레이져 도플러 현상을 이용한 진동주파수 측정에 관한 연구

A Study on the Measurement of Vibration Frequency using Laser Doppler Effect

*이재철 (Lee Jae Cheol)
**신철재 (Shin Chull Chai)
***박한규 (Park Han Kyu)

요 약

본 論文에서는 이차원스펙트럼 분석기를 구성하여 진동 파라미터들을 추정하고 기존 방법인 Power Spectrum 방법과 비교 검토하여 이차원스팩트럼이 gaussian noise 를 제거하기 때문에 유효함을 알 수 있었다.

ABSTRACT

In this paper, Bispectrum analyzer is made in order to estimate vibration parameters, and it is compared with the previous method, Power Spectrum. As the result, it has been known that Bispectrum is effective because of its gaussian noise elimination property.

I. 서 론

Laser Doppler 기술은 유체 속도및 진동을 민감하게 측정하기 위한 수단으로서 사용되어져 왔다. 진동하는 물체에 대해서 반사 혹은 산란된 레이져 비임은 주파수 변조가 일어나게 되는데 이러한 변조된 빛으로부터 진동의 진폭과 위상을 추정하는 것은 주로 다음 두가지 방법에 의하여 얻어진다. 첫째는 주파수 변조된 신호를 주파수 판별기(FM discriminator)를 사용하여 복조한 후 직접 물체의 진동에 해당하는 출력 신호를 얻는데 이때 진동의 진폭은 복조된 신호의 진폭으로부터 결정되어지고 위상은 복조된 신호와 기준 신호를 비교함으로써 측정할 수 있다. 둘째는 먼저 탐지된 신호의 스펙트럼을 분석하여 진동의 진폭은 스펙트럼에서 기본 주파수 성분과 고조파(harmonics)성분의 진폭을 비교함으로써 결정되어지고 위상은 탐지된 신호의 기본주파수 성분 또는 고조파와의 비례관계에 의하여 얻어질 수 있다. 그러나 실제 상황에서 레이져 광시스템 및 전기회로에서 생기는 잡음이 고려되어져야 하는데 이러한 잡음의 영향은 진동하는 물체로부터 산란된 빛이 약할 때 매우 심각해진다. 이때 잡음은 central limit theorem[1)]에 의하여 가우스 분포를 갖는 것으로 간주된다. 기존 방법들은 이러한 잡음에 대해서 매우 민감하기 때문에 진동의 정확한 진폭과 위상을 얻을 수 없지만 이차원스펙트럼 분석 방법을 사용했을 경우 위의 가우스 분포의 잡음을 완전 제거할 수 있다.

* 연세대학교 대학원 전자공학과 졸업
** 아주공과대학 전자공학과 교수겸 과장
*** 연세대학교 공과대학 전자공학과 교수(工博)

Ⅱ. 이 론

1. 레이저 도플러 속도측정기(LDV)

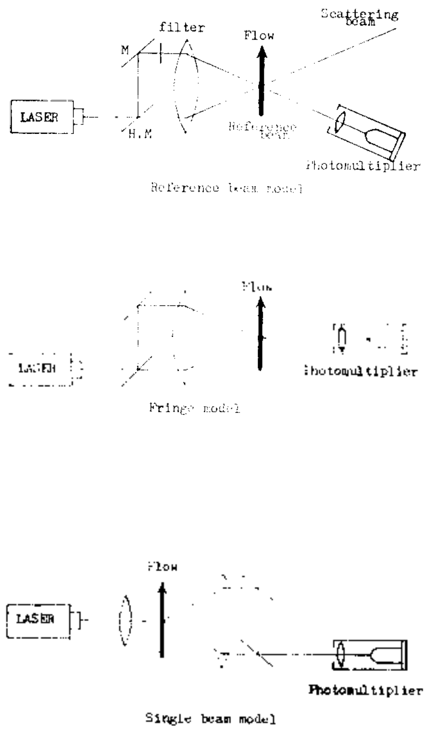


그림 1. 기본 LDV model.

LDV는 크게 기준비임모델, 간섭무늬모델, 단일비임모델의 3가지 형태로 구분할 수 있다.(그림 1)

ⓐ 기준비임모델(reference beam model)

이 모델에서 레이저는 두 비임으로 분리되어 관측점에서 집속되어 산란된 비임과 기준비임 사이에 간섭이 일어나게 된다. 따라서 유속은 맥놀이 주파수를 측정함으로써 얻어질 수 있다. 이러한 경우에 기준 비임의 강도는 도플러 변이된 빛을 최적화하기 위하여 사용된 여과기(filter)에 의하여 감소되어 진다.

