

< 論 文 >

開水路의 排水量 特性

Discharge Characteristics of a Heavy Liquid Jet

鄭 容 權\*  
Yong-Kwun Chang

Abstract

The characteristics of a two-dimensional jet through a symmetric slot in a gravity field are considered here as an extension of a gravity-free problem. The coefficient of discharge  $C_d$  is found to be  $C_d \sim 0.61192(1 + 0.31857 \epsilon^2)$  in terms of a small parameter  $\epsilon$ . The shape of jet is derived and computed correctly up to first order.

要 旨

대칭 開水路에서의 重力장터에서의 排水量 特性을 無重力下의에서의 문제의 연장으로 취급하여 풀었다. 排水量係數  $C_d$ 는 解析의으로 다음과 같이 표시된다.  $C_d \sim 0.61102(1 + 0.31857 \epsilon^2)$  이기에서  $\epsilon$ 는 작은 變數이다. 그리고 배수분류의 모양을  $\epsilon$ 의 一次元까지 정확히 구하여 계산하였다.

서 론

액체가 담겨진 容器로부터 容器에 뚫어진 開口(Slot, opening)를 통하여 重力에 의하여 배출될때 액체는 噴流(Jet)의 형태로 아래로 굽어서 나온다. 이때 開口를 통하여 나오는 流量 및 噴流의 모양은 容器의 기하학적 모양, 開口의 크기 및 開口로부터 水頭(head)에 의하여 결정된다. 流量은 流量係數가 決定되면 流量이 決定되고 또한 噴流의 모양도 결정될 것이다.

본 논문에서는 이차원 분류문제를 취급하였는데 그림에서 주어진 것과 같이 開水路의 내경형 開口를 통하여 분사되는 분류를 해석적으로 취급하였다. 이 문제는 Hunter Rouse教授가 처음으로 重力場하에서의 진출한 流量係數를 Von Mises教授의 無重力下에서의 분류수축계수를 적용하여 工學的 目的을 위한 근사해를 구했다. 그가 도출한 근사적 유량계수는 아직도 해석적으로 도출된 바 없으므로 본 논문에서는 이론적으로 이 유량계수를 구하고 분류의 모양을 계산하였다. 이들을 구함에 있어 복소수 이론의 사상 및 Perturbation 이론을 적용하여 유량계수를 일차항까지 정확히

도출하였으며 噴流의 형태는 일차항까지 정확히 도출하였다.

문제의 정의

문제를 정의하기에 앞서 다음의 가정을 하였다. 유체의 운동은 이차원적이며 유체는 비압축성, 점성이 없다고 가정한다. 더욱이 開水路 上流의 無限大되는 곳에서는 유체의 속도가 균일한 水平速度  $U_\infty$ 를 가지며 開水路의 水面 및 분류의 경계에서의 압력은 대기압과 같다고 가정한다. 開口는 開水路 中央線에 대하여 대칭으로 뚫여져 있으며 開口의 크기는 中央線에서 水面까지의 水頭  $h$ 에 비하여 대단히 작다고 가정한다.

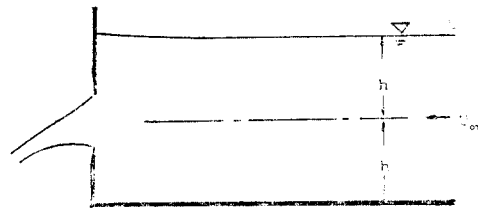


그림 1. 開水路와 分類

\* 本學會 正會員 亞洲大學校 教授(工博)

開口의 크기  $a$ 가 水頭  $h$ 에 比하여 尠小하므로 開水路內의 流體速度는 倅을 것이다. 따라서 開水路內의 水面은 거의 水平을 이룰 것이며 Perturbation理論은 적용함에 있어 倅질한 水면은 水평線 임으로 水면을 水평線으로 하였다.

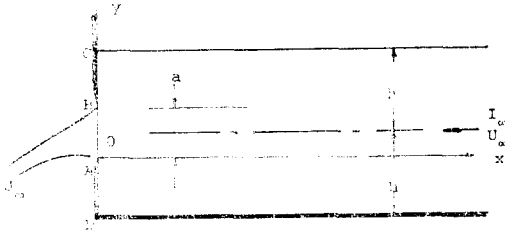


그림 2. 用水路의 모형

倅술한 가정에 의한 流體운동은 기술하는 複素포텐셜  $W(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ 가 존재할 것이며  $\phi(x, y)$ 는 속도포텐셜  $\phi(x, y)$ 는 流動函數이다. 속도( $u, v$ )는 속도포텐셜  $\phi(x, y)$ 로 부터 다음과 같이 도출된다.

$$u = -\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} \quad \dots\dots(1)$$

流動函數  $\phi(x, y)$ 도 (1)의 정의에 마우어서 정의된다. (1)식과 流動函數의 정의에서 複素속도  $\frac{dW}{dz}$ 는,

$$\frac{dW(z)}{dz} = -u - iv \quad \dots\dots(2)$$

만일  $W(z)$  또는 (2)가 알려졌다면 開水路 및 분류內에서의 流體운동은 결정될 것이며 流量係數,

$$Cd = \frac{q}{\sqrt{2gh}} \quad \dots\dots(3)$$

도 결정될 것이다. 여기에서  $q$ 는 單位폭당 流量이다. 또한 분류의 모양도 결정될 것이다.

