<論　文>

線型 4點 特性法에 의한 不定流의 解析

The Linearized Four-point Method of Characteristics for Unsteady Flow Computation

李　鍾　泰*
Jong-Tae Lee
李　元　煥**
Won-Hwan Lee

Abstract

A numerical computation of unsteady flow in the open channel was studied with the linearized four-point method of characteristics.

A seiche test for this model was fulfilled and its result was very close to the exact solution.

The effect of linearization to the accuracy of the result was small enough for the analysis of nearly horizontal flow, and this model would be applicable for the real unsteady flow problem because of its convenience.

<要　旨>

本 硏究는 水面變化의 傳播特性을 利用한 4點法(four-point method of characteristics)의 線型化理論을 開水路의 不定流解析에 適用하는 問題와 關聯하여, 直四角形 灣入에서 本 解析模型에 對한 1次元 靜振動 數値檢定實驗을 實施하였고, 2次元 不定流의 解析에 있어서 安定性(stability)問題에 對하여 檢討하였다.

本 解析模型은 水位變化가 水深에 比해 充分히 작은 흐름의 境遇에 效果的으로 簡便하게 사용할 수 있음을 알 수 있었다.

1. 序　論

特性法은 數値解析 水理學에 매우 有用하다. 그러나 이 理論을 實際로 適用함에 있어서는 그 計算結果를 一定 格點網과 時間間隙으로 表現할 때 많은 어려움이 따르게 된다. 그 例로서 3點 特性法(three-point method of characteristics)의 境遇에 많은 補間計算을 하게되고 이로 因하여 計算結果値의 精度가 補間計算過程에 左右되게 된다. 따라서 精度를 改善하기 위해서는 보다 精密한 補間式의 導入이 要請되므로 그 結果 프로그램은 매우 複雜해지고 計算所要時間도 增大된다(Fox, 1962). 以上의 어려움을 극복하기 위하여 補間計算의 努力이 없는 線型化된 4點 特性法이 Abbott(1970)에 의해 開發되었다. 本 論文에서는 自由水面을 갖는 거의 水平으로 흐르는 흐름에 線型 4點 特性法을 適用함에 있어서 問題되는 境界條件의 處理와 模型의 精度, 線型化의 影響等에 關하여 數値實驗을 通하여 檢討하였고, 2次元흐름에 適用하는 問題를 다루었다.

2. 理論式과 解析方法

2・1 線型 4點 特性法

4點 特性法은 Hansen(1965)에 의해 塑性理論에 適用한 것이 처음이며 Abbott(1966)에 의해 流體의 흐름에 應用되기 始作했다. Fig. 1에서 두개의 特性線 C_+와 C_-로 싸여진 (x, t)空間에서의 4點으로 構成된 要素(element)에서 Riemann invariant는 다음과 같다.

$$u_1+2c_1=u_2+2c_2 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$u_3+2c_3=u_4+2c_4 \quad \cdots\cdots (2)$$

$$u_1-2c_1=u_4-2c_4 \quad \cdots\cdots (3)$$

* 釜山水産大學 海洋工學科 助敎授
** 延世大學校 土木工學科 敎授

$$u_3-2c_3=u_2-2c_2 \quad \cdots\cdots(4)$$

여기서 u_j는 j點에서의 流速이고 $c_j=(gh_j)^{1/2}$이다. 또한 h_j는 j點에서의 水深이다. 만약 j가 4를 法으로 한 自然數의 集合의 한 元素일 때 Riemann關係式은 式(5)로 表現된다.

$$(u_j-u_{j+1})=(-1)^j 2(c_j-c_{j+1}) \quad \cdots\cdots(5)$$

式(5)로부터,

$$\sum_j(-1)^j u_j=0 \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\sum_j(-1)^j c_j=0 \quad \cdots\cdots(7)$$

따라서

$$(X_{(-)}{}^k)_j \overset{\text{def}}{=} u_j+(-1)^k c_j \quad \cdots\cdots(8)$$

$$(J_{(-)}{}^k)_j \overset{\text{def}}{=} u_j+(-1)^k 2c_j \quad \cdots\cdots(9)$$