입자 P가 유속 μ이고 굴절율이 n인 유체 안에서 움직이고 그림 2처럼 주파수 f인 레이져 비임이 그 위에 입사하고 있다. 입자가 움직이는 입자 P에 의해서 관측되는 주파수

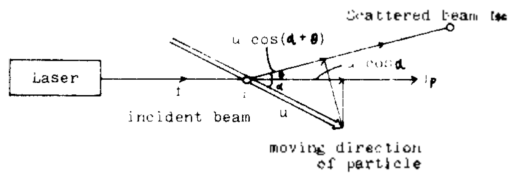


그림 2. 기준 비임 모델에서의 도플러 현상.

f_P는 다음과 같이 주어진다.

$$f_P = f \cdot \frac{C - \mu \cos\alpha}{C} \quad \cdots (1.1)$$

또한 입자 P가 관측자에 대해서 $(\alpha+\theta)$방향으로 속도 μ로 움직이고 있을 때 관측자에 의하여 관측되는 주파수 f_{SC}는 다음과 같이 주어진다.

$$f_{SC} = f_P \cdot \frac{C}{C - \mu \cos(\alpha+\theta)} \cdots (1.2)$$

식(1.1)을 식(1.2)에 대입해서 정리하면

$$f_{SC} = f - \frac{\mu}{\lambda}\cos\alpha + \frac{\mu}{\lambda}\cos(\alpha+\theta) \cdots (1.3)$$

이 된다.

만약 주파수 f를 가진 기준 비임이 주파수 f_{SC}를 가진 산란된 비임과 중첩되면 두 비임은 서로 간섭이 일어나고 그때 맥놀이 주파수는 $|f - f_{SC}|$로부터 구할 수 있다.

$$f_D = |f - f_{SC}| = f - \{f - \frac{\mu}{\lambda}\cos\alpha + \frac{\mu}{\lambda}\cos(\alpha+\theta)\} = \frac{\mu}{\lambda}\{\cos\alpha - \cos(\alpha+\theta)\}$$

$$= \frac{2\mu}{\lambda}\sin(\alpha+\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2}) \quad)$$

$(\alpha+\frac{\theta}{2}) = 90°$이면 도플러 변이된 신호의 주파수는

$$f_D = \frac{2\mu}{\lambda}\sin(\frac{\theta}{2}) \cdots\cdots\cdots\cdots (1.5)$$

유체속도는

$$\mu = \frac{f_D \cdot \lambda}{2\sin(\frac{\theta}{2})} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.6)$$

이 된다.

ⓑ 간섭무늬모델(fringe model)

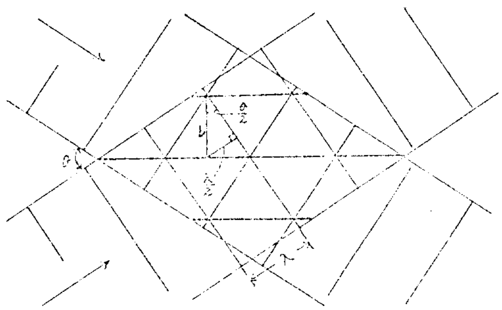


그림 3. 두 레이저 비임의 간섭현상.

그림 3에서 두 비임이 교차하는 경우 간섭무늬 사이의 간격 b와 비임의 교차각 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$b = \frac{\lambda}{2\sin(\frac{\theta}{2})} \cdots\cdots\cdots\cdots (1.7)$$

따라서 도플러 주파수 f_D와 유체 속도 μ는 다음과 같다.

$$f_D = \frac{\mu}{b} = \frac{2\mu}{\lambda} \sin(\frac{\theta}{2}) \cdots\cdots\cdots\cdots (1.8)$$

f_D는 측정 가능한 양이므로 식(1.8)에서 유체 속도는 다음과 같이 된다.

$$\mu = \frac{f_D \cdot \lambda}{2\sin(\frac{\theta}{2})}$$

λ : 빛의 파장

ⓒ 단일비임모델

2. 이차원스펙트럼

수학적으로 이차원스펙트럼 $B(\omega_1, \omega_2)$는 2차 상관함수 $C(Z_1, Z_2) = E[x(t)x(t+Z_2)x(t+Z_2)]$의 2차원 퓨리어 변화에 해당되며 E는 기대값을 의미한다. 이차원스펙트럼은 또한 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$B(\omega_1, \omega_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E[X(\omega_1) \cdot X(\omega_2) \cdot X(\omega_1 + \omega_2)] \cdots\cdots\cdots\cdots (2.1)$$

여기서 X(W)는 $x(t)$의 퓨리어 변환, T는 $x(t)$의 time duration, 그리고 *는 complex conjugate를 나타낸다.

