
 論 文

大韓造船學會誌
 第19卷 第4號 1982年 12月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 19, No. 4, December 1982

補剛된 有孔板의 挫屈強度解析(第 1 報)

—壓縮 挫屈—

任 尙 鍊* · 張 昌 斗* · 羅 昇 洙**

 The Buckling Analysis of Stiffened Plate with Hole (1st Report)

—Compression Buckling—

by

S.J. Yim · C.D. Jang · S.S. Na

Abstract

When the perforated plate is under in-plane load of compression, buckling analysis becomes to be necessary because of the presence of stress concentration around holes.

To constrain it, we need reinforcement. The methods of reinforcement are attaching doubler around hole and attaching stiffener in the direction of initial stress.

In this paper, two methods are investigated mentioned above, which of the two is better effective reinforcement.

In the consequence of the above investigation, following conclusion was obtained. The method of doubler reinforcement was less buckling stress than that of stiffener because the former had large compressive stress.

So, effective method of reinforcement is stiffener reinforcement.

1. 緒 言

船體에는 그 構造上의 用途 및 重量輕減을 위한 多數의 開口가 存在한다. 開口가 壓縮挫屈에 미치는 影響에 對해서는 正方形板의 中心에 圓形開口가 있어 그 直徑이 變化하는 경우[9], 開口가 板中央에서 偏心되어 있는 경우[10]등 여러가지 研究가 이루어지고 있다.

開口가 없는 普通의 補剛板에 對해서는 直交異性板으로 置換하거나[12], 有效幅概念을 使用하여 Grillage로 置換하여 挫屈值를 求할 수 있고, 平板과 stiffener의 挫屈에 따른 Energy를 각각 求하여 最小 potential Energy 原理를 利用하여 變分을 取해 挫屈值를

求할 수 있다.[11]

한편 實際의 船體構造에 있어서 開口를 갖는 平板의 挫屈損傷을 防止하기 위해 適當한 補剛을 하는 것이 普通인데, 開口附近의 補剛이 어느 정도 挫屈에 影響을 미칠 것인가에 대한 研究는 그다지 활발히 이루어지고 있지 않는 것 같다.

本 論文에서는 正方形板의 中心에 圓形開口를 설치해 開口에 接해 stiffener를 板의 兩表面에 對稱으로 熔接한 補剛板과, 圓形開口 주위에 doubler를 兩表面에 對稱으로 熔接한 補剛板에 壓縮荷重을 주어 挫屈值를 有限要素法에 依해 求하고, 이 挫屈值를 基礎로 여러가지 補剛方法에 對하여 가장 効果的인 方法을 提示하고자 한다.

接受日字: 1982年 11月 13日

* 正會員, 서울大學校 工科大學

** 學生會員, 서울大學校 大學院

2. 解析方法

2-1. 概要

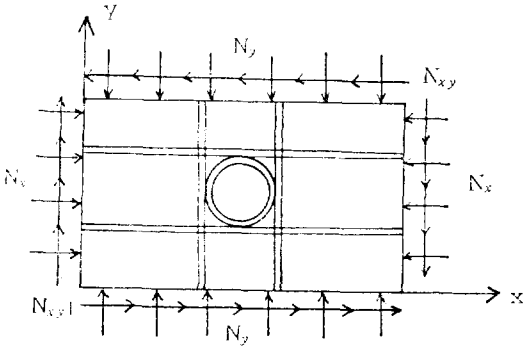


Fig. 1. Inplane load.

Fig. 1에서 보인 것 같이 2方向的 軸荷重과 剪斷荷重을 받는 두께가 비교적 얇은 平板과 stiffener에 對해서 挫屈變形에 다른 Energy를 考察하고 이것을 最小 potential energy 原理를 利用하여 有限要素法으로 定式化하여 挫屈解析을 하였다.

2-2. 有限要素法の 定式化

2-2-1. 平板의 경우

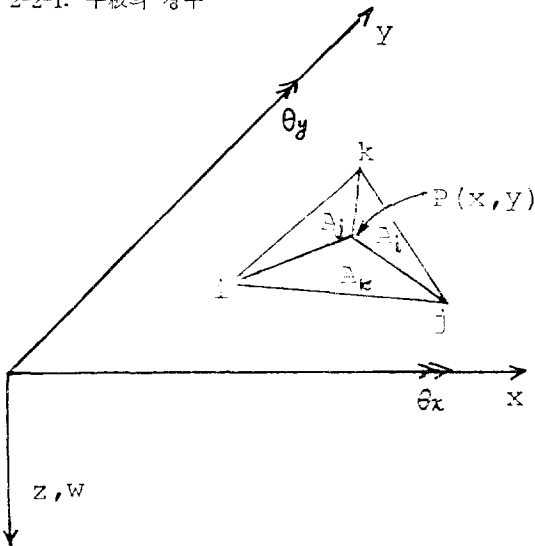


Fig. 2. Displacement of nodes

本 論文에서는 變位函數 \$A(x, y)\$를 Zienkiewicz의 面積函數를 利用한 變位函數를 採用했다.

