

J-積分의 有限要素解析에 關한 研究

韓 文 植* · 金 相 哲**

A Study on the Finite Element Analysis of J -Integral

Moonsik Han, Sangchul Kim

Abstract

One of the important subjects in fracture mechanics study is to analyze the stress intensity factor.

In this paper, the stress intensity factor in Mode I (K_I) is determined by J -integral using the finite element method.

In this investigation, the values of K_I are computed for distorted and undistorted elements of 8-noded isoparametric finite elements.

The numerical results obtained are summarized as follows.

(1) Through a relatively coarse mesh, the K_I values obtained by this method are fairly good accuracy.

(2) The K_I values for the distorted elements appear to be better than those obtained using the undistorted mesh.

(3) Within the limits of these analyses, the solutions obtained through the integral paths in the medium region of elements approach to the analytical solution most closely.

1. 序 論

Crack과 같은 缺陷을 內包, 또는 그 發生이 豫想되는 材料내지 構造物을 安全하게 使用하기 위하여서는 從來의 材料力學的인 強度의 概念만으로는 設計가 不可能하기 때문에 이러한 材料의 強度는 力學的인 側面에서 獨自의으로 解析 評價하지 않으면 안된다. 이를 위하여 發展하여 온 學問의 하나가 “破壞力學”이다.

近來 offshore drilling rigs, floating nuclear power plants, space shuttles, 航空機, 船舶 等의 機械 또는 構造物의 破壞事故의 原因을 살펴 보면 大部分 脆性破壞에 의한 것으로 볼 수 있다.

破壞力學의 重要한 研究課題의 하나는 龜裂先端에서 特異性을 나타내는 應力擴大係數(K)의 決定이다.

本 論文에서는 中央內部龜裂 및 兩端龜裂을

* 正會員, 韓國機械研究所 大德船舶分所

** 仁荷大學校 工科大學

같은 正方形 모델에 對하여 *J*-integral method에 依한 數值解析을 通하여 *K*값을 求하는 데에 對한 研究를 하였다. *J*-積分은 龜裂先端에서의 應力擴大係數를 求하는 데 있어서 그 效力을 發揮하고 있고 近來에 와서는 龜裂先端에서의 塑性域이 比較的 큰 경우 뿐만 아니라 mixed mode에 대하여서도 龜裂先端에서의 特性을 把握하는 데 重要한 役割을 하고 있다.

J-integral method에 依하여 *K*를 解析할 때에는 通常의으로 有限要素法을 使用하는데 從來의 要素 모델은 주로 三角形 내지 四角形要素 등을 使用하였다. 그러나, 本 論文에서는 八節點 四角形 isoparametric 要素의 中間 節點을 龜裂先端 쪽으로 要素邊의 1/4인 點으로 옮긴 distorted 要素와^{1,2,3)} 中間節點이 自己 자리를 그대로 지킨 undistorted 要素를 龜裂先端 周圍의 要素에 適用, 各各 *J*-integral method를 通하여 *K*를 求하여서 이 結果를 기타 方法에 依하여 解析된 結果와 比較檢討하여 보았다.

2. 解析의 理論의 根據

2.1 *J*-積分의 研究現況 및 基礎的 理論

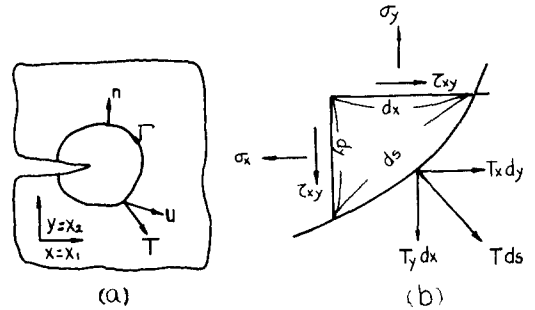
J-積分은 非線形材料의 notch 또는 龜裂先端에서의 變形率集中을 解析하기 위하여 1968年 Rice에 의해 처음 提案되었다⁴⁾.

그 후 Begley와 Landes⁵⁾, Bucci⁶⁾, Paris等에⁷⁾ 의해 *J*-積分이 工學上 매우 有用함을 立證하였 으며, 現在에 이르러서는 dislocation의 連續體 理論을 龜裂에 適用시킨 J_{xx} ⁸⁾를 비롯하여 低사이클의 疲勞龜裂進展 및 creep龜裂進展^{9,10)}에 應用되는 등 各方面에서 活潑히 研究되고 있다.

