.

### 3·1·2. $\zeta = 0.1$ 인 境遇

Fig. 4는 比較的 작은 減衰比 0.1, 移動速度比 0.5에서 變數  $\alpha$ 에 대한 처짐을 나타내었다.

처짐은 移動荷重에 대하여 擬對稱이며, 最大처짐點은 약간 後面으로 옮겨지고, 最大처짐을 非減衰인 境遇와 比較하면 微少하게 減少된다. 軸壓縮力이 增加함에 따라서 처짐은 크게 增加하며, 軸引張力이 增加하면 그 反對效果가 나타났다.

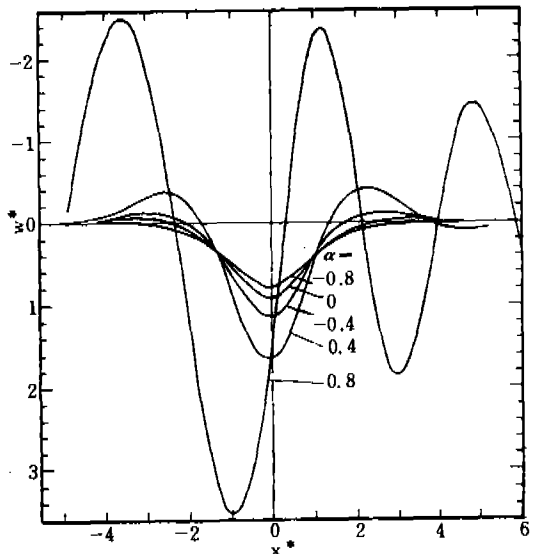


Fig. 4. Beam displacement,  $\theta = 0.5 \quad \zeta = 0.1$

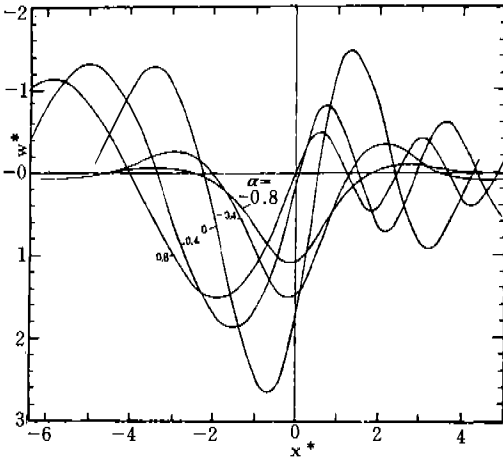


Fig. 5. Beam displacement,  $\theta = 1.0 \quad \zeta = 0.1$

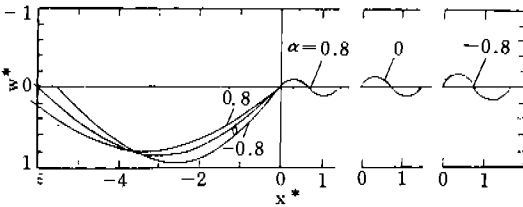


Fig. 6. Beam displacement,  $\theta = 2.0 \quad \zeta = 0.1$

Fig. 5는 減衰比 0.1, 移動速度比 1.0에서 變數  $\alpha$ 에 대한 처짐을 보여준다.

最大처짐은  $\alpha = 0$ 에서 나타나며, 軸壓縮力과 引張力에 의해서 最大처짐은 減少되었다.

Fig. 6은 減衰比 0.1, 移動速度比 2.0인 境遇의 처짐을 보여준다.

처짐의 傾向은 非減衰 境遇와 비슷하며, 最大 처짐은 非減衰 境遇보다 微少하게 된다.

3-1-3  $\zeta = 1.1$ 인 境遇

Fig. 7은 減衰比 1.1, 移動速度比 0.5에서 變數  $\alpha$ 에 대한 처짐을 보여준다.

처짐形態는 移動荷重에 대하여 非對稱이며, 軸壓縮力  $\alpha$ 가 增加할 수록 最大처짐은 增加하였다. 軸引張力을 받으면 反對效果가 나타난다.