사 상

그림 2에 주어진 유체운동의 영역인 물리적  $z$ -평면은 보조평면인  $t$ -평면상에 있는 단위반경을 가진 반원 내의 그림 3과 같이 사상된다. (부록 1 참조)

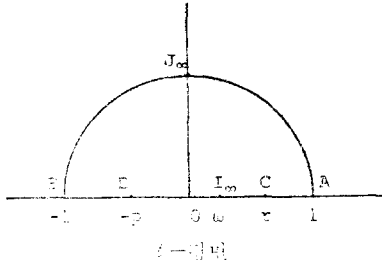


그림 3. 物理平面的의 유체영역

이때 사상함수(mapping function)는 다음과 같다.

$$W(t) = \frac{q}{\pi} \left( \log \frac{1+t^2}{2(t-\omega)(1-\omega t)} + 2\log(1+\omega) + i\pi \right) \quad \dots\dots(4)$$

여기에서  $\omega$ 는  $|\omega| < 1$ 되는 미지의 상수이다. 그림 2에서 A점에서의 속도포텐셜  $\phi_A$ 는 다음과 같다.

$$\phi_A = 2 \frac{q}{\pi} \log \frac{1+\omega}{1-\omega} \quad \dots\dots(5)$$

(4)은 보조포텐셜  $W$ -평면에서의 유체영역을  $t$ -평면상의 단위 반원내에 사상하는데 이것은 곧 물리적  $z$ -평면에서의  $\overline{BC}$ , 수면  $\overline{BI}$ , 開水路 바닥  $\overline{ID}$  및  $\overline{DA}$ 를 반원의 직경  $\overline{AB}$ 에 사상된다. 경계점  $D, C$ 는 직경  $\overline{AB}$ 상의 점  $D, C$ 에 사상되며 분류의 상라계(Boundary of Jet)는 반원구상에 사상된다. 開水路 上流 無限大點  $I_\infty$ 은  $t$ -평면에서의 직경  $\overline{AB}$ 上  $\omega$ 에 사상되며 분류의 無限下流點  $J_\infty$ 은  $t=i$ 에 사상된다.

$\Omega(t)$  합 수

무차원 複素속도(complex velocity)  $\zeta(t)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\zeta(t) = \frac{1}{\sqrt{2gh}} \frac{dW}{dz} \quad \dots\dots(6)$$

그림 2와 3을 합치하면 경계를 따라 이동하는 유체의 속도방향은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} u &= 0, \quad v < 0 & -1 < t < 1 \\ u < 0, \quad v &= 0 & -p < t < r \\ u < 0, \quad v &> 0 & -1 < t < -p \end{aligned} \right\} (7)$$

경계를 따라 이동하는 유체속도의 방향이 (7)을 만족하는  $\zeta(t)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다. (부록 2 참조)

$$\zeta(t) = -i \sqrt{\frac{1-p}{1+pt}} \sqrt{\frac{1-t}{1-rt}} e^{-\Omega(t)} \quad \dots\dots(9)$$

여기에서  $\Omega(t)$ 는 단위 반원내에서 정칙함수이며,  $-1 < t < 1$ 에서는 실함수가 된다. 따라서 複素수 이론의 principle of reflection에서,

$$\Omega(t) = \overline{\Omega(\bar{t})} \quad \dots\dots(10)$$

가 성립된다. 여기에서  $\bar{t}$ 는  $t$ 의 쾨플복소수이며  $\overline{\Omega(\bar{t})}$ 는  $\Omega(t)$ 의 쾨플복소수이다. (10)에 의하면  $\Omega(t)$ 는  $\text{Im}\{t\} < 0$ 의 단위 반원내로 정칙적으로 연속함수를 의미한다. 그러므로  $\Omega(t)$ 는 단위원에서 정칙함수가 된다.

複素속도  $\frac{dW}{dz}$ 는  $\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{dt}{dz}$ 로 쓸 수 있으므로 (4), (6), (9)으로 부터,

$$dz = i \frac{Cd}{\pi} a F(\zeta) dt \quad \dots\dots(11)$$

을 얻는다. 여기에서

$$F(t) = \left( \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1}{t-\omega} + \frac{\omega}{1-\omega t} \right) \cdot \sqrt{\frac{1+pt}{t+p}} \sqrt{\frac{1-rt}{t-r}} e^{-\Omega(t)}$$

(11)은  $z$ -평면과  $t$ -평면을 연결하는 식이다. 이상으로 미지의 상수  $p, r, \omega, Cd$ 와 미지의 함수  $\Omega(t)$ 로서 문제는 풀기에 앞서 完全히 公式化되었다.

**$p, r, \omega(t)$ 의 점근적 전개 및 이들을 위한 조건**

전술한  $p, r, \omega$ 는 開水路의 기하학적 형태를 나타내는 상수적 변수이며  $\Omega(t)$ 는 유체동력학적 유동상태를 나타내는 함수이다. 이들의 해를 점근적 전개(asymptotic expansion)로 표시하기 위하여 작은 무차원 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$\varepsilon = \frac{a}{2h} \dots\dots\dots(12)$$

$p, r, \omega, \Omega(t)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} p &= p_1\varepsilon + p_2\varepsilon^2 + \dots \\ r &= r_1\varepsilon + r_2\varepsilon^2 + \dots \\ \omega &= \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \dots \\ \Omega(t) &= \Omega_1(t)\varepsilon + \Omega_2(t)\varepsilon^2 + \dots \\ Cd &= C_0 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2 + \dots \end{aligned} \right\} (13)$$

여기에서  $p_1, p_2 \dots; r_1, r_2 \dots; \omega_1, \omega_2 \dots; C_0, C_1, C_2 \dots$ 는 상수이다. (10)으로부터,

$$\Omega_k(t) = \overline{\Omega_k(\bar{t})}, \quad k=1, 2, 3 \dots\dots\dots(14)$$

$\Omega_k(t)$ 는 principle of reflection에 의하여 단위원 내에서 正則的으로 연속한다. 따라서  $\Omega_k(t)$ 는 단위원 내에서 正則函數가 된다.