J-積分의 長點은 積分經路獨立性(path-independency)⁴⁾에 依하여 龜裂先端周圍에 關한 直接的인 狀況이 未知일 때도 線形彈性 및 非線形彈性 材料에 無關하게 龜裂先端 附近의 力學的인 狀態를 正確히 決定할 수 있다는 것이다.

物體力이 作用하지 않고 모든 應力成分이 直交座標 X_1 과 X_2 에만 依存하는 2次元 變形場, 즉 平面應力, 平面變形率일 때의 線形 또는 非線形 彈性物체에 龜裂이나 notch가 Fig. 1과 같이 X_1

軸에 平行하게 存在하면 *J*-積分은 다음과 같이 定義된다.⁴⁾



(a) 龜裂周圍의 임의의 積分經路 (b) 積分經路의 細部圖

Fig. 1. Typical *J*-integral path.

$$J = \int_{\Gamma} [W dX_2 - \bar{T}(\partial \bar{u} / \partial X_1)] dS \dots \dots \dots (1)$$

여기서 Γ 는 龜裂先端을 包含하며 아래 龜裂表面으로부터 위의 龜裂表面에 이르는 임의의 積分經路이다.

變形率에너지密度(strain energy density) W 는

$$W = W(x, y) = W(\epsilon_{mn}) = \int_0^{\epsilon_{mn}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

로 表示되며 線形彈性體인 境遇에는

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_y \epsilon_y)$$

로 된다. 위의 式에서 σ, τ 및 ϵ, γ 는 垂直 및 剪斷 應力과 이에 對한 變形率을 나타내며 \bar{T} 는 Γ 에 따라 바깥쪽으로 作用하는 應力벡터, \bar{u} 는 變位 벡터, \bar{n} 은 垂直單位 벡터이며, dS 는 Γ 上的 微小線要素이다.

式(1)의 2번째 항이 線形彈性體인 경우에는

$$\bar{T} dS = T_i dS = \sigma_{ij} n_j dS = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dy - \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{bmatrix} dx$$

$$\bar{T} \cdot \partial \bar{u} / \partial X_1 dS = \left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy - \left(\tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx$$

J-integral은

$$J = \int_{\Gamma} \left[\left\{ W - \left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dy + \left(\tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \right] \dots \dots \dots (2)$$

한편, 線形彈性體에서 Mode I인 境遇, *J*-積

分값과 K_I 사이에는 다음과 같은 關係가 있다.

$$J_I = G_I = \kappa \frac{K_I^2}{E} \begin{cases} \kappa = 1 - \nu^2 & (\text{平面變形率 狀態}) \\ \kappa = 1 & (\text{平面應力 狀態}) \end{cases} \dots\dots\dots (3)$$

여기서 ν 는 Poisson比, E 는 材料의 彈性係數이며, G 는 에너지解放率(energy release rate)이다.

2.2 有限要素法^{11,12,13)}

本 研究에서는 二次的 彈性 isoparametric 要素를 擇하였고 要素內의 座標 x, y 는 節點座標 x_i, y_i 와 形狀函數 N_i 를 使用하여 다음과 같이 interpolation된다. (Fig. 2 參照)

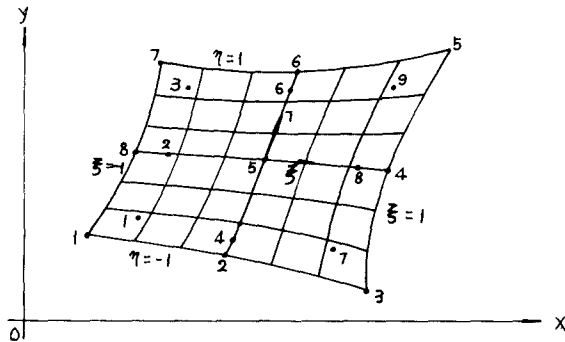


Fig. 2. Global coordinate(ξ, η) by isoparametric mapping.