일 때 式(10), (11)이 된다.

$$\sum_j(-1)^j(X_{(-)}{}^k)_j=0, \quad k=1,2 \quad \cdots\cdots(10)$$

$$\sum_j(-1)^j(J_{(-)}{}^k)_j=0, \quad k=1,2 \quad \cdots\cdots(11)$$

여기서, $X_{(\pm)},{}_j(=u_j+c_j)$는 特性方向, $J_{(\pm)},{}_j(=u_j\pm 2c_j)$는 Riemann invariant이다. 이러한 關係들로부터 特性線들로 이루어지는 網이 形成되며 各 交點에서의 u와 h를 구할 수 있다. 그러나 實際의 프로그래밍에 있어서 各 交點의 結果들을 秩序있게 표현하기 위해서는 그 過程이 複雜해진다. 따라서 實用的인 觀點에서 볼 때 特性法을 線型化함으로써 더욱 活用性을 높일 수가 있다. 即 平均水深을 h_0, 水深의 變化値를 h'로 하였을 때 Riemann invariant는 또 다른 常數 K로서 代置된다.

$$u+2\sqrt{g(h_0+h')}=J_+ \quad \cdots\cdots(9a)$$

$h'\ll h_0$일 때 二項定理에 의해,

$$u+\sqrt{\frac{g}{h_0}}h'=J_+-2\sqrt{gh_0}=K_+(\text{Constant}) \cdots(9b)$$

또한 흐름 全體에 있어서 $h'\ll h_0$이면 流速의 變化는 相對的으로 매우 적어지므로 $u\ll\sqrt{gh_0}$로 간주할 수가 있다. 이 경우의 特性方向은,

$$X_\pm=\pm\sqrt{gh_0} \quad \cdots\cdots(8a)$$

로 代置될 수 있는 바 이로써 特性網은 一定한 配列로 表現이 可能하게 된다(Abbott, 1975). 即 特性方向이 x와 t에 關해서 一定하므로 各 格點의 間隔은 一定해지고 電算處理가 매우 便하게 되었다. 式(6), (7)로부터

$$u_1+u_3-u_2-u_4=0 \quad \cdots\cdots(12)$$

$$2(c_1+c_3-c_2-c_4)=0 \quad \cdots\cdots(13)$$

式(13)은 다시 $c_j=(g(h_0+h'_j))^{1/2}$의 關係를 利用하면 式(14)가 된다.

$$h'_1+h'_3-h'_2-h'_4=0 \quad \cdots\cdots(14)$$

式(12), (14)를 Fig. 2의 格子網에 適用하면 式(12a), (14a)로 表現된다.

$$u_j{}^{n+1}+u_j{}^{n-1}-u^n{}_{j+1}-u^n{}_{j-1}=0 \quad \cdots\cdots(12a)$$

$$h_j{}^{n+1}+h_j{}^{n-1}-h^n{}_{j+1}-h^n{}_{j-1}=0 \quad \cdots\cdots(14a)$$

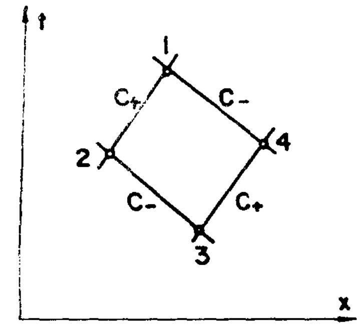

Fig. 1. Addressing Sequence for the four-point method of Characteristics

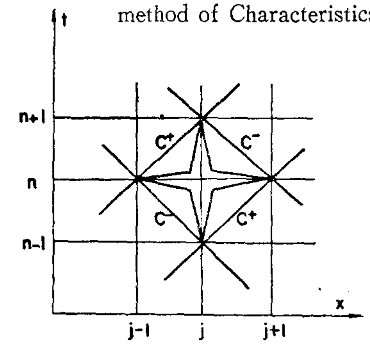

Fig. 2. The linearized four-point operator

2.2 境界條件

式(12a), (14a)를 基本 演算子로하여 計算을 遂行하기 위해서는 水深의 경우, 初期條件으로서 $h(x,0)$와 $h(x,\Delta t)$의 값이 必要하게 되는 바 $h(x,\Delta t)$가 未知일 경우에는 $h(x,0)$의 값을 利用한 3點法에 의해 그 값을 구한 후 비로서 4點法을 사용하게 된다. 또한 每時間의 各 스텝마다 左右의 境界值 $h(0,t)$, $h(l,t)$가 공급되어야 한다. 거의 水平으로 흐르는 自由水面을 가진 常流(Sub-Critical flow)일 境遇 境界에서의 演算子의 活用은 다음과 같다. 먼저 開放端(open end)에서는 水深이 一定하다고 보아