$p, r, \omega$ 는 기하학적 조건에서 구함을 전술하였거니와 그림 2와 3에서 다음의 기하학적 관계식이 성립됨을 쉽게 알 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} x + i\left(h - \frac{a}{2}\right) &= i \frac{Cd}{\pi} a \int_{L_1} F(t) dt \\ &= i \frac{Cd}{\pi} a \int_{L_2} F(t) dt \end{aligned} \right\} (15)$$

여기에서 적분경로  $L_1, L_2$ 은 그림 4에서 표시된 것과 같다.

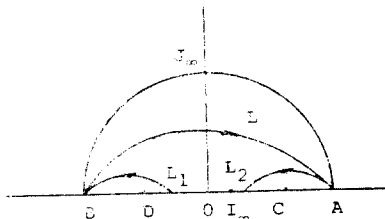


그림 4. 적분경로  $L_1$ 과  $L_2$

$\Omega_k(t)$ 함수의 해를 구함에 있어서는 다음 두가지 방법을 들 수 있다. 첫째 방법은 만일 단위 원주상에  $\Omega_k(t)$ 값이 주어졌다면 이 값을 경계치로 해서 Cauchy 적분정리를 이용해서  $|t| < 1$ 에서의 正則函數  $\Omega_k(t)$ 를 구할 수 있고 둘째 방법은  $\Omega_k(t)$ 의 실수부분인  $x_k^*(\sigma) = \text{Re} \Omega_k(t)$ 가 원주상에 주어졌을시 Dirichlet문제에 취급하여  $x_k^*(\sigma)$ 를 만족하고  $|t| < 1$ 에서 調和函數인 해를 구한다음 Cauchy-Riemann 방정식을 이용하여 공액조화함수(conjugate harmonic function)을 구한다음  $-1 < t < 1$ 에서 實函數가 되었던 조화함수와 공액조화함수를 결합하면 이것이  $\Omega_k(t)$ 함수가 된다. 본 논문에서는 두번째 방법을 이용해서  $\Omega_k(t)$ 를 구하는데 경계치  $x_k^*(\sigma)$ 는 다음과 같이 Bernoulli方程式으로부터 구하여진다. 開水路의 上流無限大점  $L_\infty$ 와 분류의 上部 및 下部경계에 따라 Bernoulli정리를 적용하면 다음 관계식을 얻는다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{2} + h + \frac{U_\infty^2}{2g} &= \text{he}^{2x^*(\sigma)} + a + \frac{Cd}{\pi} a \text{Re} \\ &\int_1^t F(t) dt \\ t &= e^{i\sigma}, \quad 0 \leq \sigma < \frac{\pi}{2} \\ &= \text{he}^{2x^*(\sigma)} + \frac{Cd}{\pi} a \text{Re} \int_{-1}^t F(t) dt \\ t &= e^{i\sigma}, \quad \frac{\pi}{2} < \sigma \leq \pi \end{aligned} \right\} (16)$$

여기에서  $x^*(\sigma) = \text{Re} \Omega(t)$ ,  $t = e^{i\sigma}$ 이다. (3)식과 유량  $q = 2hU_\infty$ 을 결합하면,

$$U_\infty = Cd \sqrt{2gh} \varepsilon \quad (17)$$

을 얻는다. (16)에서  $U_\infty$  대신 관계식 (17)을 대입하고 (16)의 양변을  $h$ 로 나누면 무차원 방정식을 얻는다.

$$\left. \begin{aligned} 1 + \varepsilon + Cd^2 \varepsilon^2 &= e^{2x^*(\sigma)} + 2\varepsilon + 2 \frac{Cd}{\pi} \varepsilon \text{Re} \\ &\int_1^t F(t) dt \\ t &= e^{i\sigma}, \quad 0 \leq \sigma < \frac{\pi}{2} \\ &= e^{2x^*(\sigma)} + 2 \frac{Cd}{\pi} \varepsilon \text{Re} \int_{-1}^t F(t) dt \\ t &= e^{i\sigma}, \quad \frac{\pi}{2} < \sigma \leq \pi \end{aligned} \right\} (18)$$

(10), (13), (14)로부터  $x^*(\sigma) = x_1^*(\sigma)\varepsilon + x_2^*(\sigma)\varepsilon^2 + \dots$ 로 쓸 수 있으며 이것을 (16)에 대입하여  $\varepsilon, \varepsilon^2 \dots$ 의 계수를 항등식으로 놓으면  $\Omega_1(t), \Omega_2(t)$ 함수의 실수부분인 調和函數의 경계치를 위한 다음의 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} x_1^*(\sigma) &= \mp \left( \frac{1}{2} - \frac{Co}{\pi} \right) - \frac{Co}{\pi} \cos \sigma \\ x_2^*(\sigma) &= \frac{1}{2} C_0^2 - x_1^*(\sigma) - \frac{C_1}{\pi} \text{Re} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_{t_1}^t \frac{t^2-1}{t^2(1+t^2)} dt + \frac{C_0}{\pi} \operatorname{Re} \\ & \int_{t_1}^t \frac{(t^2-1)\Omega_1(t)}{t^2(1+t^2)} dt \\ & t=e^{i\sigma}, t_1=e^{i\sigma_1} \end{aligned} \right\} (19)$$

(19)에 주어진 첫번째식의 윗부호는  $-\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}$  일때  
 더 밑부호는  $\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{3}{2}\pi$  일때이고 두번째 식에서  $-\frac{\pi}{2}$   
 $< \sigma < \frac{\pi}{2}$  일때  $\sigma_1=0$ 이며,  $\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{3}{2}\pi$  일때는  $\sigma_1=\pi$ 이다.