즉 그림에서 3角形의 面積을 \$A\$로 해

\$L_i = \frac{A_i}{A}, L_j = \frac{A_j}{A}, L_k = \frac{A_k}{A}\$로 定義하면

$$L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A} \tag{1}$$

\$a_i = x_j y_k - x_k y_j, b_i = y_j - y_k, c_i = x_k - x_j\$

이고 처짐 \$w(x, y)\$는 剛體變位 \$w^{rb}(x, y)\$와 要素內變位 \$w^{ss}(x, y)\$의 合으로 나타나

$$w(x, y) = w^{rb}(x, y) + w^{ss}(x, y) \tag{2}$$

$$w^{rb}(x, y) = [L_i \ 0 \ 0 \ L_j \ 0 \ 0 \ L_k \ 0 \ 0] \{\delta\}$$

\$i\$ node에 對한 變位를 行列形態로 나타내면

$$\{\delta\}_i = \{w \ \theta_x \ \theta_y\}^T \tag{3}$$

節點變位로 나타내면

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_i \tag{4}$$

여기서 \$N_i\$는 要素의 形狀函數로서

$$N_{ix} = b_k \left(L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k \right) - b_j \left(L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k \right)$$

$$N_{iy} = c_k \left(L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k \right) - c_j \left(L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k \right) \tag{5}$$

曲率 vector \$\{\chi\}\$를

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} w_{xx} \\ w_{yy} \\ 2w_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \{\delta\}_i = [B]_i \{\delta\}_i \tag{6}$$

로 두면 moment와 曲率사이에는 다음 關係가 된다.

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ & & SYM. & D_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{xx} \\ w_{yy} \\ 2w_{xy} \end{Bmatrix} =$$

$$[D] \{\chi\} = [D][B] \{\delta\}_i \tag{7}$$

균형 剛性行列 \$[KN]\$은 다음과 같이 된다.

$$[KN] = \iint_A [B]^T [D] [B] dx dy \tag{8}$$

傾斜 vector \$\{\theta\}\$를

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} \{\delta_N\} = [G] \{\delta_N\} \text{로 놓으면} \tag{9}$$

初期應力行列 \$[KN']\$은 다음과 같이 된다.

$$[KN'] = \iint_A [G]^T [\sigma] [G] dx dy \tag{10}$$

여기서 \$\sigma\$는 面內에 分布되어 있는 應力으로서 有孔板에서는 圓孔 주위에서 應力集中이 發生되므로 有限要素法에 의해 應力를 求해야 한다.

要素內의 처짐 \$w^{ss}(x, y)\$는

$$w^{ss}(x, y) = [N_{ix} \ N_{iy} \ N_{jx} \ N_{jy} \ N_{kx} \ N_{ky}] [T] \{\delta_N\} \tag{11}$$

으로 나타낼 수 있다.

$$[T] = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} c_i 2A 0 & c_j 0 0 & c_k 0 0 \\ -b_i 0 2A & -b_j 0 0 & -b_k 0 0 \\ c_i 0 0 & c_j 2A 0 & c_k 0 0 \\ -b_i 0 0 & -b_j 0 2A & -b_k 0 0 \\ c_i 0 0 & c_j 0 0 & c_k 2A 0 \\ -b_i 0 0 & -b_j 0 0 & -b_k 0 2A \end{pmatrix} \quad (12)$$

여기서 σ 는 stiffener에 걸려있는 軸應力, A 는 stiffener의 斷面積, $r^2 = \frac{J}{A}$ 이다.

그리고 (14), (15)식을 一般의 座標係에 옮길 때는 座標變換을 行한다.

이것 또 面積座標의 積分에는 다음의 積分公式로 正確한 積分을 求한다.

