

## 論 文

大韓造船學會誌  
第19卷 第2號 1982年 6月  
Journal of the Society of  
Naval Architects of Korea  
Vol. 19, No. 2, June 1982

### 自由表面問題解析을 위한 Rankine湧出點 分布法

—放射條件과 有限分布의 영향—

李 昶 燮\* · 梁 承 一\* · 姜 昌 求\*

On the Method of Rankine Source Distribution for Free Surface Flow  
Problem: Radiation Condition and Influence of Finite Distribution

by

Chang-Sup Lee\* Seung-Il Yang\*

and

Chang-Gu Kang\*

#### Abstract

The method of Rankine source distribution is emerging as a powerful yet simple alternative for the solution of complicated free surface problems. But it has been uncertain whether the radiation condition could be satisfied exactly by distributing the simple sources on the free surface only.

In this paper, it is proved rigorously that the Rankine sources, whose intensities are varying sinusoidally along the axis satisfying the free surface boundary condition, generate the radiation waves both in the infinite and finite-depth flows. A formula is derived to give the upper and lower bounds of the errors in the induced velocity computation that will be introduced by truncating the extent of source distribution on the free surface. Since the truncation is inevitable in the numerical analysis, this formula may be used as a criterion to limit the position of the field points, where velocity computation is made, away from the truncation boundary. A typical analysis shows that the maximum error will be 3.4 percent of the exact induced velocity when the field point is on the free surface two wave lengths away from the truncation boundary.

#### 記 號

$a$  : 特性長 (characteristic length)  
 $g$  : 중력가속도  
 $h$  : 수심  
 $k$  : 波數  
 $P(x, y)$  : 임의의 점  $(x, y)$   
 $r_1$  :  $-k(\Delta y - y) - ik(x_r - x)$   
 $r_2$  :  $k(\Delta y - y) - ik(x_r - x)$   
 $t$  : 시간

$U$  : 均일속도  
 $u, v$  : 교란속도  
 $x, y$  : 좌표계  
 $x_r$  : 용출점 분포를 단절 한  $x$ 좌표  
 $\Delta x$  : 자유표면 위에 분포된 용출점 요소의 길이  
 $\Delta y$  : 자유표면 위에 분포된 용출점의 좌표  
 $\sigma$  : 용출점의 세기  
 $\sigma_0$  : 용출점 세기의 진폭  
 $\theta$  : 용출점 분포의 위상각  
 $\phi$  : 속도포텐셜

接受日字: 1982年 5月 28日

\* 正會員, 한국기계연구소 대덕선박분소

- $\eta$  : 자유 표면 높이
- $\lambda$  : 파장
- $\Gamma$  : 보오텍스 세기
- $\epsilon$  : 단절 오차(truncation error)
- $E_1(x)$  지수 적분(Exponential Integral)

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad |\arg z| < \pi$$

### 1. 序 言

自由表面이 존재하는 유체역학 문제를 해석하기 위하여 종래에 사용되어 오던 Kelvin용출점(source) 분포법 외에 Rankine 용출점 분포법이 사용되기 시작하고 있다. 前者는 용출점 포텐셜(potential)이 자유표면 조건을 이미 만족하고 있어 물체표면에만 용출점을 분포함으로써 적분방정식을 유도하지만, 계산시간이 길고 비선형 문제를 다룰 수 없다는 단점을 갖고 있다.

後者は 비선형문제나 복잡한 3차원 문제를 해석하는데 있어서 前者보다 그 가능성이 크지만, 일부 경계에서의 경계조건들을 무시함으로써 解의 신빙성을 확보치 못하고 있다. Dawson[1]과 Mori & Nishimoto [2]는 有限差分연산자(finite difference operator)를 사용하여, 먼저 2차원 문제를 다룬 후에 3차원 문제로 확장했다. 그렇지만, 이들의 방법은 어떤 특정한 연산자(즉, 3차 미분항을 제외한 4點 연산자)를 사용할 경우에만 좋은 결과를 주고, 그 외에는 波가 下流에서 減衰하거나 發散(diverging)하는 경향을 보이는 문제점을 안고 있다.

本報에서는 2차원 선형자유표면조건을 만족하기 위해서  $x$ 축을 따라서 세기가 調和的(sinusoidal)으로 변하는 Rankine 용출점(source)의 분포가 무한수심이나 유한수심에서 放射波(radiation wave)를 발생시킨다는 것을 보여준다. 또한 실제 문제의 경우 자유표면 위에 분포된 용출점을 무한대의 하류까지 분포하지 못하고 斷切(truncation)함으로써 기인하는 유기속도(induced velocity)의 계산상 誤差의 범위를 계산하는 공식이 유도된다. 하류에서의 단절은 수치해석상 불가피하기 때문에 이 공식은 단절경계의 위치를 선정하는 기준으로 사용될 수 있다. 유기속도가 계산되는 점이 단절경계로부터 2파장 떨어진 자유표면상에 있을 경우 유기속도의 최대오차는 엄밀해의 3.4%에 그친다는 것을 보여준다.