$\Omega_1(t), \Omega_2(t)$ 함수의 해

(19)에 주어진 경계치로부터  $\Omega_1(t), \Omega_2(t)$  함수를 구  
 함에 앞서 단위원내에서 조화함수인  $x_k(\rho, \sigma)$ 를 다음  
 과 같이 정의한다.

$$x_k(\rho, \sigma) = \operatorname{Re}\Omega_k(t), t = \rho e^{i\sigma} \quad \rho < 1$$

(19)를 만족하는  $x_k(\rho, \sigma)$ 를 구하는 문제는 Dirich-  
 let 문제이며 Poisson kernel로부터  $x(\rho, \sigma)$ 를 다음과  
 같이 들 수 있다.

$$x_k(\rho, \sigma) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\sigma + b_n \sin n\sigma) \dots\dots\dots (20)$$

여기에서,

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x_n^*(\sigma) \cos n\sigma \, d\sigma \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x_n^*(\sigma) \sin n\sigma \, d\sigma \end{aligned} \right\} (21)$$

먼저  $x_1(\rho, \sigma)$ 를 고찰하면 (19)에 주어진 첫번째식  $x_1^*$   
 ( $\sigma$ )를 (21)에 대입하여 적분하면  $a_0 = a_{2n} = 0$ , 모든  $b_n$   
 $= 0$ 된다. 따라서

$$x_1(\rho, \sigma) = -\frac{C_0}{\pi} \rho \cos \sigma - \left(\frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi}\right) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \rho^{2n+1} \cos(2n+1)\sigma$$

그런데,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \rho^{2n+1} \cos(2n+1)\sigma = \operatorname{Re} \tan^{-1} t, t$   
 $= \rho e^{i\sigma}$  임으로

$$\left. \begin{aligned} x_1(\rho, \sigma) &= -\operatorname{Re} \left\{ \frac{C_0}{\pi} t + \left(\frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi}\right) \frac{4}{\pi} \tan^{-1} t \right\} \\ t &= \rho e^{i\sigma}, \rho < 1 \dots\dots\dots (22) \end{aligned} \right\}$$

따라서,

$$\Omega_1(t) = -\frac{C_0}{\pi} t - \left(\frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi}\right) \frac{4}{\pi} \tan^{-1} t \dots\dots (23)$$

가 된다.  $\Omega_1(t)$ 는  $-1 < t < 1$ 에서 실함수임을 곧 알 수  
 있다. 같은 방법으로  $\Omega_2(t)$ 를 구하면 다음과 같다. (부  
 록 4 참조)

$$\left. \begin{aligned} \Omega_2(t) &= K - \frac{C_1}{\pi} t - \frac{1}{2} \frac{C_0^2 t^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \\ & C_1 \tan^{-1} t - \frac{8C_0}{\pi^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi}\right) \cdot \\ & \left(t + \frac{1}{t}\right) \tan^{-1} t - \frac{C_0}{\pi} \left[\frac{C_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi}\right)\right] \log(1+t^2) - \frac{4C_0}{\pi^2} \cdot \\ & \left(\frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi}\right) (\tan^{-1} t)^2 + \frac{4C_0}{\pi^2} \cdot \\ & \left(\frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi}\right) t \tan^{-1} t \end{aligned} \right\} (24)$$

여기에서  $K$ 는 상수이며 부록 4에 주어져 있다. 특히  
 주목할 것은  $t$ 가  $i$ 에 접근할때  $\Omega_2(t)$ 는  $+\infty$ 에 접근한  
 다.

$p, r, \omega$ 의 해

그림 2에서 開水路의 上流無限大點  $L_0$ 에서의 속도  
 $U_0$ 는  $t$ -평면에서  $t=\omega$ 에서의 속도  $U_\infty = -\frac{dW}{dz}$ 이다.

이 관계식과 (17)을 이용해서 새로운 식

$$\frac{dW}{dz} = -Cd\sqrt{2gh} \varepsilon, t = \omega \dots\dots\dots (25)$$

를 얻는다. 이 식은 (15)에 추가해서  $p, r, \omega$ 를 이차  
 까지 구하는데 이용될 것이다. (6), (9), (25)로부터

$$C_d \varepsilon = \sqrt{\frac{p+\omega}{1+p\omega}} \sqrt{\frac{r-\omega}{1-r\omega}} e^{\Omega(\omega)} \dots\dots\dots (26)$$

이식으로부터,

$$C_0 = \sqrt{p_1 + \omega_1} \sqrt{r - \omega_1} \dots\dots\dots (27)$$

을 얻는다. (15)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} h - \frac{a}{2} &= -\frac{C_d}{\pi} a \int_r^1 F(t) dt \\ &= -\frac{C_d}{\pi} a \int_{-p}^{-1} F(t) dt \end{aligned} \right\} (28)$$

(28)의 첫번째식에 변수치환  $t = \varepsilon\tau$ 을 하고 두번째식에  
 $t = -\varepsilon\tau$ 로 하면 다음 식을 얻는다.