$$h_1{}^{n+1}=h_0 \quad \cdots\cdots(15)$$

$$u_1{}^{n+1}=2u_2{}^n-u_1{}^{n-1} \quad \cdots\cdots(16)$$

또한 閉塞端(closed end)에서는 式(17), (18)이 된다 왜냐하면, 反射의 性格이 開放端에서는 u가, 閉塞端에서는 h가 各各 偶函數(even function)로 나타나며, 閉塞端에서는 h가, 開放端에서는 u가 各各 奇函數(odd function)이기 때문이다. 即

$$h_{jj}{}^{n+1}=2h^n{}_{jj-1}-h^{n-1}{}_{jj} \quad \cdots\cdots(17)$$

$$u^{n+1}{}_{jj}=0 \quad \cdots\cdots(18)$$

여기서 jj는 右側端의 格點番號이다.

2.3. 2次元 흐름에의 應用

摩擦抵抗, Coriolis加速度等의 項을 無視한 理想流體의 2次元흐름에 線型 4點 特性法을 適用하는 問題를 檢討하여 보면 다음과 같다.

$x-y$平面에서의 흐름을 各各 x, y方向으로 分離하여 表現하면 式(14a)로부터 式(14b), (14c)가 된다.

$$h^{n+1}{}_{j,k}|_x+h^{n-1}{}_{j,k}|_x-h^n{}_{j+1,k}-h^n{}_{j+1,k}=0 \cdots(14b)$$

$$h^{n+1}{}_{j,k}|_y+h^{n-1}{}_{j,k}|_y-h^n{}_{j,k+1}-h^n{}_{j,k-1}=0 \cdots (14c)$$

또한 Δt時間에 格點($j\Delta y, k\Delta y$)에서의 h의 變化値를 x, y 各方向에서의 影響을 합친 것으로 하면 式(19)와같이 表現된다.

$$(h^{n\pm1}{}_{j,k}-h^n{}_{j,k})=(h^{n\pm1}{}_{j,k}|_x-h^n{}_{j,k}) + (h^{n\pm1}{}_{j,y}|_y-h^n{}_{j,k}) \cdots\cdots(19)$$

式(14b)와 式(14c)를 더하고 式(19)을 適用하면 2次元 흐름에 대한 線型 4點 特性法의 演算子가 만들어진다(式(20), Fig. 3).

$$h^{n+1}{}_{j,k}=h^n{}_{j+1,k}+h^n{}_{j-1,k}+h^n{}_{j,k+1} +h^n{}_{j,k-1}-2h^n{}_{j,k}-h^{n-1}{}_{j,k} \cdots\cdots(20)$$

式(20)의 結果를 檢討하기 위하여 式(21)의 2次元흐름의 波動方程式을 中央差分式(Abbott, 1977)으로 나타내면 式(22)가 된다.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)=0 \cdots\cdots(21)$$

$$\frac{(h^{n+1}-2h^n+h^{n-1})_{j,k}}{(\Delta t)^2} -c^2\left[\frac{(h_{j+1}-2h_j+h_{j-1})^n{}_k}{(\Delta x)^2}+\frac{(h_{k+1}-2h_k+h_{k-1})^n{}_j}{(\Delta y)^2}\right] =0 \cdots\cdots(22)$$

$\Delta x=\Delta y=\Delta s$일 때 式(22)는 式(23)이 된다.