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$N_i(\xi, \eta) = [(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) - (1 - \xi_i^2) \times (1 + \eta_i \eta) - (1 - \eta_i^2) (1 + \xi_i \xi)] \xi_i^2 \eta_i^2 / 4 + (1 - \xi_i^2)(1 + \eta_i \eta)(1 - \xi_i^2) \eta_i^2 / 2 + (1 - \eta_i^2) \times (1 + \xi_i \xi)(1 - \eta_i^2) \xi_i^2 / 2 \dots\dots\dots (5)$$

여기서 N_i 는 補間函數(interpolation function)라 하며, 節點 i 에 對한 이 要素內의 變位分布가

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) u_i \\ v &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) v_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

로 interpolation 된다고 假定할 때, 變形率은

$$\{\epsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = [B] \{a_i\} \dots\dots\dots (7)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

여기서 a_i 는 節點變位, $[B]$ 는 變位-變形率 matrix, $[J]$ 는 Jacobian matrix이며 應力과 變形率의 關係는 다음과 같이 된다.

$$\{\sigma\} - \{\sigma_0\} = [D] \{ \epsilon \} - \{ \epsilon_0 \} \dots\dots\dots (9)$$

$\{\sigma_0\}$; 初期應力 $\{\epsilon_0\}$; 初期變形率
 $[D]$; 變形率-應力 matrix

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E(1+(1-\lambda)\nu)}{(1+\nu)(1-\lambda\nu)} & \frac{E(1+(1-\lambda)\nu)}{(1+\nu)(1-\lambda\nu)} & 0 \\ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-\lambda\nu)} & \frac{E(1+(1-\lambda)\nu)}{(1+\nu)(1-\lambda\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\lambda\nu)} \end{bmatrix}$$

단 $\lambda=1$; 平面應力狀態

$\lambda=2$; 平面變形率狀態

要素剛性 matrix는 (Fig. 3 參照)

$$\begin{aligned} [K] &= \iint [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] \times \\ &\quad \det [J] d\xi d\eta \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

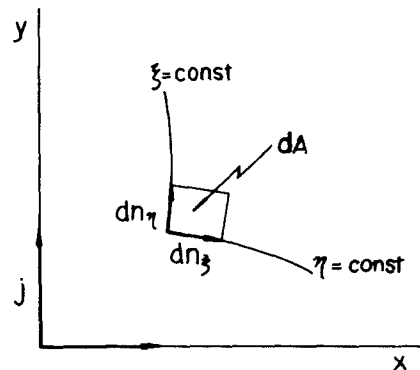


Fig. 3. The differential Area(dA) in the element.

本 解 析 에 서 는 式(4)의 數 值 積 分 은 Gauss 數 值 積 分 의 3 point rule과 9 point rule로 計 算 했 다. (Fig. 4 參 照)

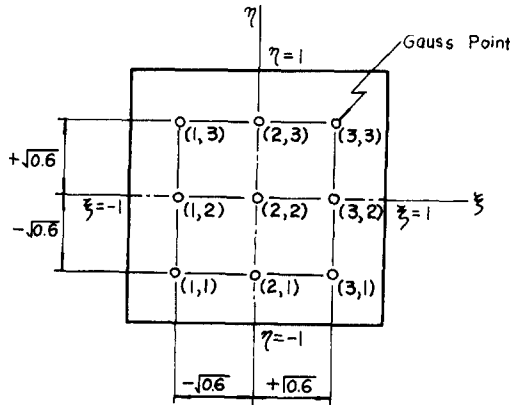


Fig. 4. Distribution of Gauss point in 3-point rule.

한 元 素 의 strain energy u^e 는

$$u^e = \frac{1}{2} \{a_i\}^T [K] \{a_i\} \dots\dots\dots(11)$$

system의 total strain energy u 는

$$u = \sum_e u^e = \frac{1}{2} \{a\}^T [K] \{a\} \dots\dots\dots(12)$$

여기서 $\{a\}$ 는 系 全 体 의 節 点 變 位 向 量 이 다, $[K]$ 는 system stiffness matrix이다.

또한 作 用 荷 重 F_i 에 의한 外 部 功 V 는

$$V = -\{a\}^T \{F\} \dots\dots\dots(13)$$

이 며 total potential energy π 는

$$\pi = u + V = \frac{1}{2} \{a\}^T [K] \{a\} - \{a\}^T \{F\} \dots\dots\dots(14)$$

가 된 다. π 가 stationary이면 系 는 平 衡 을 이룬 다.