$$\iint dL_i^p L_j^q L_k^r dx dy dz = \frac{p!q!r!}{(p+q+r+2)!} 2A \quad (13)$$

2-2-2. stiffener의 경우

(5), (11)式에서 밝힌것 같이 平板要素의 처짐은 L_i 의 3次 軸 x, y 의 3次式으로 나타나 있어 stiffener를 節點에서 굽힘 moment와 橫方向의 集中荷重을 받는 stiffener 要素를 생각하면 그 처짐 形態도 역시 3次式으로 나타나기 때문에 굽힘 처짐에 關係서는 平板과 完全히 一致해 變形하는 것이 된다. 그리고 St. venant의 torsion도 고려하면 M 번째 stiffener의 굽힘 剛性行列 $[\bar{K}_{SM}]$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$[\bar{K}_{SM}] = \begin{pmatrix} EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 \\ 0 & GK/L & 0 \\ 6EI/L^2 & 0 & 4EI/L \\ -12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & -GK/L & 0 \\ 6EI/L^2 & 0 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 \\ 0 & -GK/L & 0 \\ -6EI/L^2 & 0 & 3EI/L \\ 12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & GK/L & 0 \\ -6EI/L^2 & 0 & 4EI/L \end{pmatrix} \quad (14)$$

여기서 EI, GK 는 stiffener의 굽힘 剛性, torsion 剛性이고 L 는 stiffener의 길이이다.

本 論文에서는 stiffener는 平板의 兩表面에 對稱으로 붙였기 때문에 偏心應力은 存在하지 않고 다음과 같은 初期應力行列 $[\bar{K}_{SM}']$ 가 얻어진다.

$$[\bar{K}_{SM}'] = \frac{\sigma A}{L} \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{6}{5}r^2 & 0 & 0 & -\frac{6}{5}r^2 & 0 \\ \frac{L}{10} & 0 & \frac{2}{15}L^2 & -\frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} \\ -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} \\ 0 & -\frac{6}{5}r^2 & 0 & 0 & \frac{6}{5}r^2 & 0 \\ -\frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{2}{15}L^2 \end{pmatrix}$$

2-2-3. stiffener가 붙은 平板의 $[K], [K']$ 行列과 固有方程式

以上の 結果에서 N 번째 平板要素의 total potential energy π_N 은

$$\pi_N = \frac{1}{2} \{\delta_N\}^T [K_N + K_N'] \{\delta_N\} \quad (16)$$

M 번째 stiffener要素의 π_M 은

$$\pi_M = \frac{1}{2} \{\delta_M\}^T [K_M + K_M'] \{\delta_M\} \quad (17)$$

으로 나타나기 때문에 補剛板全體의 total potential energy π 는 전부 節點에 對해 (16), (17)式에 對應하는 成分을 더하는 것에 의해

$$\pi = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K + K'] \{\delta\} \quad (18)$$

π 의 $\{\delta\}$ 에 對해서 變分을 取해 0으로 놓으면 다음의 固有方程式이 얻어진다.

$$\delta\pi = [K + K'] \{\delta\} = 0 \quad (19)$$

여기서 求한 固有值中에서 제일 작은 값이 挫屈荷重을 決定한다.

剛性行列 $[K]$ 와 $[K_G]$ 의 Band特性을 고려하면 固有值問題의 解法中에서 Determinant Search Method와 Subspace Iteration Method가 效果的이다. 특히 $[K]$ 와 $[K_G]$ 의 Band幅이 比較的 크기 때문에 Subspace Iteration Method가 效果的이므로 本 論文에서는 Subspace Iteration Method를 使用하여 挫屈係數를 求하였다.

3. 解析例

3-1. Program의 構成

本 論文의 program은 全體적으로 4部分으로 나누어져 있다. 平板과 stiffener의 特性值, 要素의 數, 節點數, 境界條件등의 入力은 Subprogram INPUT에서 하고 Subprogram STIFPB에서는 3角形要素를 使用하여 Subprogram STIFS에서는 stiffener要素를 使用하여 굽힘 剛性行列, 幾何學的 剛性行列을 求하고 이것을 Subprogram ADDBAN에서 Assemble시켜 Subprogram SSPACE에서 Subspace Iteration Method로 풀어서 挫屈係數와 挫屈形狀을 求한다.

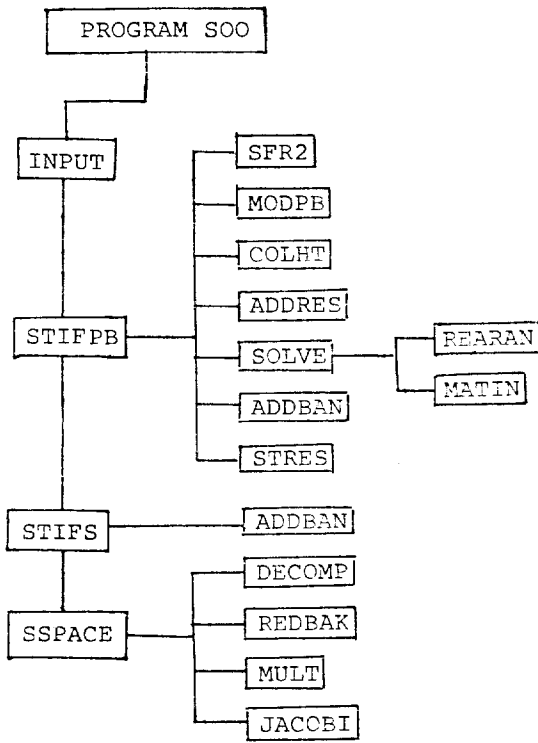


Fig. 3. Structure of program.