$$h^{n+1}{}_{j,k}=\frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta s)^2}(h_{j+1,k}+h_{j-1,k}+h_{j,k+1}+h_{j,k-1})^n +2\left[1-2\left(\frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta s)^2}\right)\right]h^n{}_{j,k}-h^n{}_{j,k} \cdots\cdots(23)$$

式(23)으로 表現되는 演算子의 何學的 構造(Fig. 3)는 式(20)의 것과 같고, $c\cdot\Delta t/\Delta s=1$이면 式(20)이 된다. 그러나 이와같은 three-time-level scheme의 安定條件(CFL condition) (Yanenko, 1968)은

$$c\cdot\Delta t/\Delta s<\sqrt{2}/2 \cdots\cdots(24)$$

이므로 式(20)의 演算子는 不安定하다고 판단된다. 한편 $c\cdot\Delta t/\Delta s=\sqrt{2}/2$일 때 式(23)으로부터 式(25)의 간단하고 安定한 演算子가 된다. 即

$$h^{n+1}{}_{j,k}=0.5(h_{j+1,k}+h_{j-1,k}+h_{j,k+1}+h_{j,k-1})^n -h^{n-1}{}_{j,k} \cdots\cdots(25)$$

2.4. 에너지 損失項의 導入問題

에너지의 主된 損失은 底面摩擦(τ)이다. τ는 u와

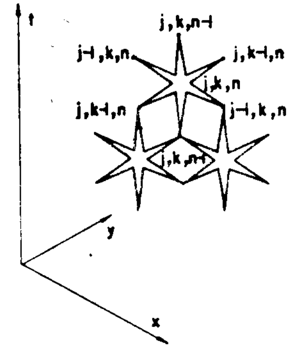

Fig. 3. The four-point operator under linearization in two-dimensional flows.

h의 函數로 表現될 수 있는 바, 即, $\tau_j{}^n=\tau(u_j{}^n, h_j{}^n)$이며 Fig. 4에서 다음 關係式으로 나타난다 (Abbott, 1975).

$$\left(u_1+\left(\frac{g}{h_0}\right)^{1/2}h_1\right)-\left(u_4+\left(\frac{g}{h_0}\right)^{1/2}h_4\right) =-\int_{t_4}^{t_1}\frac{\tau}{\rho h}dt \cdots\cdots(26)$$

$$\left(u_4-\left(\frac{g}{h_0}\right)^{1/2}h_4\right)-\left(u_3-\left(\frac{g}{h_0}\right)^{1/2}h_3\right) =-\int_{t_3}^{t_4}\frac{\tau}{\rho h}dt \cdots\cdots(27)$$

$$\left(u_1-\left(\frac{g}{h_0}\right)^{1/2}h_1\right)-\left(u_2-\left(\frac{g}{h_0}\right)^{1/2}h_2\right) =-\int_{t_2}^{t_1}\frac{\tau}{\rho h}dt \cdots\cdots(28)$$

$$\left(u_2+\left(\frac{g}{h_0}\right)^{1/2}h_2\right)-\left(u_3+\left(\frac{g}{h_0}\right)^{1/2}h_3\right) =-\int_{t_3}^{t_2}\frac{\tau}{\rho h}dt \cdots\cdots(29)$$

위의 式들에서 u_1, u_2, u_3와 u_4를 消去하고 Fig. 4에서 $\tau_{321}=\frac{\tau_3}{4}+\frac{\tau_2}{2}+\frac{\tau_1}{4}$, $\tau_{341}=\frac{\tau_3}{4}+\frac{\tau_4}{2}+\frac{\tau_1}{4}$으로하여 差分形으로 表現하면,

$$(h_j{}^{n+1}+h_j{}^{n-1}-h^n{}_{j+1}-h^n{}_{j-1}) -\frac{\Delta t}{\rho(gh_0)^{1/2}}\left(\frac{\tau^n{}_{j+1}-\tau^n{}_{j-1}}{2}\right)=0 \cdots\cdots(30)$$

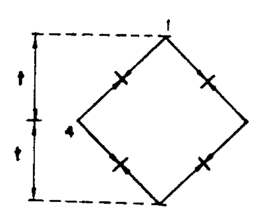

Fig. 4. Distribution of resistances in the four-point method.