Fig. 8은 減衰比 1.1, 移動速度 1.0에서 變數

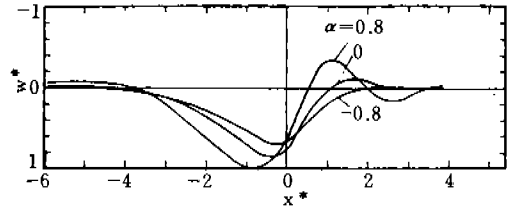


Fig. 7. Beam displacement,  $\theta = 0.5 \quad \zeta = 1.1$

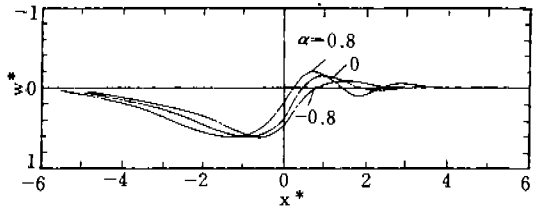


Fig. 8. Beam displacement,  $\theta = 1.0 \quad \zeta = 1.1$

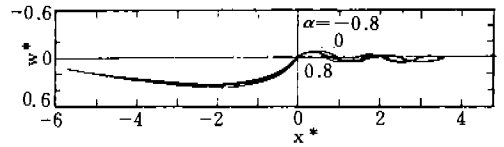


Fig. 9. Beam displacement,  $\theta = 2.0 \quad \zeta = 1.1$

$\alpha$ 에 대한 처짐을 보여준다.

最大처짐은 移動荷重 後面에서 軸壓縮力 또는 引張力을 받으면 減少되었고, 前面에서는 軸壓縮力을 增加하면 처짐이 增加하였고, 軸引張力을 減少하면 反對效果가 나타났으나 그 差異는 微少하였다.

Fig. 9는 減衰比 1.1, 移動速度比 2.0에서 軸荷重 變數  $\alpha$ 에 대한 처짐을 보여준다.

全体的으로 처짐은 減少되며 軸壓縮力 또는 引張力의 影響은 極히 微少하다.

3-2 臨界動減衰係數

Fig. 10은 式(11)을 利用하여 軸荷重係數  $\alpha$ 가 0.8, 0.4, 0, -0.4, -0.8인 境遇 移動速度變數  $\theta$ 에 대한 臨界減衰比  $\zeta_{cr}$ 를 보여준다.

$\zeta_{cr}$ 은  $\theta$ 가 0에 接近함에 따라  $\infty$ 가 되며,  $\theta$ 가 增加하면 急激히 減少되어 比較的 큰  $\theta$ 에

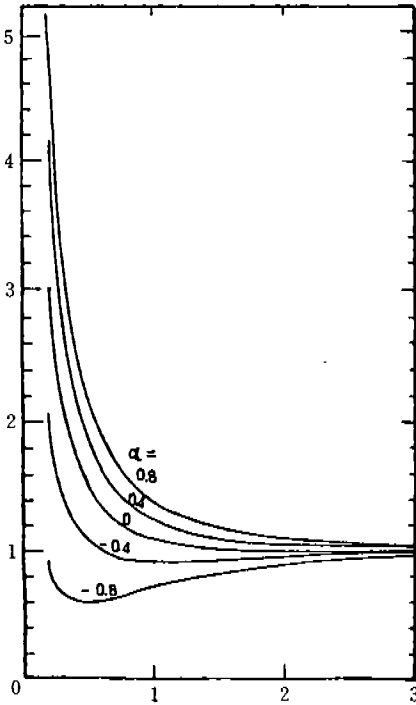


Fig. 10. Critical damping ratio versus velocity  $\theta$  for various axial force  $\alpha$ .