식(2.1)은 다음과 같은 성질을 가지고있다.

a. $B(k, l) = B(l, k) = B^*(-k, -l)$ (2.2)

b. $B(k, l) = B(-k-l, l) = B(k, -k-l)$ ·········· (2.3)

c. $B(k, l) = B^*(-l, k+l) = B^*(-k, k+l)$ ········· (2.4)

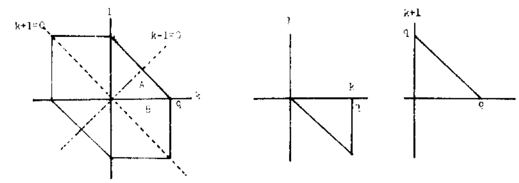


그림 4. a) 이차원 스펙트럼의 계산영역

b) 좌표변환

이차원스펙트럼은 위의 대칭성 때문에 전 2차원 주파수 평면에서 계산할 필요가 없다. 이차원스펙트럼 $B(k, l)$은 그림 4의 육각형 내에서 정의된다.

$$-q \le k, l \le q, \quad -q \le k + l \le q \cdots (2.5)$$

$$q = \frac{f_x}{\triangle f}, \quad \triangle f = \frac{f_S}{N}, \quad f_N = \frac{f_S}{2}, \quad \cdots\cdots (2.6)$$

$$f_S = \frac{1}{\triangle t}$$

$\triangle t$: 표본 간격

f_N : 나이퀴스트 주파수

$\triangle f$: elementary bandwidth

f_S : 표본 주파수(sampling frequency)

그림(4.a)에서 $B(k, l) = B(l, k) = B^*(-k, -l)$의 대칭 과계를 이용하면 육각형은 그림(4,a)의 A와B 두 영역으로 축소된다.

A : $0 \le l \le q/2$와 $l \le k \le q - l$ (2.7)

B : $-q \le l \le 0$와 $l \le k \le q$ (2.8)

그림(4.b)에서 $k \to -l$, $l \to k + l$로 변

수 치환하고 $B(k,l)=B^*(-l,k+l)=B^*(-k,k+l)$의 관계를 이용하면 육각형 내 임의의 점에서의 이차원스펙트럼 그림(4. a)의 A 지역에 대한 이차원스펙트럼만을 구하는 것으로써 가능하다.. 이때 표본 주파수 f_S가 $x(t)$에 포함되어 있는 가장 높은 주파수 성분보다 훨씬 더 크도록 표본간격 $\triangle t$를 충분히 작게하고 또한 주파수 분해 기능을 높이기 위해서 신호의 record length $T=N\triangle t$를 크게 한다. 이차원스펙트럼에 대한 기대값을 추정하기 위하여 산술평균 추정방법을 사용한다. 실제적으로 M번의 독립적인 실험의 산술평균에 대한 variance는 각 데이타군의 variance에 비하여 $\frac{1}{M}$만큼 감소된다. 윈도우는 비교적 작은 sidelobe를 갖는 Hanning Window를 사용한다.

3. 진동 파라미터 추정 알고리즘

그림 5의 LDV 실험장치에서 P.M.tube를 통과한 후의 신호 $I(t)$는 앞에서 언급한 간섭무늬모델을 이용해서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I(t)=\cos[d a \cos(\omega_o t+\alpha)+\mu]+n(t) \quad (3.1)$$

d=비임의 입사각 θ와 진동체의 경사각 γ에 관계되는 상수

γ=진동체의 매질과 관계되는 상수

$n(t)$는 Laser Optical system 및 전기system 등 여러 잡음원에 의하여 생긴 gaussian noise이다.