마찬가지로 u에 關하여는

$$(u_j{}^{n+1}+u_j{}^{n-1}-u^n{}_{j+1}-u^n{}_{j-1})$$

$$-\frac{\Delta t}{\rho h_0}(\tau_j^{n+1}-\tau_j^{n-1})=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (31)$$

τ_j^n의 값을 適切한 摩擦公式으로 計算하면 式(30), (31)은 에너지의 損失項을 考慮한 境遇의 線型 4點 特性法이 된다.

3. 檢定 및 應用

3.1 직사각형灣에서의 一次元 靜振動(Seiche) 數値實驗

線型 4點 特性法의 精度를 試驗하기 위하여 직사각형灣에서의 一次元 自由振動 數値實驗을 實施하였다. 本 實驗을 위하여 다음과 같은 條件을 만들었다. 即 길이 $L=20$km, 폭 $B=2$km, 平均水深 $h_0=8$m일 때, 初期條件으로서 灣入口의 水深이 8.0m일 때 灣의 內部端에서는 8.0m로 바람에 의해 水面이 Sin曲線으로 上昇(set up)한 후 自由振動이 始作되었다. 이 경우 振動 週期 T의 理論式은 식(32)이며 따라서 $T=9030$sec이다.

$$T=\frac{4L}{\sqrt{gh_0}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (32)$$

길이 方向(x)의 格點數 $jj=7$로 하고 $C.F.L$數를 1.0으로 하였고, $h(x,\Delta t)$, $u(x,\Delta t)$일 때 ($n=2$)의 값을 구하기 위하여 3點 特性法을 사용하였다. 即

$$u_j^2=\frac{u^1{}_{j-1}+u^1{}_{j+1}}{2}+(c_{j-1}+c_{j+1});$$

$$u^1{}_{j-1}=0,\ u^1{}_{j+1}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (33)$$

따라서

$$u_j^2=\sqrt{g}\ (\sqrt{h^1{}_{j-1}}-\sqrt{h^1{}_{j+1}}) \cdots\cdots\cdots\cdots (33a)$$

마찬가지로

$$c_j^2=\frac{u^1{}_{j-1}-u^1{}_{j+1}}{4}+\frac{c^1{}_{j-1}+c^1{}_{j+1}}{2};$$

$$u^1{}_{j-1}=0,\ u^1{}_{j+1}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (34)$$

$$c_j^2=0.5(c^1{}_{j-1}+c^1{}_{j+1}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (34a)$$

開放端에서,

$$h_1^2=8.0(\text{mean water depth}) \cdots\cdots\cdots\cdots (35)$$

$$u_1^2=-\left(\frac{g}{h_0}\right)^{1/2}(H_2^1-H_0) \cdots\cdots\cdots\cdots (36)$$

閉塞端에서,

$$h^2{}_{jj}=h^1{}_{jj-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

$$u^2{}_{jj}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (38)$$

$u(x,\Delta t)$, $h(x,\Delta t)$가 3點 特性法에 의해 구해진 후 式(12a), (14a), (15)~(18)等을 活用하여 計算을 實施하였다.

Fig. 5는 實値數驗의 結果인데 振幅 및 振動週期는 理論値와 거의 正確히 一致하였다. 本 實驗의 結果로서 線型 4點 特性法은 거의 水平으로 흐르는 自由水面의 흐름에서 매우 正確한 解를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

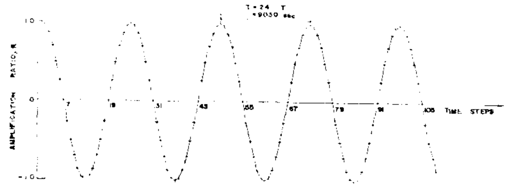

Fig. 5. One-dimensional Seiche test in the rectangular basin.