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{2C_0}{\pi} \int_{r_1^*}^{1/\varepsilon} \frac{1}{\tau - \omega_1} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau + p_1} \sqrt{\tau - r_1}} \\ & + O(\varepsilon) = \frac{2C_0}{\pi} \int_{r_1^*}^{1/\varepsilon} \frac{1}{\tau + \omega_1} \\ & \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - p_1} \sqrt{\tau + r_1}} + O(\varepsilon) \end{aligned} \right\} (29)$$

여기에서  $p_1^* = p_1 + p_2\varepsilon + \dots$ 이며  $r_1^* = r_1 + r_2\varepsilon + \dots$  (29)  
 에다  $\varepsilon=0$ 을 넣으면,

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{2C_0}{\pi} \int_{r_1}^{\infty} \frac{1}{\tau - \omega_1} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau + p_1} \sqrt{\tau - r_1}} \\ & = \frac{2C_0}{\pi} \int_{p_1}^{\infty} \frac{1}{\tau - \omega_1} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau + p_1} \sqrt{\tau - r_1}} \end{aligned} \right\}$$

(27)과 (30)을 만족하는  $p_1, r_1$ 의 해는 다음과 같다.

$$p_1=r_1=C_0, \quad \omega_1=0 \dots\dots\dots(31)$$

여기에서  $C_0$ 는 미지의 상수이나 다음절에서 쉽게 결정됨을 알 수 있을 것이다. 이제  $p_2, r_2, \omega_2$ 의 해를 구하기 앞서 (29)와 (30)에서,

$$\frac{2C_0}{\pi} \left( \int_{1/\varepsilon}^{\infty} + \int_{C_0}^{\gamma_1^*} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - C_0^2}} = 0(\varepsilon) \dots\dots\dots(32)$$

을 얻는다. (32)의 두번째 적분에서 변수치환  $\tau = \varepsilon\gamma_1 + C_0$ 를 하면,

$$\frac{2C_0}{\pi} \int_{C_0}^{\gamma_1^*} \frac{d\tau}{\tau \sqrt{\tau^2 - C_0^2}} = 2 \frac{C_0}{\pi} \sqrt{\varepsilon} \int_0^{\gamma_2^*} \frac{d\tau_1}{(C_0 + \varepsilon\tau_1) \sqrt{2C_0\tau_1 + \varepsilon\tau_1^2}}$$

여기에서  $r_2^* = r_2 + \varepsilon r_3 + \dots$ 이다. (33)의 오른쪽  $\sqrt{\varepsilon}$ 의 계수에  $\varepsilon=0$ 을 취하고 (32)의 왼쪽 첫적분에  $\varepsilon=0$ 을 취해서 (32)의 양변에  $\sqrt{\varepsilon}$ 의 계수를 비교하면  $\sqrt{\varepsilon}$ 의 계수가 0이 됨을 곧 알것이다. 따라서  $r_2=0$ 을 얻는다. 동일한 방법으로  $p_2=0$ 을 얻으며 (26)식으로 부터

$$C_1 = \sqrt{p_2 + \omega} \sqrt{p_2 - \omega_2} \dots\dots\dots(34)$$

를 얻으며  $C_1=0$ 이 됨을 다음 절에서 곧 알케될 것이다.  $C_1$ 과  $p_2$ 가 각각 0이 됨으로  $\omega_2$ 도 0이 되지 않으면 안된다. 따라서,

$$p_2=r_2=\omega_2=0 \dots\dots\dots(35)$$

**유량계수 C**

그림 2와 3에서 다음의 관계식이 성립한다.

$$ia = i \frac{Cd}{\pi} a \int_L F(t) dt \dots\dots\dots(36)$$

여기에서 적분경로  $L$ 은 그림 4에 주어져 있고 (36)의 양변을  $a$ 로 나누고  $\varepsilon, \varepsilon^{3/2}$ 의 계수로부터,

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{\pi}{\pi+2} \\ C_1 &= 0 \\ C_2 &= \frac{C_0^2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)t^2} \left[ \frac{1}{2} \Omega_1^2 - \Omega_2^2(t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} C_0^2 t^2 + \frac{1}{2} \frac{C_0^2}{t^2} \right] dt \end{aligned} \right\} (37)$$

$C_2$ 를 계산하기 위해서 다음 적분을 고려한다.

$$I_k = \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)t^{2k}}{(1+t^2)t^2} dt \dots\dots\dots(38)$$

$$\left. \begin{aligned} (38)에서 \\ I_{-1} &= \pi + \frac{10}{3} \\ I_0 &= -(\pi+2) \\ I_1 &= \pi-2 \\ I_2 &= \frac{10}{3} - \pi \\ I_3 &= \pi-4 + \frac{14}{15} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} (39)$$

(37)의  $C_2$ 를 위한 적분에서  $\Omega_1^2(t)$  및  $\Omega_2(t)$ 를 원점을 중심으로 한 Taylor급수로 전개한다음 (39)의 적분치를 대입하여 정리하면,

$$C_2 = 0.3185C_0 \dots\dots\dots(40)$$

을 얻는다. 따라서 유량계수  $Cd$ 는,

$$Cd \sim C_0(1 + 0.31857\varepsilon^2) \dots\dots\dots(41)$$

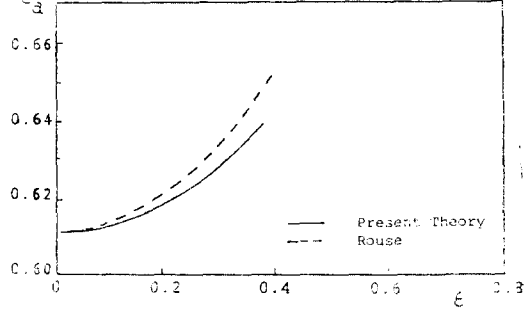


그림 5. 유량계수 Cd

**噴流의 형태**

(11)을 반원주  $t=e^{i\sigma}$ 에 따라 적분하면,

$$\left. \begin{aligned} \frac{z}{a} &= C + i \frac{C_0}{\pi} \left( 2 \tan^{-1} t + \frac{1}{t} \right) + i \frac{C_0^2}{\pi^2} \varepsilon \\ &\quad \log(1+t^2) - i \frac{C_0^2}{\pi^2} \varepsilon \log t + i \frac{4C_0}{\pi^2} \\ &\quad \left( \frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi} \right) \left[ (\tan^{-1} t)^2 + \frac{1}{t} \tan^{-1} t \right. \\ &\quad \left. - \log t + \frac{1}{2} \log(1+t^2) \right] \end{aligned} \right\} (42)$$