본보에서는 2차원 문제만을 다루었으나, 3차원문제에서도 이와 같은 방법이 적용될 수 있을 것으로 예상된다.

### 2. Rankine湧出點 분포에 의한 放射派의 形成

자유표면 조건을 만족하는 Rankine용출점의 분포로부터 放射波(radiation wave)를 얻음으로써 Rankine 용출점 분포법의 다당성을 확인하고자 한다.

먼저, 선형자유표면 조건을 고려해 보자,

$$\phi_{xx} + k\phi_y = 0, \quad y=0 \tag{1}$$

여기서  $k$ 는 무한수심의 경우  $k = \frac{g}{U^2}$  이고, 유한수심의 경우 방정식  $\frac{U^2}{g} = \tanh kh/k$ 을 만족하는 根(root)이다.

식(1)로부터  $\phi$ 는  $x$ 에 관한 調和函數(sinusoidal function)로 나타내진다는 것을 알 수 있다[3]. 따라서 자유표면 조건을 만족하기 위한 용출점의 분포도  $x$ 에 관해서 調和的(즉,  $\sigma(x) = \sigma_0 \cos(kx + \theta)$ )이어야 한다 참고문헌 [4]의 문제해석 과정에서 자유표면 조건을 만족하는 자유표면위의 집중 용출점들의 세기가 극부교란이 사라진 하류에서는 조화적으로 변하는 것을 관찰한 바 있다. 그러나 이 문헌에서는 放射條件에 대한 명확한 언급이 없었기에 다음에서 이를 증명하고자 한다.

#### 2.1. 無限水深의 경우

먼저 무한수심의 경우를 고려하자. 자유표면에서 위로  $dy$ 만큼 떨어진 곳에 세기가 調和的(sinusoidal)으로 변하는 연속분포의 용출점들이 Fig. 1과 같이 속도  $-U$ 로 전진한다면  $\sigma$ 는 다음과 같다.

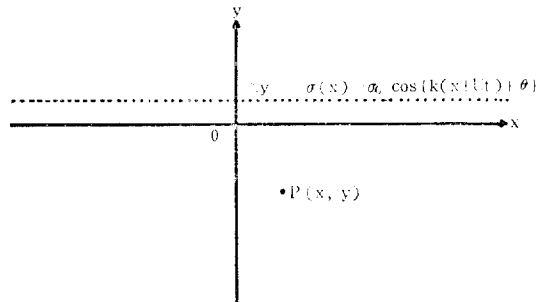


Fig. 1. Sinusoidal Rankine Source Distribution in Case of Infinite Depth.

$$\sigma(x, t) = \sigma_0 \cos\{k(x + Ut) + \theta\} \tag{2}$$

여기서,  $\theta$ 는 位相角인데,  $\theta=0$ 으로 놓아도 일반성을 잃지 않는다. 식(2)로 표시되는 용출점이  $x = -\infty$ 에서,  $x = \infty$ 까지 분포되어 있을 때, 이들에 의해서 점  $P(x, y)$ 에 유기되는 교란속도  $u$ 는 다음과 같다.

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0 \cos k(\xi + Ut) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - dy)^2} d\xi \tag{3}$$

식 (3)은 약간의 조작을 통하여 다음과 같이 간단히 표시된다.

$$u(x, y, t) = \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin k\xi}{\xi^2 + (y-dy)^2} d\xi \sin k(x+Ut) \quad (4)$$

윗 식중에서 적분항은 附錄 1을 참고하면 아주 간단한 식으로 표시된다.

$$u(x, y, t) = \left(\frac{\sigma_0}{2} e^{-kdy}\right) e^{ky} \sin k(x+Ut) \quad (5)$$

y방향 교란속도 v도 이와 비슷한 방법으로 구한다. 즉,

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0 \cos k(\xi+Ut) \frac{y-dy}{(x-\xi)^2 + (y-dy)^2} d\xi \quad (6)$$

식 (6)도 약간의 조작후에 附錄 1을 참고하면 아주 간단한 식으로 표시된다.

$$v(x, y, t) = \left(-\frac{\sigma_0}{2} e^{-kdy}\right) e^{ky} \cos k(x+Ut) \quad (7)$$

식 (5)와 (7)로부터 속도포텐셜  $\phi$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\phi(x, y, t) = \left(-\frac{\sigma_0}{2k} e^{-kdy}\right) e^{ky} \cos k(x+Ut) \quad (8)$$

윗 식은 前進波(progressive waves)의 속도포텐셜 [3]과 완전히 같은 형태로, 조화적으로 분포된 Rankine 용출점으로 전진파를 만들어 낼 수 있는 것을 뜻한다.