3.2. 閘門에 의한 水位議節 模型實驗

本 模型實驗의 目的은 閘門의 造作으로 일어나는 흐름의 現象과 關聯하여 흐름에 의한 船舶의 安全과 最適 碇泊位置를 決定하는데 있는 바 線型 4點 特性法을 活用하여 數値實驗을 實施하고 그 結果를 非線型 特性法에 의한 算出 結果와 比較 檢討하였다. 本 實驗에 使用한 條件은 다음과 같다. 即 두 左右 閘門의 間隙이 400m이고, 水深이 15m인 $t=0$일 때 두 閘門이 모두 닫혀진 狀態에서 閘門內의 水位를 調節하기 위하여 左側 閘門을 열기 始作하여 $t=6$sec일 때 30m³/s까지 流入시킨 후, 다시 $t=120$sec때까지 閘門을 닫았다. 이 때 流量의 減少 및 增加는 一次的으로 實施되었다.

Fig. 6의 流速에 關한 結果에 의하면 右側端으로부터 100m以內의 地域은 流速이 0.5m/s未滿이었고 水面의 傾斜度도 또한 완만하여 (Fig. 7)船舶의 閘泊에 良好한 位置임이 判明되었으며, 流速이 1.5m/s까지 이르는 左側端 部近은 不適合함을 알 수 있었다.

Fig. 6, 7의 結果에서 線型化한 경우의 計算値와 非線型인 경우의 것과는 多少의 差異가 있음을 알 수 있으나 本 實驗에서 要求하는 解答에 關해서는 線型化한 模型으로도 마찬가지의 結論을 얻을 수 있었다. 따라서 處現過程이 훨씬 신속한 線型化 理論에 의한 模型이 거의 水平으로 흐르는 흐름에 關한 限 매우 正確하고 便利한 手法임을 알 수 있다.

3.3. 灣入에서의 2次元 흐름 解析

式(20)~(25)까지의 內容을 檢討하기 위하여 길이 및 폭 3km 水深 10m인 正方形 灣入에서의 흐름을 考察하였다. 境界條件으로서 外海와 接한 開放端의 左右端 (1, 1), (1, k)의 水位變動은

格點(1, 1);

$0<t<100$sec일 때, $h(1,1)=10$m(const.)

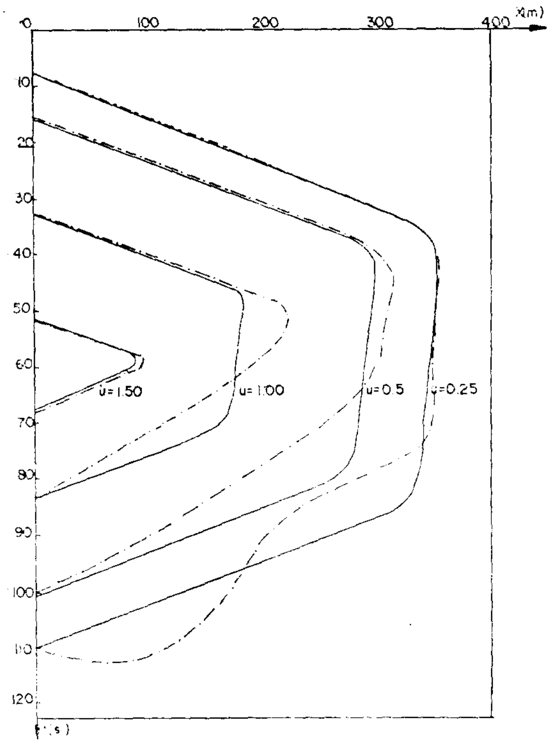

Fig. 6. Isolines of velocity plotted from four-point method.