즉,

$$\frac{\partial \pi}{\partial a} = 0 = \{\partial_a\}^T ([K] \{a\} - \{F\}) \dots\dots\dots(15)$$

여기서 $\{\partial_a\}$ 는 任 意 이 기 때 문 에 平 衡 方 程 式 은

$$[K] \{a\} = \{F\} \dots\dots\dots(16)$$

가 된 다.

表 面 力 $\{T\}$ 가 作 用 하 는 境 遇 節 点 荷 重 向 量 이 다 $\{F\}$ 는

$$\{F\} = \int_A [N] \{T\} dA \dots\dots\dots(17)$$

가 된 다.

2.3 特 異 變 換 元 素 (Distorted element)

1975年 R. D. Henshell과 K. G. Shaw는 有 限 元 素 法 의 total energy method에 의 하 여 K 를 解 析 할 때 龜 裂 先 端 附 近 의 中 間 節 点 들 을 龜 裂

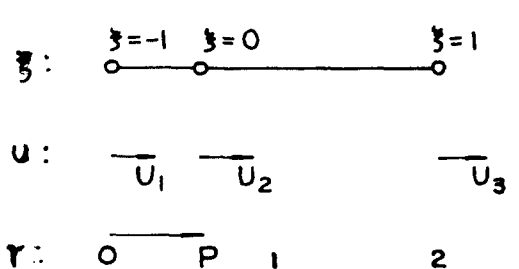
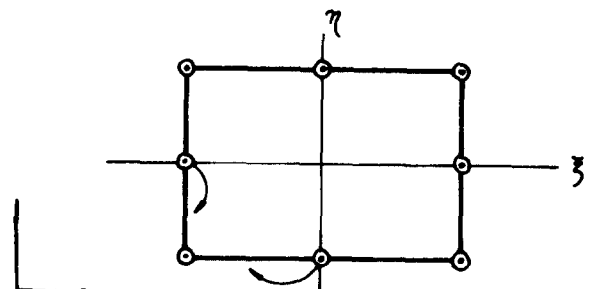
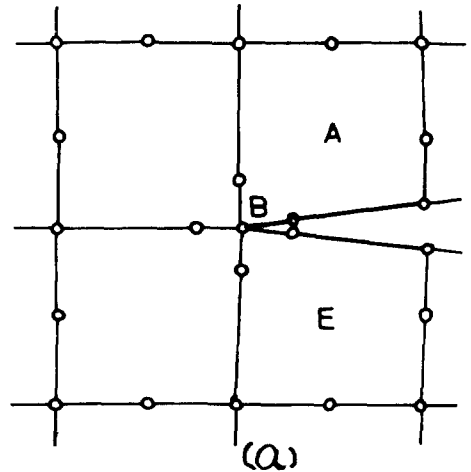


Fig. 5. Distortion of an eighth-noded element in the region of a singularity.

先端 要素邊의 1/4인 點으로 옮김으로써 龜裂先端에서의 特異性을 正確하게 發生시켜 應力擴大係數를 보다 正確하게 얻었다.¹⁾

Fig. 5 (a)와 같은 model에서 A部分에 該當되는 8節點의 isoparametric 要素를 따로 local coordinate에 表示하여 놓은 것이 Fig. 5 (b)이며, Fig. 5 (b)에서 一次元 요소로서 한 邊만을 取한 것이 Fig. 5 (c)이다.

龜裂先端에서 떨어진 距離와 變位는

$$\left. \begin{aligned} r &= a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 \\ u &= b_1 + b_2\xi + b_3\xi^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

로 假定된다(Fig. 5(c) 參照). 節點에서의 ξ 및 r 의 값($\xi = -1$ 일 때 $r = 0$, $\xi = 0$ 일 때 $r = p$, $\xi = 1$ 일 때 $r = 2$)을 式(5)에 代入하여 a_1, a_2, a_3 를 求해 다시 展開하면

$$r = p + \xi + (1-p)\xi^2 \dots\dots\dots(19)$$

$$\therefore \xi = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4p + 4p^2 + 4(1-p)r}}{2(1-p)} \dots\dots\dots(20)$$