서도  $\alpha$ 에 關係없이 1로 接近한다. 그러므로 靜인 境遇 또는 작은  $\theta$ 에서  $\zeta_{cr}$ 이 增加하여 相當히 큰 減衰比에도 輕減衰 領域이 된다. 比較의 큰 速度比에서는 單純 스프링-質量系와 마찬가지로

$$\zeta_{cr} = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{m \cdot k}} = 1$$

로 接近하게 된다. 全移動速度比에서 軸壓縮力을 받으면 臨界動減衰係數는 增加하며, 軸引張力을 받으면 減少한다.

3-3 軸荷重變數에 의한 처짐 擴大係數

Fig. 11은 減衰比  $\zeta = 0.05$ , 移動速度比가 0, 0.4, 0.8, 1.0, 1.2, 1.6, 2.0인 境遇 變數  $\alpha$ 에 대한 最大처짐에 대한 擴大係數를 보여준다.

이 境遇 臨界軸荷重係數( $\alpha_{cr}$ )는  $\theta = 0, 0.4, 0.8, 1.0, 1.2$ 에 대하여 1.0, 0.84, 0.36, 0.00, -0.44로 나타나며,  $\theta$ 가 增加하면 軸壓縮力(+)에서 引張力(-)方向으로 轉位되고, 最大처짐은 漸次 減少되어간다.

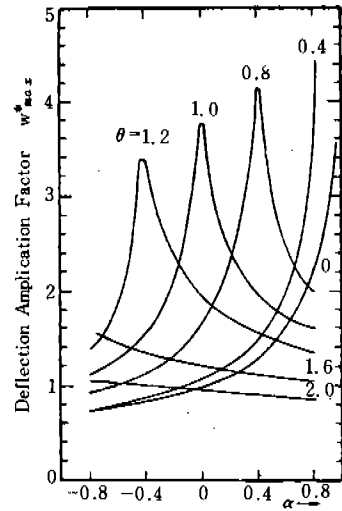


Fig. 11. Maximum deflection versus axial force for various velocity  $\theta$ ,  $\zeta = 0.05$

$\alpha$ 가  $\alpha_{cr}$ 에 接近함에 따라 처짐은 急激히 增加하고,  $\alpha_{cr}$ 에서 最大로 되며,  $\alpha_{cr}$ 를 지나면 急激히 減少한다.

그러므로 減衰比가 작을 때에는 軸荷重係數의 影響을 크게 받는 것을 알 수가 있다.

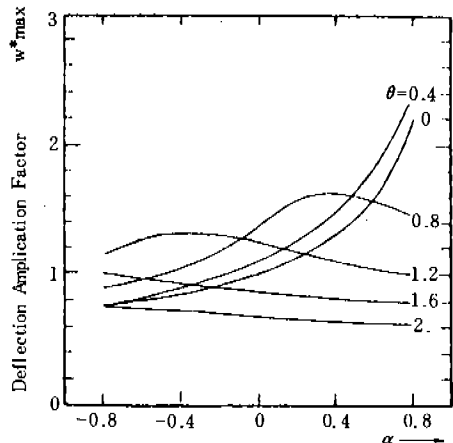


Fig. 12. Maximum deflection versus axial force for various velocity  $\theta$ ,  $\zeta = 0.3$

Fig. 12는 減衰比  $\zeta = 0.3$ , 移動速度比 0, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2에서 變數  $\alpha$ 에 대한 처짐 擴大係數를 보여준다.

$\zeta = 0.05$ 인 境遇에 比하면 急增減되는 部分이 緩慢하게 되어 軸荷重의 影響이 줄어진다.



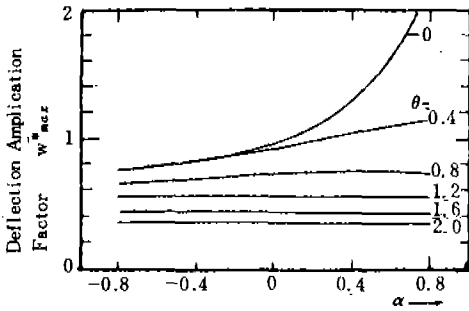


Fig. 13. Maximum deflection versus axial force for various velocity  $\theta$ ,  $\zeta = 1.1$

Fig. 13은 減衰比  $\zeta = 1.1$ , 移動速度比 0, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2에서 變數  $\alpha$ 에 대한 처짐擴大係數를 보여준다.