3-2. 解析例

Model은 600×600mm의 正方形板으로 板두께는 6.5 mm이다. 形狀은 Fig. 4에서 보인 것 같이 板의 中心에 圓孔이 鑿어져 있고 그 直徑은 160mm와 250mm이다.

Stiffener는 平板과 同一한 材料로 두께는 6.5mm이고 平板의 表面으로부터 13mm씩 앞뒷면에 對稱으로 熔接해 붙인다.

表 1. Model의 種類

	直徑(mm)	stiffener의 길이(mm)
Model -S ₁	160	0
S ₂	160	200
S ₃	160	400
S ₄	160	580
S ₅	160	Double ring
Model -L ₁	250	0
L ₂	250	250
L ₃	250	430
L ₄	250	600
L ₅	250	Double ring

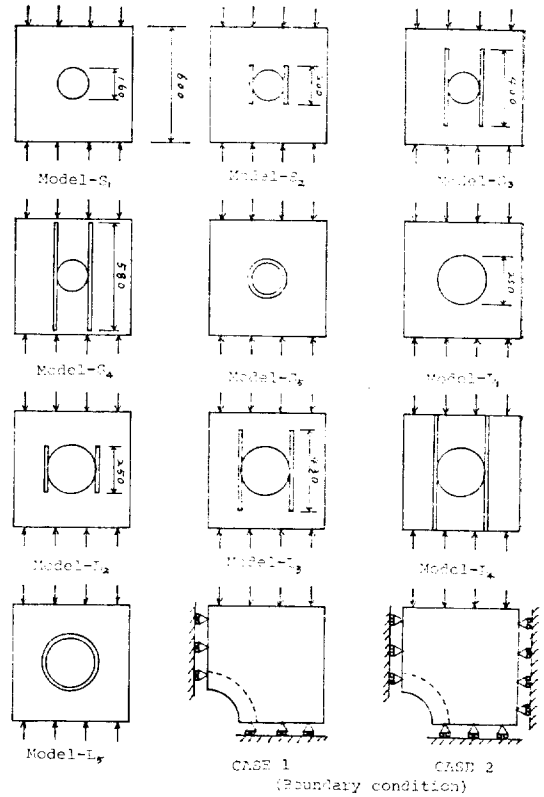


Fig. 4. Shapes of Models

簡單한 例題에서 計算한 結果를 表 2, 表 3에서 보인다. 表 2는 Fig. 5에서 보인 것 같이 單純支持의 正方形板에 1軸壓縮荷重을 加했을 때의 挫屈係數이며 그 正解는 $k=4.0$ 이다.

表 2. 試驗計算(平板)

	mesh	3×3	6×6	12×12
本論文	k	3.571	3.855	3.922
	error(%)	12.3	3.6	1.9
Kapur	k	3.645	3.877	3.997
	error(%)	8.9	2.8	0.58
Timoshenko	k	4.0	4.0	4.0

表 3. 試驗計算(補剛板) ($\frac{EI}{bD}=0.266, \frac{A}{bt}=0.0325$ 인 경우)

	mesh	4×4	8×8	12×12
本論文	k	3.806	4.12	4.19
	error(%)	10.5	3.2	1.7
Timoshenko	k	4.253	4.253	4.253

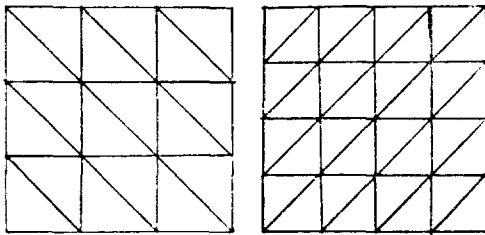


Fig. 5.

Fig. 6.

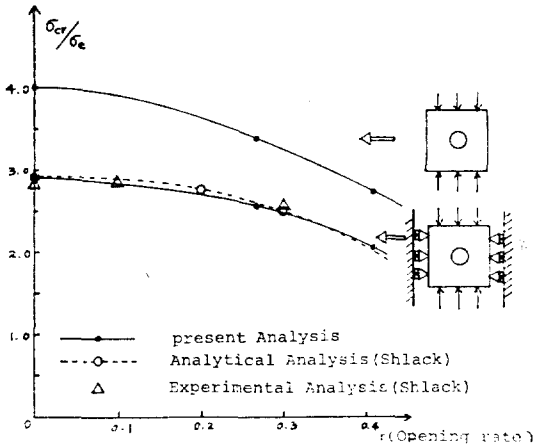


Fig. 7. Comparison of analytical value with experimental value with respect to compressive buckling of square plate with hole.