여기서, distort일 때 $0 \leq p \leq 1$ 이므로

$$\begin{aligned} 1 - 4p + 4p^2 + 4(1-p)r \\ = (1-2p)^2 + 4r(1-p) \geq 0 \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

따라서 ξ 는 서로 다른 2根을 갖는다.

$$\xi = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4p + 4p^2 + 4(1-p)r}}{2(1-p)}$$

일 때를 생각하면

$$\frac{d\xi}{dr} = \{(1-2p)^2 + 4r(1-p)\}^{-\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(22)$$

$$(1-2p)^2 + 4r(1-p) = 0$$

일 때 特異性을 가지며

$$r = \frac{(1-2p)^2}{4(p-1)} \dots\dots\dots(23)$$

즉, $p = \frac{1}{2}$, $r = 0$ 에서 特異性을 갖는다. 같은

방법에 의해서 $p = \frac{1}{2}$, $u = 0$ 에서 特異性을 갖는다.

3. 解析 節次

3.1 解析 對象으로 選擇한 Model

本 論文에서는 J-integral method에 의하여 model I일 때 應力擴大係數(K_I)를 구하였으려 解析의 對象 모델로서는 Fig. 6 및 Fig. 7에 表示

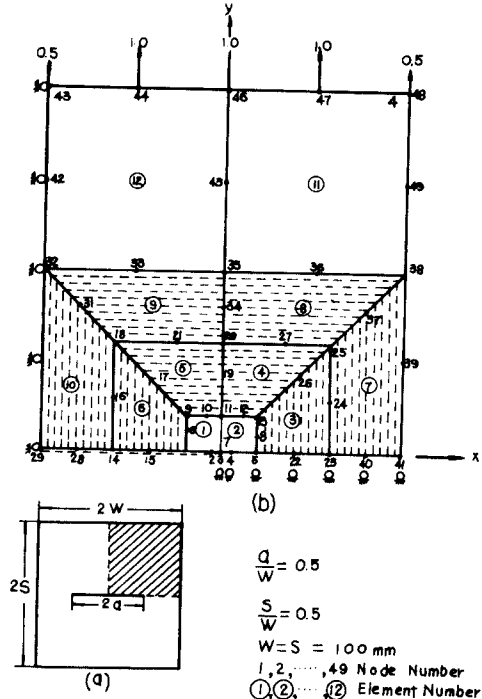


Fig. 6. Finite elements idealization and integration path of center cracked square plate (12 elements)

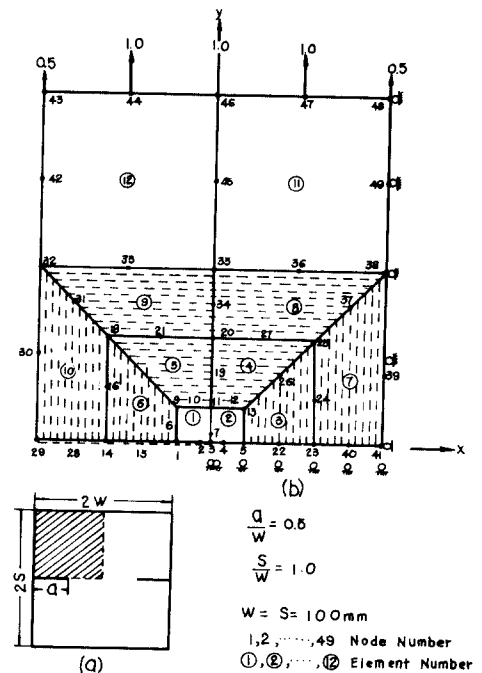


Fig. 7. Finite elements idealization and integration path of double edge cracked square plate. (12 elements)

한 바와 같이 平面應力狀態 때의 中央內部龜裂 및 兩端龜裂을 갖는 幅과 길이가 各各 200mm 인 正方形板을 擇하였으며 平板의 形狀과 荷重條件이 上下左右 對稱이기 때문에 斜線된 部分에 對하여 解析하였다. 要素分割과 積分經路를 Fig. 6(b) 및 7(b)에 나타내었는데 荷重은 Y軸 方向으로 均一한 引張荷重을 받는 것으로 하였으며 Poisson比는 0.3, 彈性係數는 2.1×10^6 (kg/cm²)으로 計算하였다.