처짐擴大係數는 移動速度가 增加함에 따라 漸次 減少되며, 작은 移動速度에서는  $\alpha$ 가 增加하면 增加하는 傾向은 보이나  $\theta$ 가 增加함에 따라  $\alpha$ 의 影響은 極히 微小하다.

3-4 移動速度變數에 의한 처짐擴大係數

Fig. 14에서 18까지는 軸荷重係數  $\alpha$ 가 各各 0.8, 0.4, 0.0, -0.4, -0.8인 境遇에 대하여 減衰比  $\zeta = 0.05, 0.3, 1.1, 2.0$ 에서  $\theta$ 에 의한 처짐擴大係數를 보여 준다.

Table 1.

$\alpha$	0.8	0.4	0	-0.4	-0.8
$\theta_{cr}$	0.45	0.77	1.00	1.18	1.35
$w_{max}^*$	5.60	4.27	3.78	3.45	3.24

$\zeta$ 가 0.05인 境遇 危險速度比( $\theta_{cr}$ )는  $\alpha$ 의 函數이며, 各  $\alpha$ 에 대한  $\theta_{cr}$ 을 求하고,  $\theta_{cr}$  값에 대한 最大처짐擴大係數( $w_{max}^*$ )를 나타내면 Table 1과 같다.

危險速度는 軸壓縮力이 增加하면 漸次 減少되는 傾向으로 나타나고 反對로 軸引張力이 增加하면 增加한다.

最大처짐은 軸方向의 引張荷重이 增加하면 減少하는 傾向을 보이고, 壓縮荷重이 增加하면 漸次 增加한다.

또한 移動速度比가 危險速度比에 接近하면 처짐은 急激하게 增加되어 危險速度比에서 最大로 되며 危險速度比를 지나면 急激히 減少된다.

$\zeta = 0.3$ 인 境遇에는 全 軸荷重係數에서 移動

速度가  $\theta_{cr}$ 에 接近하기 直前에는 多少 增加하다가 急히 減少하는 傾向으로 나타난다.

$\zeta = 1.1, 2.0$ 인 境遇에는 全 軸荷重係數에서 移動速度가 增加하여도 처짐은 漸次 減少한다.

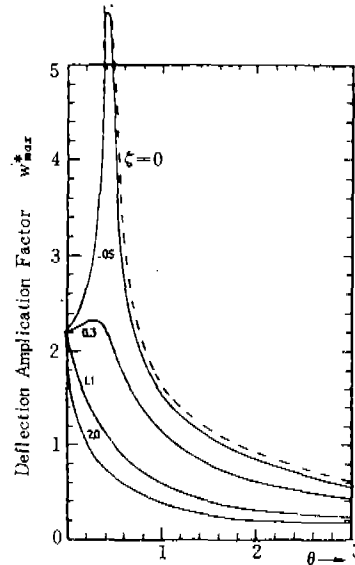


Fig. 14. Maximum deflection versus velocity  $\theta$  for various damping ratio  $\zeta$ ,  $\alpha = 0.8$

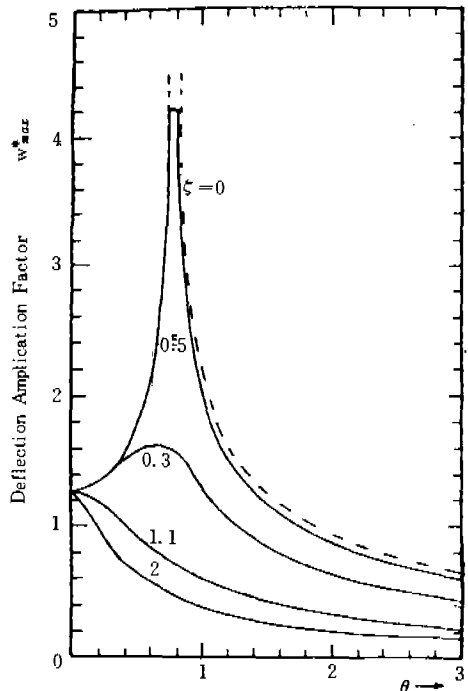


Fig. 15. Maximum deflection versus velocity  $\theta$  for various damping ratio  $\zeta$ ,  $\alpha = 0.4$