여기에서  $C$ 는 적분상수이다. 위식에  $t=e^{i\sigma}$ 를 대입해서 실수부분과 허수부분으로 나누면 이때 분류의 상계는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &\approx \frac{C_0}{\pi} \left( \sin \sigma + \log \frac{\cos \sigma}{1 + \sin \sigma} \right) + \varepsilon \\ &\quad \left\{ \frac{C_0}{\pi^2} \left( 1 - \frac{2C_0}{\pi} \right) \sigma + \frac{2C_0}{\pi^2} \right. \\ &\quad \left. \left( 1 - \frac{2C_0}{\pi} \right) \left[ \frac{\pi}{4} \sin \sigma + \left( \frac{1}{2} \cos \sigma \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\pi}{4} \right) \log \frac{\cos \sigma}{1 + \sin \sigma} \right] \right\} \\ \frac{y}{a} &\approx C_1 + \frac{C_0}{\pi} \cos \sigma + \varepsilon \left\{ \frac{C_0}{\pi^2} \left( \frac{C_0}{2} + \frac{1}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{C_0}{\pi} \right) \log(1 + \cos 2\sigma) + \frac{4C_0}{\pi^2} \left( \frac{1}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{C_0}{\pi} \right) \left[ \frac{\pi}{4} \cos \sigma - \frac{1}{4} \log^2 \frac{\cos \sigma}{1 + \sin \sigma} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \sin \sigma \log \frac{\cos \sigma}{1 + \sin \sigma} \right] \right\} \\ &\quad t = e^{i\sigma}, \quad 0 \leq \sigma < \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} (43)$$

여기에서

$$C_1 = 1 - \frac{C_0}{\pi} - \varepsilon \frac{C_0}{\pi^2} \left( \frac{C_0}{2} + \frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi} \right).$$

$$\log 2 - \varepsilon \frac{C_0}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi} \right)$$

분류의 下部경계는 다음식에 의하여 주어진다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &\approx C_3^* + \frac{C_0}{\pi} \left( \sin \sigma + \log \frac{1 + \cos \sigma}{1 + \sin \sigma} \right) \\ &+ \varepsilon \left\{ \frac{C_0}{\pi^2} \left( 1 - \frac{2C_0}{\pi} \right) \sigma + \frac{2C_0}{\pi^2} \right. \\ &\left. \left( 1 - \frac{2C_0}{\pi} \right) \left[ -\frac{\pi}{4} \sin \sigma + \left( \frac{1}{2} \cos \sigma \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - \frac{\pi}{4} \right) \log \frac{1 + \cos \sigma}{1 + \sin \sigma} \right] \right\} \\ \frac{y}{a} &\approx C_3^* + \frac{C_0}{\pi} \cos \sigma + \varepsilon \left\{ \frac{C_0}{\pi^2} \left( \frac{C_0}{2} + \frac{1}{2} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{C_0}{\pi} \right) \log(1 + \cos 2\sigma) - \frac{2C_0}{\pi^2} \right. \\ &\left. \left( 1 - \frac{2C_0}{\pi} \right) \left[ \frac{\pi}{4} \cos \sigma + \frac{1}{2} \sin \sigma \log \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{1 + \cos \sigma}{1 + \sin \sigma} + \frac{1}{4} \log^2 \frac{1 + \cos \sigma}{1 + \sin \sigma} \right] \right\} \\ t &= e^{i\sigma}, \quad \pi \leq \sigma < \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} (44)$$

여기에서

$$C_3^* = -\varepsilon \frac{C_0}{\pi} \left( 1 - \frac{2}{\pi} C_0 \right)$$

$$C_3^* = \frac{C_0}{\pi} - \varepsilon \frac{C_0}{\pi} \left( \frac{C_0}{2} + \frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi} \right) \log 2 - \varepsilon \frac{C_0}{2\pi} \left( 1 - \frac{2C_0}{\pi} \right)$$

上部경계는 (43)에서  $\sigma=0$ 에서  $a=89.9^\circ$ 까지 下部경계는 (44)에서  $\sigma=180^\circ$ 에서  $\sigma=90.1^\circ$ 까지 계산하였다.  $\varepsilon=0.05$ 와  $\varepsilon=0.3$ 일때 분류의 모양을 그림 6에 표시하였다. 그림 6에서 보는것처럼  $\varepsilon$ 의 값이 0에 가까우면 가까울수록 噴流는 開口 中央線에 대하여 대칭에 가까워진다. 이것은 곧  $\varepsilon$ 의 값이 적으면 적을수록 重力의 영향이 감소함을 의미한다. 특히 噴流의 양경계 ( $t=e^{i\sigma}$ )에 따라서는 절대값,

$$\left| \sqrt{\frac{t+p}{1+pt}} \sqrt{\frac{t-r}{1-rt}} \right| = 1 \quad (t=e^{i\sigma})$$

의 관계식이 성립하며 복소속도 ( $\sqrt{u^2+v^2}$ )는 다음과 같다.

$$\left| \frac{dW}{dz} \right| = \sqrt{2gh} e^{z^*(\sigma)} \dots\dots\dots (45)$$

만일  $\sigma$ 의 값이  $\frac{\pi}{2}$ 에 접근할 때  $x^*(\sigma)$ 의 이차값은  $+\infty$ 에 접근한다. 이는 곧  $\left| \frac{dW}{dz} \right|$ 가  $J_\infty$ 에서 무한대가 됨을 의미한다. 開水路內 無限上流점에서는 속도  $U_\infty$ 가 (17)에 주어졌것 처럼  $O(\varepsilon)$ 이다.