3.2 要素選擇 및 分割

龜裂周邊의 應力 및 變形率을 解析하는데 利用되는 要素들은 多樣하나, 本 論文에서는 J-積分의 短点인 微分節次로 因한 精密度의 低下를 防止하기 위하여 正確한 解를 얻을 수 있는 節次이 8個인 isoparametric 要素를 選擇하여 J-積分을 計算하였다. 또한, 有限要素法에서 이보다 더욱 精度가 좋다는 龜裂先端周位의 isoparametric elements의 中間節次를 龜裂先端쪽 要素邊의 1/4인 點으로 옮긴 distorted 要素의 概念을 導入하여 J-積分을 計算하였으며, 要素分割은 中央內部龜裂, 모델兩端龜裂모델에 對하여 共히 要素數를 12個로 하였다.

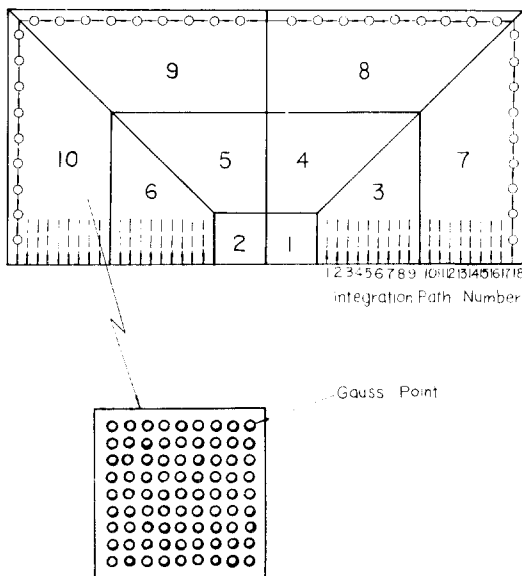


Fig. 8. Integration paths and distribution of 81 Gauss points.

3.3 計算節次의 構成

Fig. 8에 보인 바와 같이 各 要素에 對한 81個 Gauss point들의 X, Y方向의 變形率, 剪斷變形率, 應力, 剪斷應力을 求하여 積分經路에 따라 數值積分함으로써, 各 model에 對하여 J-積分을 구하였다. 本 研究에서는 Fig. 7에 보인 바와 같이 要素 3, 4, 5, 6을 通하는 9個의 積分經路, 要素 7, 8, 9, 10에서도 9個의 積分經路를 通하여 J-積分을 구하였다.

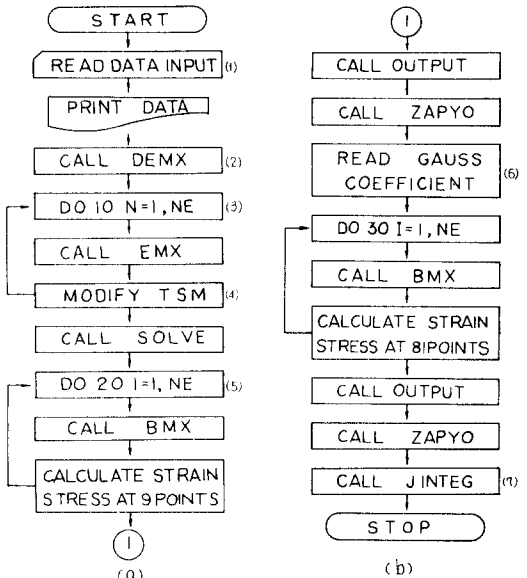


Fig. 9. Flow chart.

計算의 節次를 flow chart로써 Fig. 9에 나타내었다. flow chart에 나타낸 電算프로그램 構成을 說明하면 다음과 같다.

(1) 主 프로그램에서 要素總數 NE, 平面應力, 平面變形率에 對한 判別, 彈性係數, Poisson比, 節次順으로 節次番號, 荷重節次과 荷重值, 構成된 節次番號의 X方向, Y方向의 拘束與否를 읽는다.

(2) 全体 剛性matrix, 節次變位, 座標를 0으로 만든 다음 3-point rule에 따라 Gauss係數 要素座標를 읽고 彈性 matrix DEM X를 計算한다.