식 (5)로 구해진 교란속도 u로부터 자유표면 조건을 이용하여 자유표면 높이  $\eta$ 를 구하면,

$$\eta(x, t) = -\frac{U}{g} \cdot \left(-\frac{\sigma_0}{2} e^{-kdy}\right) \sin k(x+Ut) \quad (9)$$

윗식은 자유표면 위에 분포된 용출점의 y좌표와 용출점세기의 진폭으로부터 자유표면의 높이를 직접 구할 수 있다는 것을 보여준다.

식(8)의 방사파의 속도 포텐셜  $\phi$ 는 유기속도에 주안점을 두었기 때문에 용출점의 유기속도로부터 유도되었다. 그렇지만 부록 2에서 보는 바와 같이 방사파의 속도포텐셜  $\phi$ 는 용출점의 포텐셜로부터 직접 구할 수도 있다.

### 2.2. 有限水深의 경우

유한수심에 대한 교란 속도는 Fig. 2에서 보는바와 같이 무한 수심에 대한 결과를 중첩함으로써 얻어진다.

식 (5), (7)과 식 (5), (7)에서  $(dy-y)$  대신  $\{y-(-2h-dy)\}$ 를 대입한 결과를 중첩하면 유한수심에 대한 교란 속도가 쉽게 얻어진다. 단, 이때의  $k$ 는  $\frac{U^2}{g} = \tanh kh/k$  관계를 만족하는  $k$ 이다.

$$u(x, y, t) = \sigma_0 e^{-k(dy+h)} \sinh k(y+h) \cos k(x+Ut)$$

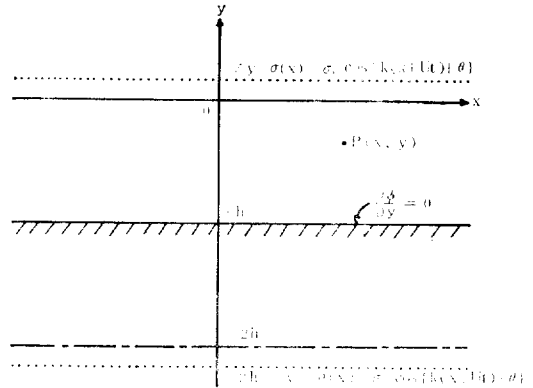


Fig. 2. Sinusoidal Rankine Source Distribution in Case of Finite Depth.

$$v(x, y, t) = -\sigma_0 e^{-k(dy+h)} \sinh k(y+h) \cos k(x+Ut) \quad (10)$$

식(10)을 만족하는 속도포텐셜을 구하면 다음과 같다.

$$\phi(x, y, t) = \frac{-\sigma_0 e^{-k(dy+h)}}{k} \cosh k(y+h) \cos k(x+Ut) \quad (11)$$

이 식 또한 유한수심에서의 전진파의 속도포텐셜 [3]의 형태와 일치한다.

또, 교란속도 u로부터 자유표면 높이  $\eta$ 를 구하면 다음과 같이 된다.

$$\eta(x, t) = -\frac{U}{g} \sigma_0 e^{-k(dy+h)} \cosh kh \sin k(x+Ut) \quad (12)$$

식(12)는 무한수심에 대한 식 (9)에 비해서 수심 h에 의한 영향만 더 고려되어 있다.

### 3. 斷切誤差(truncation error)

제 2장에서 Rankine용출점을  $-\infty$ 에서  $+\infty$ 까지調和的으로 분포함으로써 放射波를 얻을 수 있음을 보여주었다.

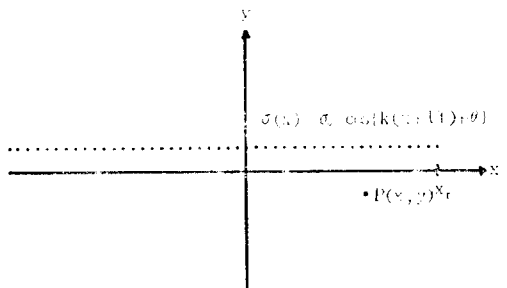


Fig. 3. Sinusoidal Rankine Source Distribution Truncated at  $x_r$ .

본 장에서는 Fig. 3과 같이 Rankine용출점을  $x_r$ 에서 斷切(truncation) (즉,  $-\infty$ 에서  $x_r$ 까지 분포)함으로써 점  $P(x, y)$ 에서 발생하는 斷切誤差(truncation error)에 관하여 조사해 보기로 한다.