表 3에서 보인것 같이 1軸壓縮 單純支持의 正方形板으로 Fig. 6에서 보인 것 같은 板의 中心線에 荷重 方向에 stiffener가 들어있는 경우로 이때의 k 는 Timoshenko가 Energy原理에 依해 2次近似解까지 求해 $k=4.253$ 이라고 求하고 있다. Fig. 7에서 보인것 같이 本解法은 shlack의 解析解 및 實驗値와 잘 一致하고 있음을 보여주고 있다.

이 結果에서 本論文의 挫屈計算法은 mesh를 크게 늘려 有孔板을 解析하였으므로 충분히 正解에 수렴하리라고 생각한다.

다음은 Fig. 4에 도시한 各 model에 대하여 壓縮挫屈荷重(係數)을 두가지 境界條件 Case 1 및 Case 2에 대하여 계산한 結果를 表 4에 나타내었다. 挫屈解析時 通常 사용되는 境界條件 Case 1에 비해 하중을 받지 않는 변의 변위를 구속한 Case 2의 경우가 모든 경우에 있어서 實證히 낮은 挫屈強度를 나타내고 있음을 알 수 있다. 따라서, 실제 구조물의 境界조건이 인접한 frame이나 部材의 영향으로 Case 2에 가까운 점을 감안할 때, 종래 Case 1의 境界조건하에 구한 좌굴하중을 실제 구조물에 적용할 때는 주의를 요한다고 하

았다.

또한 圓孔이 작은 Model-S₁에 비해 圓孔이 큰 Model-L₁가 대체로 좌굴강도가 低下되고 있는데, 이는 圓孔이 커짐에 따라 應力集中이 커지고 구조물의 剛性

表 4. Model의 挫屈係數

	挫屈係數(CASE 1)	挫屈係數(CASE 2)
Model-S ₁	3.38	2.56
S ₂	4.21	3.25
S ₃	6.50	5.15
S ₄	7.53	5.98
S ₅	4.79	3.59
Model-L ₁	2.73	2.04
L ₂	4.03	3.05
L ₃	5.88	4.58
L ₄	6.41	5.07
L ₅	5.56	4.05

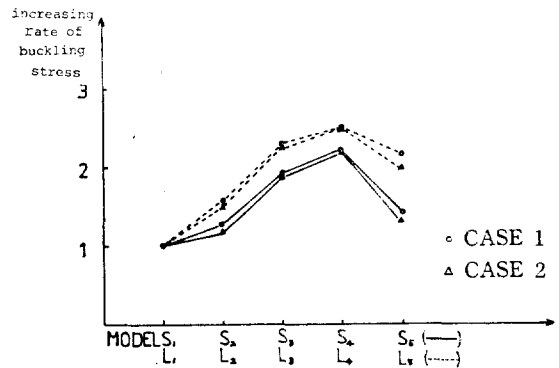


Fig. 8. The increasing rate of buckling stress base on Model S and L

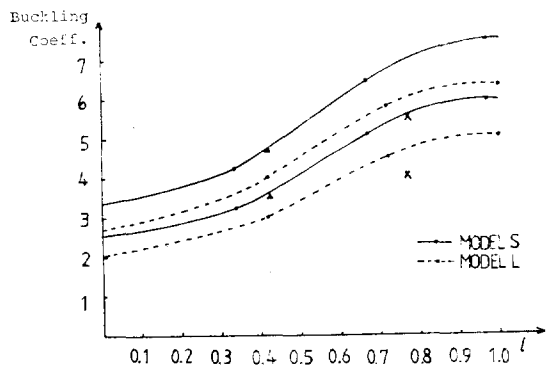


Fig. 9. The buckling coefficient in proportion to $1/b$
 l : length of stiffener
 b : breadth of plate

이 低下되는데 기인한다고 생각된다.

補剛材의 길이가 질수록 좌굴강도가 증가하지만, doubler로 보강하는 것 보다는 같은 길이의 直線補剛材로 補剛(S_3, L_3 Model) 하는 것이 挫屈強度上 有利

하다는 것을 알 수 있다.

이상의 결과에 대해서는 다음에 挫屈時의 補剛板의 buckling mode 및 板內 初期應力의 分布를 검토하여 보다 구체적인 原因을 규명해 보겠다.