(3) 要素順으로 要素 剛性matrix EMX를 計算, 主 프로그램으로 다시 돌아와 全体剛性을 形成한다.

(4) 荷重벡터를 다른 變數에 옮겨 貯藏하고 剛性 matrix와의 關係에서 Gauss Ziedel method solve를 利用하여 未知節點變位와 節點荷重을 모두 구한다.

(5) 要素番號에 따라 各 要素의 Gauss point 9點에 對한 變位-變形率 matrix BMX를 求하고 X,Y方向의 變形率, 剪斷變形率, 剪斷應力, output를 찍고 各 要素의 Gauss point 9點에 對한 全体座標 ZAPYO를 計算한다.

(6) 主 프로그램에 돌아와서 81點에 對한 Gauss 係數를 읽고 各 要素 81點에 對한 變位-變形率 matrix를 求하고 Y方向의 變形率, 剪斷變形率, 應力, 剪斷應力을 찍고 全体座標를 計算한다.

(7) 式(2)를 數值積分하여 J_I 를 計算하였고, 이 J_I 를 使用하여 式(3)에 의해 K_I 를 計算하였다.

4. 結果 및 考察

各 model의 龜裂先端 周圍에 distorted 要素 undistorted 要素를 適用시켜서 구한 K_I 값을 積分經路에 따라 서로 比較하였으며 精度를 比較하기 위하여 M. Isida 및 T. K. Hellen의 解析解도 같이 表示하여 놓았다.

Fig. 10을 보면 大體的으로 各 經路에 對하여 얻어진 K_I 의 값은 一定하다고 볼 수 있는데 이 現狀은 J-積分의 經路獨立을 證明하여 주는 것으로 생각할 수 있다. 그러나 詳細하게 檢討하면 J-積分의 path로서 龜裂先端으로부터 더 떨어진 要素에서 取하여 計算한 K_I 의 값이 더 크다는 것을 알 수 있다. 또한 要素境界에서의 M. Isida 등의 解析解와의 差異도 龜裂先端에 가까운 要素를 通하여 積分하여서 구한 解의 境遇가 더욱 甚함을 알 수 있다. 이러한 傾向의 原因은 isoparametric 要素의 境遇, 要素間의 變位の 連續性(適合條件)은 保證될 수 있으나 應力과 變形率은 一般的으로 不連續이므로 그러한 應力, 變形率 값을 使用하여서 J-積分 값을 計

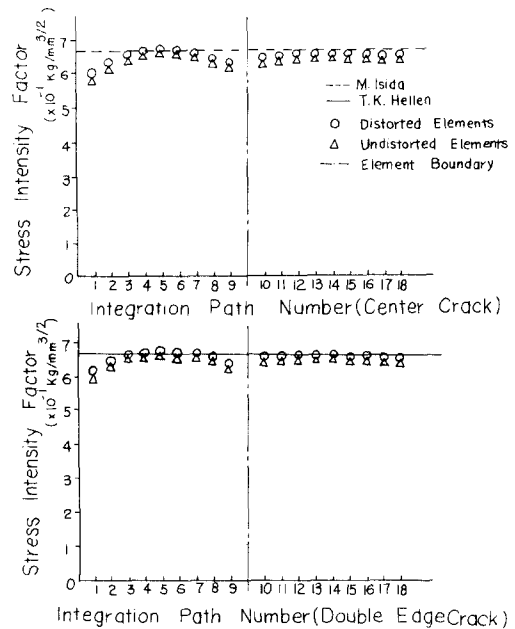


Fig. 10. Stress intensity factor vs. integration path number in plane stress.

算하기 때문이라 생각이 된다.

undistorted 要素를 使用하였을 때와 distorted 要素를 使用하였을 때를 比較하여 보면, distorted 要素가 M. Isida 등의 解析解에 더욱 가까워짐을 알 수 있다. 中央內部龜裂인 境遇 積分經路 3에서 7까지와 12에서 16까지의 平均値로 구한 K_I 값들은 undistorted 要素에서는 最大 error가 3.1%였고, distorted 要素에서는 1.5% 以下이었다. 兩端龜裂인 경우에는 積分經路가 2부터 8까지와 11에서 17까지의 平均値로 구한 K_I 값이 undistorted 要素에서는 最大 error가 0.97% 程度였고, distorted 要素에서는 0.93% 以下이었다. 이를 그림에서 考察해보면 distorted 要素의 境遇 中央內部龜裂에서는 要素 中央 5個의 積分經路에서 구한 K_I 값의 平均値가 正確하고, 兩端龜裂에서는 要素 中央 7個의 積分經路에서 구한 K_I 값의 平均値가 正確하게 나왔다. undistorted 要素의 境遇도 마찬가지였다.