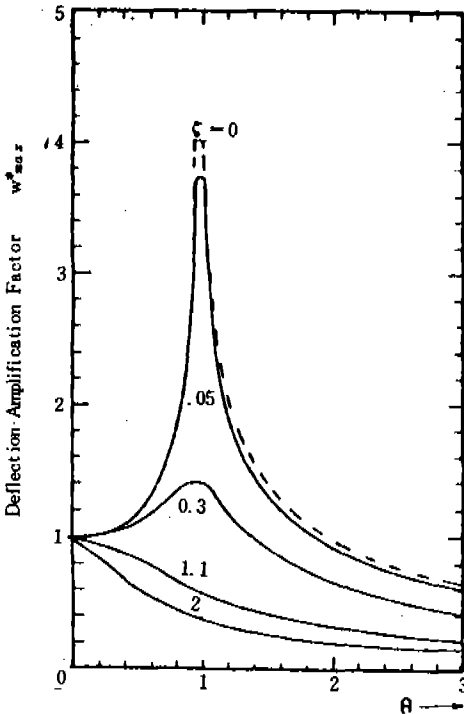


Fig. 16. Maximum deflection versus velocity  $\theta$  for various damping ratio  $\zeta$ ,  $\alpha=0$

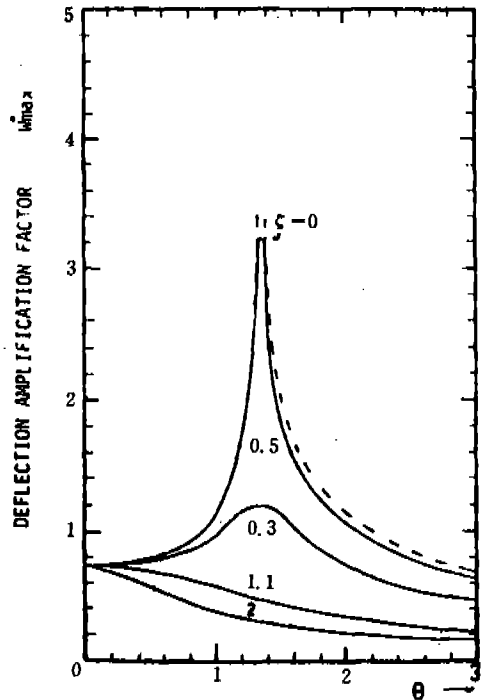


Fig. 18. Maximum deflection versus velocity  $\theta$  for various damping ratio  $\zeta$ ,  $\alpha=-0.8$

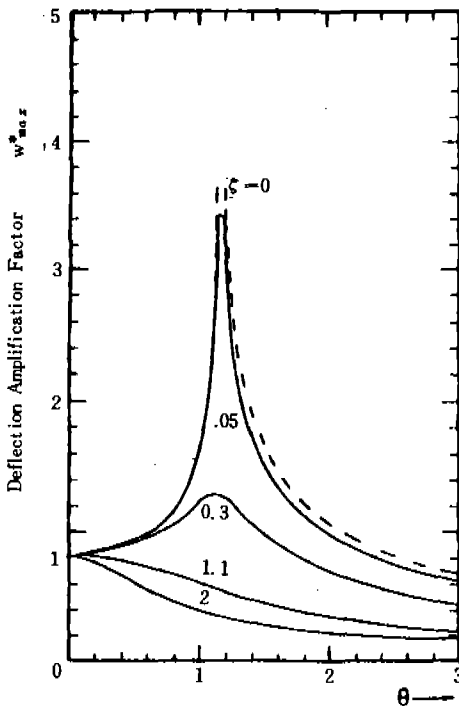


Fig. 17. Maximum deflection versus velocity  $\theta$  for various damping ratio  $\zeta$ ,  $\alpha=-0.4$ .