結 論

본 논문에서 취급한 문제는 비선형 문제이므로 Perturbation 이론을 써서 유량계수를 이차항까지 정확히 구하였는데 오차의 범위는  $O(\varepsilon^3)$ 이다. 따라서  $\varepsilon$ 의 값이 적을때는 아주 정확하다. Rouse教授의 결과와 비교할 때  $\varepsilon$ 의 값이 대단히 적을때는 두 값이 거의 일치한다.  $\varepsilon$ 의 값이 커짐에 따라 차이가 생기지마는 Rouse教授의 결과도 본 논문 결과와 비슷한 경향으로 변하므로 그가 비록 공학적 근사방법으로 구했다고 하더라도 근사치로서는 좋다. 開口 근처에서의 噴流의 형태는 오차가  $O(\varepsilon^3)$ 이므로  $\varepsilon$ 의 값이 적으면 정확한 모양을 얻을 수 있다.

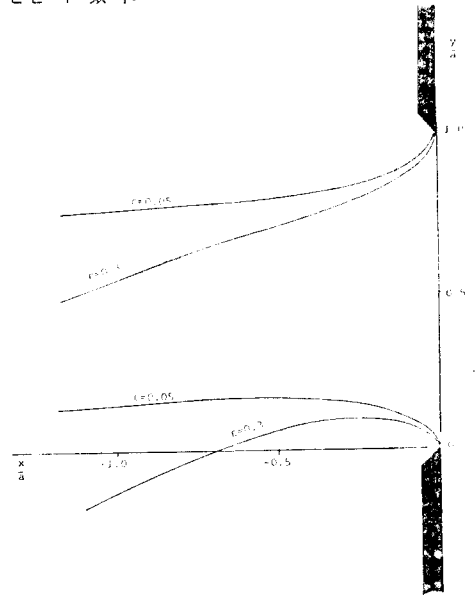


그림 6. 분류의 형태

본 논문에서는 적은 변수  $\varepsilon$ 를 써서 해를 구했으나 대신 開水路 上流 無限大點에서의 Froude number인  $F_\infty = \frac{U_\infty}{\sqrt{2gh}}$ 를 쓰면  $\varepsilon = \frac{F_\infty}{Cd}$ 의 관계가 성립되며 이것을 (41)에 대입하여 정리하면 유량계수는 다음과 같다.

$$Cd \sim C_0(1 + 0.85329F_\infty^2) \dots\dots\dots (46)$$

결므로 본 논문연구를 지원하여 주신 문교부 당국에 심심한 사의를 표명합니다.

참 고 문 헌

1. Chung, Yong K., "Solution of Flow Under Sl.

uice Gates," J. of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineers, February, 1972.

2. Clarke, N.S., "On Two Dimensional Inviscid Flow in a Waterfall," J. of Fluid Mechanics, 1965, p. 359-369.

3. Hunt, Bruce W., "Numerical Solution of an integral Equation for Flow from a Circular Orifice," J. of Fluid Mechanics, 1968, vol. 31, p. 361-377.

4. Garabedian, P., "Calculation of Axially Symmetric Cavities and Jets," Pacific J. of Math., 1956, vol. 6, p. 611-684.

5. Kiselev, O.M., "The Problem of the Flow of a Heavy Liquid from a Hole in a Vertical Wall," Mathematical Reviews 31, 1966, Review 4279, p. 774.

6. Kiselev, O.M., Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika, 1964.

7. Lewy, H., Proc. Am. Math. Soc., 3, 1952, p. 111-113.

8. Rouse, Hunter, Elementary Mechanics of Fluids, New York, John Wiley, 1962, p. 87-93.

9. Van Dyke, Milton, Perturbation Methods in Fluid Mechanics, New York, Academic Press, 1964.

상,

$$W = \frac{q}{\pi} \log T, T' = -T, T'' = \frac{(1+b)T'}{(b-1)T'+2b}$$

$$T'' = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right)$$

을 거쳐  $t$ -평면상의 단위 반원내에 사상된다. 여기에서  $b(b > 0^2)$ 는 미지의 상수이다.

여기에서  $b = \frac{(\omega+1)^2}{(\omega-1)^2}$ ,  $W$ -평면과  $t$ -평면을 연결하면,

$$W(t) = \frac{q}{\pi} \left\{ \log \frac{t^2+1}{2(t-\omega)(1-\omega t)} + 2 \log(1+\omega) + i\pi \dots \dots \dots (1-1) \right.$$

을 얻으며  $t=1$ 에서  $\phi_A$ 는,

$$\phi_A = \frac{2q}{\pi} \log \frac{1+\omega}{1-\omega} \dots \dots \dots (1-2)$$

부록 II 복소속도

복소속도  $\zeta(t)$ 는 정칙점  $C, D$ 에서 正則函數가 아니다. 그러나  $[\zeta^2(t)]$ 는 이들 점들에서 正則函數인므로  $\zeta^2(t)$ 를  $t=r$ 에 있는 정칙점  $C$ 를 중심으로 Taylor전개를 하면  $\zeta^2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t-r)^{n-1}$ 이 된다. 이  $\zeta^2(t)$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\zeta^2(t) = (t-r) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t-r)^{n-1} \dots \dots (a_1 \neq 0) \quad (II-1)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t-r)^{n-1}$ 은 正則函數이며 이것을  $t=-p$ 에 있는 정칙점  $D$ 를 중심으로 Taylor 전개를 하면,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t-r)^{n-1} = (t+p) \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t+p)^{n-1} (b_1 \neq 0) \dots \dots \dots (II-2)$$