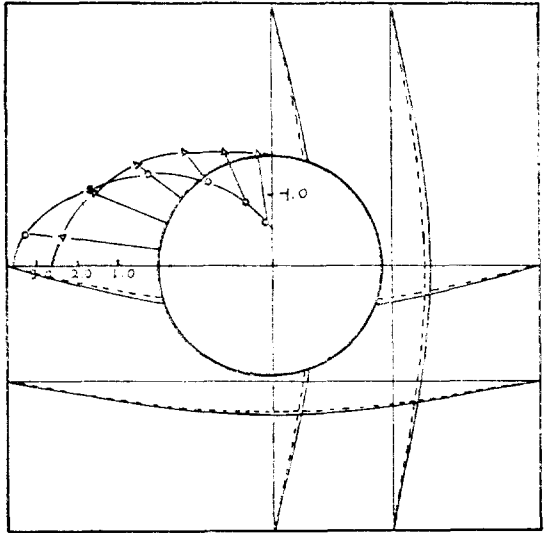
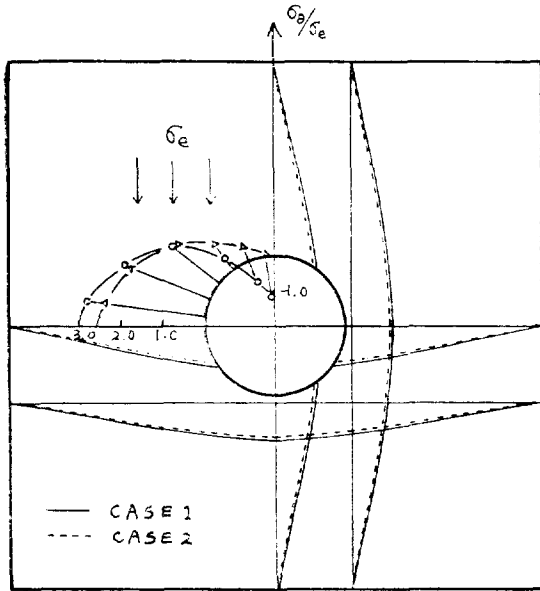


Fig. 10. The buckling mode and stress distribution of model S_1

Fig. 11. The buckling mode and stress distribution of model L_1

- Stress distribution in CASE 1
- △— Stress distribution in CASE 2

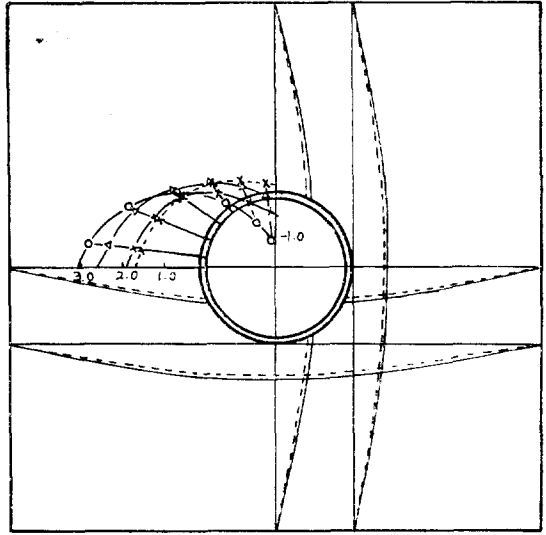
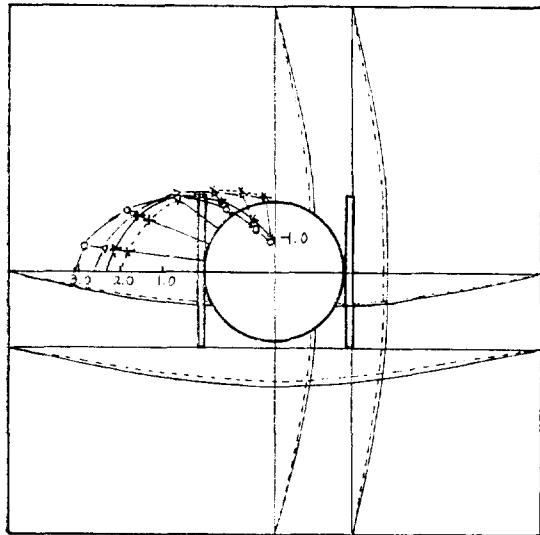