#### 4. 結論

數値解析에 의한 結果들을 檢討하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

- (1) 各各의 軸荷重係數 ( $\alpha$ ), 減衰比 ( $\zeta$ ), 移動速度比 ( $\theta$ )에 따른 처짐擴大線圖를 求하였다.
- (2) 危險速度 ( $\theta_{cr}$ )은 軸壓縮力이 增加하면 漸次 減少되는 傾向으로 나타나고, 反對로 軸引張力이 增加하면 增加한다.
- (3) 危險速度에서 처짐은 軸方向의 引張 荷重이 增加하면 減少하는 傾向을 보이고, 軸壓縮力이 增加하면 漸次 增加한다.
- (4) 比較的 작은 減衰에서 처짐은 移動速度가 危險速度에 接近하면 처짐은 急激하게 增加되어 危險速度에서 最大로 되며 危險速度을 지나면 急激히 減少하며 軸荷重의 影響을 크게 받는다.
- (5) 比較的 큰 減衰에서 처짐은 移動速度가 增加함에 따라 漸次 減少하며, 작은 移動速度에서는 軸壓縮力을 增加하면 처짐이 增加하지만

移動速度가 增加하면 처짐은 軸荷重의 影響을 微少하게 받는다.

Reference

1. H. E. Criner and G. D. McCann, "Rails on Elastic Foundation Under the Influence of High-Speed Traveling Loads", Journal of Applied Mechanics, TRANS. ASME, vol. 75, 1953.
2. J. T. Kenney, Jr., "Steady-State Vibrations of Beam on Elastic Foundation for Moving Load," Journal of Applied Mechanics, TRANS. ASME, Dec. 1954,
3. S. H. Crandall, "The Timoshenko Beam on an Elastic Foundation," Proceedings of the Third Midwestern Conference on Solid Mechanics, Ann Arbor, Mich., 1957.
4. A. L. Florence, "Traveling Force on a Timoshenko Beam," Journal of Applied Mechanics, TRANS. ASME, vol. 87, Series E, June 1965.
5. J. D. Achenbach and C. T. Sun, "Moving Load on a Flexibly Supported Timoshenko Beam", Int. J. of Solids and Structures, vol. 1, 1965.
6. C. R. Steele, "The Finite Beam with a Moving Load," Journal of Applied Mechanics," TRANS, ASME. vol. 89, Series E, March, 1967.
7. C. R. Steele, "The Timoshenko Beam with a Moving Load," Journal of Applied Mechanics," TRANS. ASME, vol. 90, Series E, Sept. 1968.
8. N. Sridharan and A. K. Mallik, "Numerical Analysis of Vibration of Beams Subjected to Moving Loads," Journal of Sound and Vibration, vol. 65. 1979.
9. A. D. Kerr, "The Continuously Supported Rail Subjected to an Axial Force and a Moving Load," Int. J. of Mechanical science, vol. 14, 1972.

10. S. Chonan, "The Elastically supported Timoshenko Beam Subjected to an Axial Force and Moving Load", Int. J. of Mechanical Science, vol. 17, 1975.
11. Collection of Papers, Technical Report, Holloman Air Force Base, New Mexico (April 1959).
12. E. L. CORNWELL, Modern Railways, Part I (January 1969): Part II (February 1969).
13. A. D. Kerr, "Elastic and Viscoelastic Foundation Models," Journal of Applied Mechanics, TRANS, ASME. vol. 31, Series E. 1964.
14. S. Timoshenko, D. H. Young and W. Weaver Jr. "Vibration Problems in Engineering," 4th Edition, pp. 363-502, 1974.
15. L. Meirovitch, "Analytical Methods in Vibration" 3rd Printing, pp. 126-166, 1971.
16. K. F. Graff, "Wave motion in Elastic Solids" Oxford University Press, pp. 140-211, 1975.