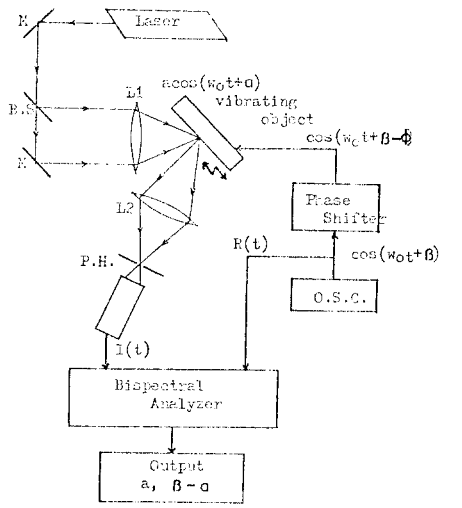


그림 5 . L 그림 5 . LDV 진동 수성 상시

$I(t)$에 대한 power spectrum $P(\omega)$와 이차원스펙트럼 $B(\omega_1,\omega_2)$를 구하면 각각 다음과 같다.

$$P(\omega)=\pi J_l^2(Z)\cos^2(\frac{\pi}{2}+\mu)\delta(\omega-l\omega_o)+\phi_n(j\omega)$$

$$=\pi J_l^2\cdot\cos^2\mu\delta(\omega-l\omega_o)$$

: l이 even일 경우

$$=\pi J_l^2\cdot\sin\mu\delta(\omega-l wo) \quad \cdots\cdots(3.2)$$

: l이 odd일 경우

여기서 $\phi_n(j\omega)$는 잡음 $n(t)$에 대한 power spectrum이다.

$$B(\omega_1,\omega_2)=\pi^2 J_l(Z)\,Jm(Z)\,J_n(Z)\,\delta(\omega_1-l\omega_o)\delta(\omega_2-m\omega_o)$$

$$\begin{cases} \cos^3\mu : l,\ m\text{이 모두 even일 경우} \cdots(3.3) \\ \sin^2\mu\cdot\cos\mu : l,m\text{이 모두 odd일 경우} \\ \sin^2\mu\cdot\cos\mu : l,m\text{이 각각 even이 혹은 odd일 경우} \end{cases}$$

여기서 $Z=da$, $n=l+m$

$I(t)$의 power spectrum에서 잡음 $n(t)$는 $\phi_n(j\omega)$의 유한한 값을 갖지만 이차원스펙트럼을 구할 경우 gaussian noise $n(t)$가 제거되는 것을 알 수 있다. 식(3.1)에 대한 이차원스펙트럼은 그림 6에 도시되어 있다. 이러한 경우 harmonics에서 sharp peak를 갖는다는 것을 알 수 있다. 식(3.3)에서 파라미터를 추정하기 위해서 다음의 비를 구한다.

$$B(l\omega_o,(l+m)\omega_o)/B(l\omega_o,m\omega_o)$$

$$=|J_{2l+m}(Z)/J_m(Z)|$$

$$=\gamma_{2l+m,m} \quad \cdots\cdots(3.4)$$

$$B(m\omega_o,(l+m)\omega_o)/B(l\omega_o,m\omega_o)$$

$$=|J_{l+2m}(Z)/J_l(Z)|$$

$$=\gamma_{l+2m,l} \quad \cdots\cdots(3.5)$$

위 식들은 Z에 대한 Bessel의 함수의 비로 나타난다. 따라서 이차원스펙트럼을 구하고

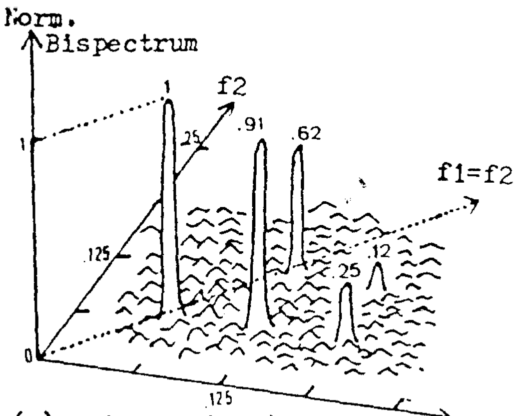
$(2l+m)$과 m 혹은 $(l+2m)$과 l에 대한 Bessel 함수의 비를 구함으로써 Z 값을 추정할 수 있다.