따라서 本 解析 範圍內에서는 distorted isoparametric 要素를 使用하면 精度가 좋고 大端히 有力한 方法이라 할 수 있다.

이와같이 J-積分 方法에 依하여 精度가 높게

K_I 을 구하는 방법은 mixed mode에 대하여도 適用이 可能하다.

5. 結 論

本 論文에서는 破壊力學에서 重要한 役割을 하는 龜裂先端에서의 應力擴大係數 K_I 을 J -積分에 의하여서 精度가 높게 구하는 方法에 對하여 研究하였으며 crack tip에서의 特異性을 더욱 明白히 나타내어 준다는 distorted 方法을 使用하여 undistorted 方法을 使用한 때와 比較 檢討하여 보았다.

本 論文에서 얻은 結論을 要約하면 다음과 같다.

(1) J -積分에 依한 K_I 의 解析은 其他 方法에 依한 K_I 解析에 比하여 大端히 精度가 높다.

(2) 比較的 적은 要素數로도 Gauss point만 適當히 잡아주면 充分히 實用的으로 使用할 수 있는 K_I 의 값을 구할 수가 있다.

(3) 龜裂先端 周邊에서 J -積分을 行할 때 龜裂先端을 包含하는 要素와 隣接하고 있지 않은 要素들의 經路를 通하여 數值積分을 하는 것이 더욱 精度가 좋은 結果로 나왔다.

(4) 一般적으로 要素의 境界에 가까운 經路에 따라 J -積分을 行하여 解析한 K_I 은 精度가 높지 않다.

(5) undistorted 方法에 比하여 distorted 方法의 解析이 컴퓨터容量에 變動없이 더욱 正確한 解를 얻을 수 있다.

(6) 本 研究의 範圍內에서는 各 要素의 中間部分에 位置하는 經路에 따라 구한 K_I 값의 平均값이 가장 精度가 높게 나왔으며 이는 一般의 으로도 成立하리라고 생각된다.

(7) J -積分에 依한 K_I 의 解析은 interpolation 하지 않고 直接 K_I 값을 구할 수 있다.

參 考 文 獻

(1) Resdy S. Barsoum, "On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10, 1976, pp.25~37.

(2) Henshell, R.D. and Shaw, K.G., "Crack Tip Elements are Unnecessary", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 9, 1975, pp.495~507.

(3) Akin, J.E., "The Generation of Elements with Singularities" Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.10, 1976, pp.1249-1259.

(4) Rice, J.R., Trans. ASME, J. Appl. Mechs, Vol.35, 1968, pp.379-386.

(5) Begley, J.A. and Landes, J.D., ASTM STP 514, 1972, p.1.

(6) Bucci, R.J., ASTM STP 514, 1972, p. 40.

(7) Rice, J.A., Paris, P.C. & Merkle, J.G., "Some Further Results of J -Integral Analysis and Estimates," ASTM STP 536, pp.231-243. (1973).

(8) H. Miyamoto, K. Kageyama "Fundamental Study on the Jext Integral Applied to Elastoplastic Fracture Mechanics Recent Research on Mechanical Behavior of Solids" Univ. of Tokyo Press pp.229-236 (1979).

(9) 大略, 小倉, 久保, 日本機械學會誌, 第44卷 1978, p.1831.

(10) Nikkin, K.M., Webster, G.A. and Turner, C.E., ASTM STP 601, 1976, p.47.

(11) Zienkiewicz, "The Finite Element Method", 3rd ed., 1977.

(12) C.S. Desai and J.F. Abel, "Introduction to the Finite Element Method", 1972.

(13) K.H. Huebner, "The Finite Element Method for Engineers," John Wiley & Sons Inc., 1974.