解의 誘導過程

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^2(\theta^2 + \alpha) \frac{d^2 w}{dx^2} - 8\theta\zeta\lambda^3 \frac{dw}{dx} + 4\lambda^4 w = 0 \dots\dots\dots(5)$$

式(5)의 解를  $w(x) = c \cdot e^{mx}$  라고 假定하면 補助方程式 (A1) 을 얻는다.

$$m^4 + 4\lambda^2(\theta^2 + \alpha)m^2 - 8\theta\zeta\lambda^3 m + 4\lambda^4 = 0 \dots\dots\dots(A1)$$

輕減衰(underdamping)인 境遇 解를 求하기 爲하여 다음과 같은 複素根을 假定한다. 단,  $a, b_1, b_2$  는 陽의 實數이다.

$$m_1 = a + ib_1, m_2 = a - ib_1, m_3 = -a + ib_2, m_4 = -a - ib_2 \dots\dots\dots(A2)$$

假定한 이 根은 다음 項等式을 滿足해야 한다.

$$(m - m_1)(m - m_2)(m - m_3)(m - m_4) = 0 \dots\dots\dots(A3)$$

式(A<sub>2</sub>)을 式(A3)에 代入 展開하면

$$m^4 + (-2a^2 + b_1^2 + b_2^2)m^2 - 2a(b_2^2 - b_1^2)m + (a^2 + b_1^2)(a^2 + b_2^2) = 0 \dots\dots\dots (A4)$$

式(A1)과 式(A4)의 係數를 같게하면 式(A5)가 된다.

$$\left. \begin{aligned} -2a^2 + b_1^2 + b_2^2 &= 4(\theta^2 + \alpha)\lambda^2 \\ -2a(b_2^2 - b_1^2) &= -8\theta\zeta\lambda^3 \\ (a^2 + b_1^2)(a^2 + b_2^2) &= 4\lambda^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A5)$$

式(A5)의 처음 두 式으로 부터

$$b_1^2 = a^2 + 2(\theta^2 + \alpha)\lambda^2 - \frac{2\theta\zeta\lambda^3}{a}$$

$$b_2^2 = a^2 + 2(\theta^2 + \alpha)\lambda^2 + \frac{2\theta\zeta\lambda^3}{a}$$

이 두 結果를 式(A5)의 세째 式에 代入 整理하면,

$$a^6 + 2(\theta^2 + \alpha)\lambda^2 a^4 + \{(\theta^2 + \alpha)^2 - 1\}\lambda^4 a^2 - \theta^2 \zeta^2 \lambda^6 = 0$$

a = λη를 위 式에 代入 整理하면

$$\eta^6 + 2(\theta^2 + \alpha)\eta^4 + \{(\theta^2 + \alpha)^2 - 1\}\eta^2 - \theta^2 \zeta^2 = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \lambda \left\{ 2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 - 2\theta\zeta/\eta \right\}^{\frac{1}{2}} \\ b_2 &= \lambda \left\{ 2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 + 2\theta\zeta/\eta \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A6)$$

여기서 η는 위 方程式의 陽의 實根이다. η에 관한 補助方程式의 陽의 實根은 式(A2)에서 假定했던 解의 形態를 갖도록 選擇된 것이다. 齊次微分方程式의 解를 實數 形態로 나타내면,

$$w(x) = e^{-a\bar{x}} \left\{ c_1 \sin b_2 \bar{x} + c_2 \cos b_2 \bar{x} \right\} + e^{a\bar{x}} \left\{ c_3 \sin b_1 \bar{x} + c_4 \cos b_1 \bar{x} \right\} \dots\dots\dots (A7)$$

처짐과 기울기는 無限大에서 영이 되므로 x < 0인 領域과 x > 0인 領域에서 各各 다음과 같은 解를 갖는다.