위상은 교차이차원스펙트럼을 구함으로써 가능하다. 신호 $I(t)$와 $R(t)=\cos(\omega_0 t+\beta)$ 사이에 교차이차원스펙트럼을 구하면,

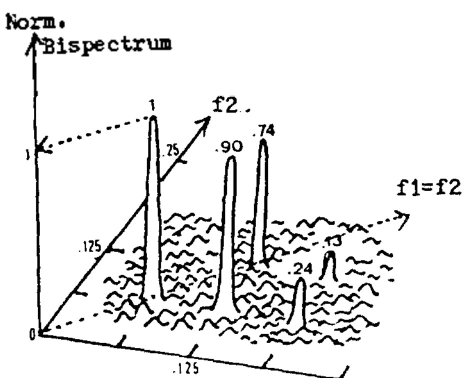
$$B_{IRI}(\omega_1,\omega_2)$$
$$=\pi^2\cdot(-1)^l\cdot \sin\mu\cdot\cos\mu\cdot J_l(Z)\cdot J_{l+1}(Z)\cdot\exp\{j(\beta-\alpha)\}\cdot\delta(\omega_1-l\omega_0)\cdot\delta(\omega_2-\omega_0)\quad\cdots\cdots(3.6)$$

이 되는데 식(3. 6)은 위상$(\beta-\alpha)$에 대한 정보를 포함하고 있으므로 위상의 추정이 가능하다.

Ⅲ. 결과고찰



(a) noise 가없는 경우



(b) noise 가 있는 경우

그림 6. 신호 $I(t)$에 대한 이차원 스펙트럼.

그림 6은 신호 $I(t)$에 대한 이차원스펙트럼을 나타낸다. 잡음이 없는 경우 (그림 6. a)와 잡음이 있는 경우(그림 6. b)를 비교하면 이차원스펙트럼이 gaussian noise에 대하여 유효하다는 것을 알 수 있다. 그림 6에서 기본 정규화 주파수는 0.0625이고 $f_2>f_1$인 경우의 이차원스펙트럼은 $f_2=f_1$을 중심으로 $f_2<f_1$와 대칭관계가 성립하므로 도시하지 않았다.

표 1은 진동의 진폭과 위상에 대한 simulation 결과이다. simulation은 진폭 $Z=3$, $\mu=0.759$ 위상은 $(\alpha=\frac{\pi}{3}$와 $\beta=\frac{\pi}{6})$, $(\alpha=\frac{\pi}{3}$와 $\beta=\frac{\pi}{4})$

		POWER SPEC.		BISPECTRUM	
Amplitude		without noise	with noise	without noise	with noise
Z	r31	3.00	2.78	3.00	2.993
	r51	3.00	3.12	3.00	3.042
PHASE		POWER SPECTRUM		BISPECTRUM	
I : pi / 3 R : pi / 6		-.523	-.154	-.523	-.531
I : pi / 4 R : pi / 6		-.261	-.465	-.261	-.253

표 1. 진동파라미터의 추정결과

의 두 경우에 대하여 행하고 또한 잡음이 없는 경우와 잡음이 있는 경우의 power spectrum과 이차원스펙트럼에 의하여 진동 파라미터를 추정한다. 진폭 Z를 추정하기 위해서 $I(t)$에 대한 이차원스펙트럼을 구한 후 r_{31}과 r_{51}을 동시에 만족하는 Z의 값을 추정키로 정했다.

Ⅳ. 결 론

표 1에서 비교한 것처럼 잡음이 많은 경우

에 있어서 power spectrum 방법은 정확한 Z값을 추정할 수 없는데 반해서 이차원스펙트럼 방법은 잡음이 없는 경우(Z = 3)와 거의 비슷한 Z값(즉 Z = 2.993, 3.042)을 추정할 수 있었고 위상도 이차원스펙트럼에 의하여 추정된 값은 실제값과 거의 일치함을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. S.S. Cramer, Mathematical Statistics (Wiley, New York, 1962).
2. H. A. Deferari, R. A. Darby, and F. A. Andrews, J. Acoust. Soc. Am. 42, 982 (1967).
3. D. R. Brillinger, Time Series Data Analysis and theory (Holden Day, Expanded Edition, 1980).
4. J. A. Cadzow, "High Perfornance Spectral Estimation – A New ARMA Method" IEEE Tr. Assp. 28, pp. 524-529, Oct., 1980.
5. Y. C. Kim and E. J. Powers, "Digital bispectral analysis of selfexcited fluctuation spectra", Physics Fluids 21(8), August, 1978.

(이논문은 1981년도 산학협동재단의 학술연구 조성비에 의하여 연구되었음.)