Fig. 12. The buckling mode and stress distribution of model S_2

Fig. 13. The buckling mode and Stress distribution of model S_5

- ×— Stress distribution in CASE 1
- ×·· Stress distribution in CASE 2

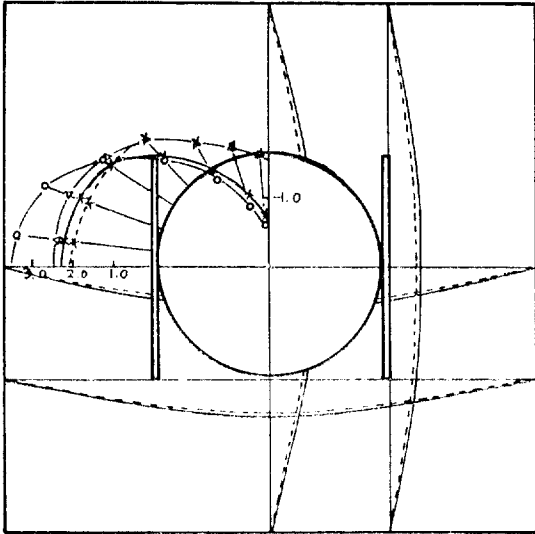


Fig. 14. The buckling mode and Stress distribution of model L_2

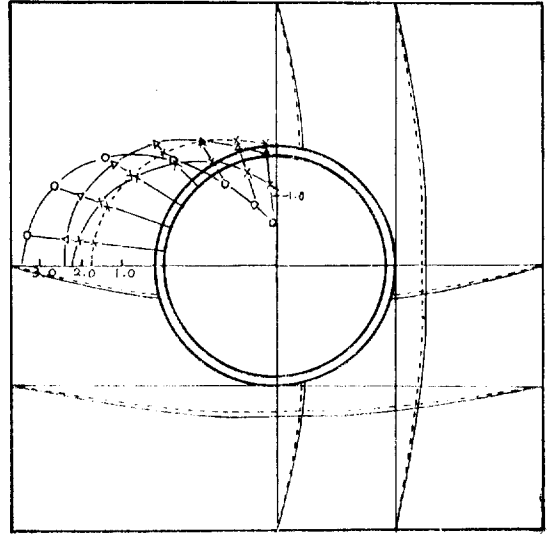


Fig. 15. The buckling mode and Stress distribution of model L_5

4. 考 察

Model S_1 과 Model L_1 에서 구멍크기를 변화시켜 挫屈形狀과 挫屈時의 板內의 應力分布를 比較한 결과 구멍이 커짐에 따라 應力集中이 커져 壓縮應力이 커졌으며 引張應力도 커짐을 보였다. Model S_1 과 S_2 , L_1 과 L_2 를 比較한 결과 구멍 直徑크기의 stiffener를 붙인 效果는 대단히 커 應力集中을 크게 防止하여 壓縮應力은 많이 줄어들었고 引張應力은 다소 감소했지만 그 變化率은 壓縮應力쪽이 컸다. Stiffener의 길이를 길게 늘인 Model S_3 와 S_4 , L_3 와 L_4 는 應力集中이 S_2 , L_2 와 比較하여 다소 커지는 경향을 보였다. 이것은 外部에서의 應力이 stiffener를 타고 들어와 커진 것이라 여겨진다. Model S_5 와 다른 S , L_5 와 다른 L 과 比較해 볼 때 S_5 와 L_5 는 應力集中이 많이 줄어들어 壓縮應力이 작아졌지만 引張應力 또한 많이 줄어들었다. 그 變化率은 引張應力쪽이 컸다. CASE 1과 CASE 2도 이와 거의 마찬가지였다. 이것을 기초로 壓縮應力과 引張應力에 따른 각 Model의 挫屈強度를 考察해 볼 때 引張應力の 增加는 挫屈強度를 上昇시켰으며, 壓縮應力の 增加는 挫屈強度를 低下시켰다.

다음 Model S_1 에서 stiffener의 snip效果를 보기 위해 plate幅보다 약간 작은 길이를 補剛시켰는데 外部의 應力을 받는 plate幅만큼 補剛시킨 경우나 별 차이가 없었다.

Doubler의 길이 만큼의 直線 stiffener를 붙인 경우와 doubler를 붙인 Model S_5 와 L_5 를 比較했을 때, CASE 1과 CASE 2 모두 S_5 와 L_5 의 挫屈係數가 같은 길이의 stiffener를 붙인 경우보다 적게 나왔다. Fig. 9에서 Δ 표는 doubler를 붙인 S_5 의 CASE 1과 CASE 2에 對한 挫屈係數이며 \times 표는 doubler를 붙인 L_5 의 CASE 1과 CASE 2에 對한 挫屈係數이다.

挫屈應力上昇率은 stiffener를 붙이지 않은 Model S_1 과 L_1 의 挫屈應力을 1로 하여 다른 Model들의 挫屈應力을 比較했는데 Model S 계열과 L 계열은 거의 비슷한 경향을 나타내었다.