$$\left. \begin{aligned} w(x) &= e^{-a\bar{x}} (c_1 \sin b_2 \bar{x} + c_2 \cos b_2 \bar{x}), \quad \bar{x} > 0 \\ w(x) &= e^{a\bar{x}} (c_3 \sin b_1 \bar{x} + c_4 \cos b_1 \bar{x}), \quad \bar{x} < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A8)$$

決定되지 않은 積分常數를 決定하기 爲한 境界條件은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [w(0+\epsilon) - w(0-\epsilon)] &= 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{dw}{d\bar{x}}(0+\epsilon) - \frac{dw}{d\bar{x}}(0-\epsilon) \right\} &= 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(0+\epsilon) - \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2}(0-\epsilon) \right\} &= 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(0+\epsilon) - \frac{d^3 w}{d\bar{x}^3}(0-\epsilon) \right\} &= \frac{F_0}{EI} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

境界條件을 利用하여 求한 積分常數 값은 다음과 같다.

$$C_2 = C_4 = \frac{aF_0}{EI \left\{ a^2 \left[ 4a^2 + b_2^2 + 3b_1^2 \right] + \frac{1}{4}(b_2^2 - b_1^2)(4a^2 - b_1^2 + b_2^2) \right\}}$$

$$C_1 = \frac{(b_1^2 - b_2^2 + 4a^2)}{4ab_2} \cdot C_2 \dots\dots\dots (A9)$$

$$C_3 = \frac{(b_1^2 - b_2^2 - 4a^2)}{4ab_1} \cdot C_2$$

式(A6)을 式(A9)에 代入하여 整理하고 w(x)를 求하면,

$$\bar{x} < 0, \quad \zeta < \zeta_{cr}$$

$$w(\bar{x}) = \frac{F_0 \cdot \eta \cdot \exp(\eta \lambda \bar{x})}{2k \left\{ \eta^4 + (\theta^2 + \alpha)\eta^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\theta\zeta}{\eta} \right)^2 \right\}} \times$$

$$\left\{ \frac{-(\theta\zeta/\eta + \eta^2) \sin \left\{ 2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 - 2\theta\zeta/\eta \right\}^{\frac{1}{2}} \lambda \bar{x}}{\eta \left\{ 2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 - 2\theta\zeta/\eta \right\}^{\frac{1}{2}}} + \cos \left\{ 2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 - 2\theta\zeta/\eta \right\}^{\frac{1}{2}} \lambda \bar{x} \right\}$$

$$\bar{x} > 0, \quad \zeta < \zeta_{cr}$$

$$w(\bar{x}) = \frac{F_0 \eta \cdot \exp(-\eta \lambda \bar{x})}{2k \left\{ \eta^4 + (\theta^2 + \alpha)\eta^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\theta\zeta}{\eta} \right)^2 \right\}} \times$$

$$\left\{ \frac{-(\theta\zeta/\eta - \eta^2) \sin \{ 2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 + 2\theta\zeta/\eta \}^{\frac{1}{2}} \lambda \bar{x}}{\eta \{ 2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 + 2\theta\zeta/\eta \}^{\frac{1}{2}}} + \cos \{ 2(\theta^2 + \alpha) + \eta^2 + 2\theta\zeta/\eta \}^{\frac{1}{2}} \lambda \bar{x} \right\} \dots (A10)$$

여기서  $\eta$ 는 다음 方程式의 陽의 實根이다.

$$\eta^4 + 2(\theta^2 + \alpha)\eta^2 + \{(\theta^2 + \alpha)^2 - 1\}\eta^2 - \theta^2\zeta^2$$

$$= 0 \dots \dots \dots (8)$$

式 (A10)을 軸荷重을 받지않는 無限 彈性보에서 集中荷重  $F_0$ 에 의한 最大처짐  $w_{0z}$ 로 나누어 無次元化하여 無次元 變位  $x^*$ 로 나타내면式 (7)과 式(8)이 된다.

同一한 方法으로 過度減衰의 解를 求하면 式 (7c)가 된다.