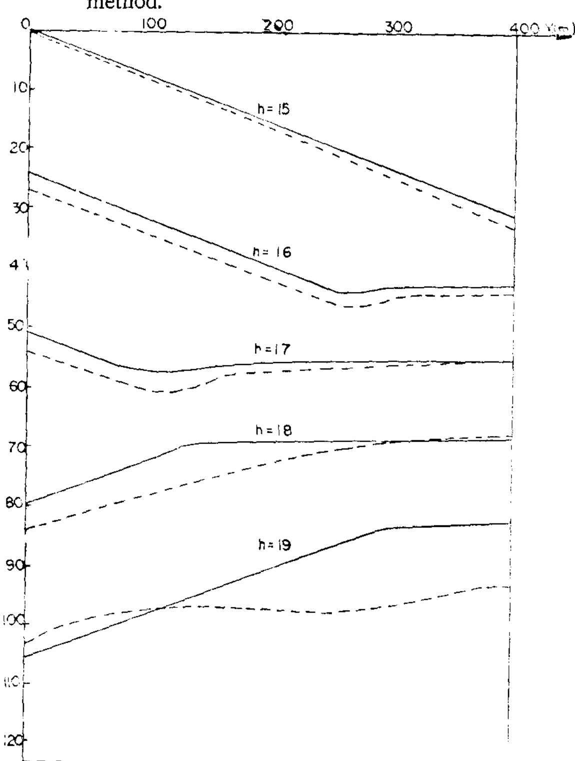

Fig. 7. Isolines of water depth plotted from four-point method.

$100<t<600$sec일 때,

$$h(1,1)=10+\frac{t-100}{500}(\mathrm{m})$$

格點 $h(1,kk)$;

$0<t<100$sec일 때, $h(1,kk)=10\mathrm{m}$(const.)

$100<t<600$sec일 때,

$$h(1,kk)=10+\frac{t-100}{250}(\mathrm{m})$$

이며, 開放端 各 格點에서의 水位는 $h(1,1)$과 $h(1,kk)$ 값을 使用한 一次比例로 補間計算하였다. 實驗은 $c\cdot\Delta t/\Delta s=1$인 式(20)을 使用한 경우와 $c\cdot\Delta t/\Delta s<\sqrt{2}/2$인 (式(25)) 두 경우에 대해서 實施하였다. Fig. 8은 $t=600$sec일 때 水深分布이다. 여기서 式(20)의 경우 그 結果(Fig. 8의 괄호안 숫자)는 不安定하며, $c\cdot\Delta t/\Delta s<\sqrt{2}/2$일 때 安定함을 알 수 있다.

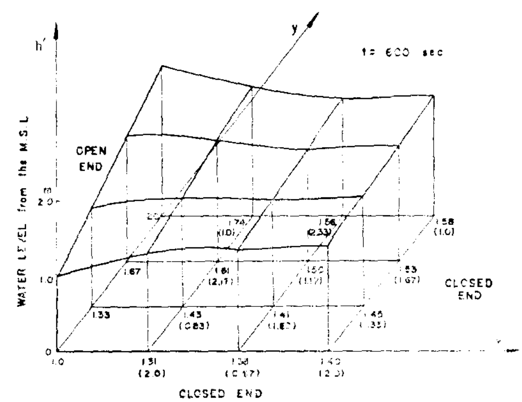

Fig. 8. Wane leight distribution in the rectangular basin.

4. 要約 및 結論

本 硏究는 水面變化의 特傳播性을 利用한 4點法의 線型化 理論을 開水路의 不定流 解析에 適用하는 問題에 關한 것이며 그 內容을 要約하면 다음과 같다.

1. 1次元 靜振動 數値實驗을 한 結果, 本 模型은 水位의 變化가 水深에 比해 充分히 작은 境遇에 振動週期 및 振幅等에 있어서 理論解에 거의 一致함을 알 수 있었다.

2. 2次元 不定流에 本 線型化 理論을 適用함에 있어서 安定性 問題에 關하여 檢討하였다.

3. 本 模型은 電算處理面에서 非線型의 것보다 훨씬 簡便하며 有用함을 알 수 있었다.

<參 考 文 獻>

Abbott, M.B.(1966) : An Introduction to the Method of Characteristics, Thames and Hudson

Abbott, M. B. (1975) : Intermediate Hydraulics, Fourth Ed., IHE, Delft,

Abbott, M. B. (1977) : Numerical Methods, fifth edition, IHE, Delft,

Abbott, M.B. and A. Verwey(1970) : Four-point method of characteristics, ASCE, HY, 12, p.7763.

Fox, L.(1962) : Numerical Solution of ordinary and partial Differential Equations, Pergamon Hansen, B.(1965) : A Theory of plasticity for Ideal Frictionless Materils, Teknisk Forlag, Copenhagen

Yanenko, N.N.(1968) : Methode a Pas Fractionnaires (trans. P.A. Nepomiastchy), Armand Colin, Paris,