CASE 1과 CASE 2를 比較해 본 결과 CASE 1은 應力集中이 CASE 2보다 커 壓縮應力이 컸지만 引張應力 또한 컸다. CASE 2는 荷重의 垂直方向에도 구속을 주어서 수직 方向으로의 壓縮應力이 전체적인 引張應力을 防止하는 결과를 초래했다.

그 變化率은 引張應力쪽이 커서 CASE 1보다 낮은 挫屈強度를 나타내었다.

結論으로 孔주위에서의 應力集中을 防止하기 위해 補剛을 해야 하는데 stiffener를 붙이는 경우와 doubler를 붙이는 경우 모두 應力集中을 크게 防止하여 壓縮應力이 적게 되었으며 引張應力도 많이 감소하는 경향을 보였다. 壓縮應力の 감소율과 引張應力の 감소율을 比較했을 때 引張應力の 감소율이 doubler를 붙인 경우가 더 크게 나타나 挫屈強度를 상대적으로 低下시키는 要因이 되고 있다. 뿐만 아니라 補剛板의 굽힘강성

을 비교하면, doubler에 비해 같은 길이의 직선 stiffener에 의한 것이 보다 剛性이 증가될 것이므로 doubler를 붙이는 경우가 挫屈強度가 상대적으로 낮다는 점을 알 수 있다. 따라서 보다 經濟的이고 效果的인 補剛方法은 直線 stiffener를 붙이는 경우라고 할 수 있다.

5. 結 言

本 論文에서 有孔板과 補剛된 有孔板에 對해서 挫屈解析을 하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 孔의 直徑이 커짐에 따라 挫屈係數는 작아진다.

(2) 境界條件에 따른 挫屈係數는 달라진다.

즉, 荷重方向에만 面內구속을 시켰을 경우(CASE 1)와 荷重方向의 수직 方向에도 面內구속을 시켰을 경우(CASE 2)를 比較해보면 CASE 1이 CASE 2보다 挫屈係數가 크게 된다. 이것은 CASE 1이 CASE 2에 비해 孔주위에서의 引張應力의 增加率이 壓縮應力의 減少率보다 크기 때문이다.

(3) 一般의인 平板과는 달리 有孔板에서는 孔주위에서 應力集中이 發生하므로 初期應力を 面內 境界條件을 주어 求해야 한다.

(4) Stiffener를 길게 補剛시키면 挫屈係數는 크게 된다.

(5) doubler를 붙여 補剛한 Model S₅는 挫屈係數가 Model S₂와 S₃사이에 있었고 Model L₅는 Model L₂와 L₃사이에 있었으며 doubler를 붙여 補剛한 Model과 같은 길이의 Stiffener를 붙인 경우와 比較해 볼 때 Fig. 9에서와 같이 더 낮은 挫屈強度를 나타내었다.

(6) 따라서 效果的인 補剛方法은 熔接이나 가공하기도 쉽고 挫屈強度도 큰 stiffener를 붙여 補剛하는 方法이다.

本 論文은 韓國科學財團의 1982년도 研究支援事業의 一環으로 수행되었으며, 本 研究遂行에 적절한 助言과

協助를 해주신 關係諸氏에게 심심한 謝意를 표한다.

參 考 文 獻

- [1] S.P. Timoshenko and J.M. Gere "Theory of Elastic Stability" 2nd ed. McGraw-Hill Ltd. 1941.
- [2] C.D. Dym and I.H. Shames "Solid Mechanics, a Variational Approach" McGraw-Hill Ltd. 1973.
- [3] Szilard "Theory and Analysis of Plates" Prentice-Hall Inc. 1974.
- [4] Klaus-Jürgen Bathe and Edward L. Wilson "Numerical Method in Finite Element Analysis" Prentice-Hall Inc. 1976.
- [5] E. Hinton and D.R.J. Owen "Finite Element Programming" Academic Press 1977.
- [6] K.C. Rockey and H.R. Evans "The Finite Element Method" Granada Publishing Ltd. 1975.
- [7] Kanwar K. Kapur and B.J. Hartz "Stability of Plates using the Finite Element Method" ASCE. EM. 1966.
- [8] Takeshi and Nagano "Buckling Strength of a Web panel with Holes" 石川島播磨技報第17卷第4號
- [9] 吉識雅夫 外 "有孔板의 挫屈強度에 對하여" 日本造船學會論文集 Vol. 122(昭和 42年 12月)
- [10] 藤田諱 外 "有孔板의 挫屈強度에 對하여" 日本造船學會論文集 Vol. 126(昭和 44年 12月)
- [11] 藤田諱 外 "有孔板의 挫屈強度에 對하여" 日本造船學會論文集 Vol. 127(昭和 45年 6月)
- [12] 양 박달치 "補剛板의 挫屈解析" 工學碩士學位論文 서울大學校 1981.