(II-1)과 (II-2)에서

$$\zeta^2(t) = (t-r)(t+p) \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t+p)^{n-1} \dots \dots (II-3)$$

(II-3)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

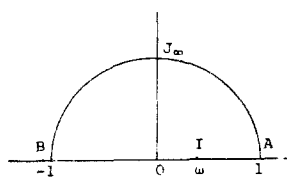
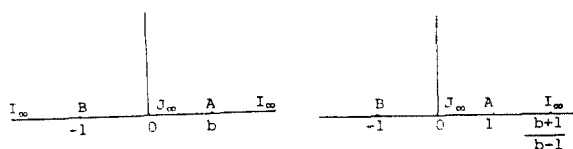
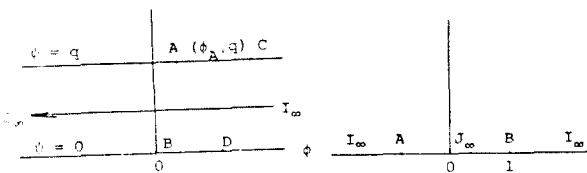
$$\zeta(t) = -i \sqrt{t-r} \sqrt{t+p} \eta(t) \dots \dots \dots (II-4)$$

여기에서  $\eta(t) = i \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t+p)^{n-1}}$ 이다. 이  $\eta(t)$ 는 단위원내에서 正則函數이다. 왜 그러나 하면  $t$ -평면에서 유동유체의 영역인 단위원내에서는  $\zeta(t)$ 가 특이점을 갖지 않기 때문이다.

$\sqrt{1-rt}$  및  $\sqrt{1+pt}$  함수를 고찰하면  $-1 < p, r < 1$  이므로 단위원 밖의 점  $t = -\frac{1}{p}, \frac{1}{r}$ 에 특이점(Singularity)을 가진다. 그러므로 이들 함수는 단위원내

부 록 I

$B$ 점을 원점에 둔 복수 포텐셜  $W$ -평면은 일련의 사



에서는 正則函數이다. 이를 函數를 편의상 (II-4)와 다음과 같은 형태로 결합한다.

$$\zeta(t) = -i\sqrt{\frac{t-r}{1-rt}} \sqrt{\frac{t+p}{1+pt}} \xi(t) \dots\dots\dots(II-5)$$

$\xi(t)$ 는 단위 반원내에서 正則이며  $t$ -평면의 실축인 직경  $\overline{AB}$ 상에서 (7)에 주어진 속도의 방향과 비교할때  $\xi(t)$ 는 양의 실수가 되지 않으면 안된다. 따라서 여기에  $\Omega(t)$ 함수를 도입하여 다음과 같이 정의한다.

$$\xi(t) = e_n^{(t)} \dots\dots\dots(II-6)$$

$\Omega(t)$ 는 단위 반원내에서 正則函數이며,  $-1 < t < 1$ 에서 실수이다. (II-5)와 (II-6)에서,

$$\zeta(t) = -i\sqrt{\frac{t-r}{1-rt}} \sqrt{\frac{t+p}{1+pt}} e\Omega(t) \dots\dots\dots(II-7)$$

부록 III  $\Omega_2(t)$ 함수의 해

(19)의 두번째 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi_2(\sigma) = \frac{1}{2} C_0^2 - \phi_1^2 - \frac{C_1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{t_1}^t \frac{t^2-1}{t^2(1+t^2)} dt + \frac{C_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_{t_1}^t \left( \frac{2}{1+t^2} - 1 \right) \Omega_1(t) dt - \frac{2}{\pi} C_0 \int_{\sigma_1}^{\sigma} \phi_1(\sigma) \sin \sigma d\sigma \quad (t=e^{i\sigma}, t_1=e^{\sigma_1}) \quad (III-1)$$

(III-1)식에서 적분을 구한 다음,  $\phi_2(\sigma)$ 를 다음 형태로 쓸 수 있다.

$$\phi_2(\sigma) = K \pm \left. \begin{aligned} & \frac{C_1}{\pi} \cos \sigma \mp 4 \frac{C_0}{\pi} \\ & \left( \frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi} \right) \cos \sigma - \frac{1}{2} \frac{C_0^2}{\pi^2} \cos 2\sigma \\ & - \frac{C_0}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{C_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi} \right) \right] \right. \\ & \left. \log(1+t^2) + \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi} \right) (\tan^{-1}t)^2 \right. \\ & \left. - \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi} \right) t \tan^{-1}t \right\} \dots\dots \\ & (t=e^{i\sigma}) \end{aligned} \right\} \dots\dots$$

여기에서 윗부호는  $-\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}$ , 아랫 부호는  $\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{3}{2}\pi$ 이며,  $K$ 는 상수인데,

$$K = \frac{1}{2} C_0 - \frac{1}{2} \frac{C_0^2}{\pi^2} + \left( \frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi} \right) \left( \frac{2C_0}{\pi} + \frac{C_0}{4} - \frac{1}{2} \right) + \frac{C_0}{\pi} \left( \frac{C_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{C_0}{\pi} \right) \quad (III-3)$$

$\phi_1(\rho, \sigma)$ 를 구할때와 동일한 방법으로  $\phi_2(\zeta, \sigma)$ 를 구하면 (24)에 주어진  $\Omega_2(t)$ 를 얻는다.