제 2 장에서와 같은 방법을 사용하여 교란속도  $u, v$ 를 구한다.

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_r} \sigma_0 \cos \{k(\xi + Ut) + \theta\} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - Vy)^2} d\xi \quad (13)$$

여기서 속도  $-U$ 를 갖는 운동좌표계를 택하면  $u$ 는 시간  $t$ 에 무관해진다.

$$u(x, y) = \frac{\sigma_0}{2\pi} \int_{x-x_r}^{\infty} \cos(\theta - k\xi) \frac{\xi}{\xi^2 + (y - Vy)^2} d\xi$$

여기서  $x \leq x_r$ 인 범위만을 고려한다면, 부록 1의 적분공식을 이용하여  $u$ 를 다음과 같이 간단한 형태로 표시한다.

$$u(x, y) = \frac{\sigma_0}{4\pi} \{e^{k(y-dy)} ReE_1(r_1) + e^{k(dy-y)} ReE_1(r_2)\} \cos\theta + \frac{\sigma_0}{2} e^{-k(dy-y)} \sin\theta + \frac{\sigma_0}{4\pi} \{e^{k(y-dy)} ImE_1(r_1) + e^{k(dy-y)} ImE_1(r_2)\} \sin\theta \quad (14)$$

여기서,  $E_1$ 은 지수적분 (exponential integral)을 표시하며,

$$r_1 = -k(dy-y) - ik(x_r-x) \\ r_2 = k(dy-y) - ik(x_r-x)$$

이다.

조화 Rankine 용출점을  $x_r$ 에서 단절함으로써 발생하는  $u$ 의 단절오차는  $u|_{x_r=x_r} - u|_{x_r=\infty}$ 이다.

$$u|_{x_r=x_r} - u|_{x_r=\infty} = \frac{\sigma_0}{4\pi} \{e^{k(y-dy)} \{ReE_1(r_1) \cos\theta + ImE_1(r_1) \sin\theta\} + e^{k(dy-y)} \{ReE_1(r_2) \cos\theta + ImE_1(r_2) \sin\theta\}\} \quad (15)$$

$u$ 의 단절오차를 구하는 것과 같은 방법으로  $v$ 의 단절오차를 구한다.

$$v(x, y) = \frac{\sigma_0}{4\pi} \{-e^{k(y-dy)} ImE_1(r_1) + e^{k(dy-y)} ImE_1(r_2)\} \cos\theta - \frac{\sigma_0}{2} e^{-k(dy-y)} \cos\theta + \frac{\sigma_0}{4\pi} \{e^{k(y-dy)} ReE_1(r_1)$$

$$- e^{k(dy-y)} ReE_1(r_2)\} \sin\theta \quad (16)$$

식(16)으로부터  $v$ 에 대한 오차를 구하면,

$$v|_{x_r=x_r} - v|_{x_r=\infty} = \frac{\sigma_0}{4\pi} \{e^{k(y-dy)} \{-ImE_1(r_1) \cos\theta + ReE_1(r_1) \sin\theta\} + e^{k(dy-y)} \{ImE_1(r_2) \cos\theta - ReE_1(r_2) \sin\theta\}\} \quad (17)$$

여기서 유기속도(induced velocity)에 대한 단절오차  $\epsilon$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\epsilon = \frac{\sqrt{(u|_{x_r=x_r} - u|_{x_r=\infty})^2 + (v|_{x_r=x_r} - v|_{x_r=\infty})^2}}{\sqrt{(u|_{x_r=\infty}^2 + v|_{x_r=\infty}^2)}} \quad (18)$$

식 (5), (7), (15), (17)을 이용하여  $\epsilon$ 를 구하면 다음 식과 같이 된다.

$$\epsilon = \frac{e^{kdy}}{2\pi} \{e^{2k(y-dy)} |E_1(r_1)|^2 + e^{2k(dy-y)} |E_1(r_2)|^2 + 2|E_1(r_1)||E_1(r_2)| \cos(2\theta + \theta')\}^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

여기서

$$\theta' = -\tan^{-1} \frac{ReE_1(r_1) ImE_1(r_2) + ReE_1(r_2) ImE_1(r_1)}{ReE_1(r_1) ReE_1(r_2) - ImE_1(r_1) ImE_1(r_2)}$$

식 (19)을 살펴보면  $\epsilon$ 가 위상각  $\theta$ 에 따라서 변함을 알 수 있다.  $\epsilon$ 는  $2\theta + \theta' = \pi$ 일때 최소이고,  $2\theta + \theta' = 0$ 일때 최대이다.

즉,

$$\frac{e^{kdy}}{2\pi} |e^{k(y-dy)} |E_1(r_1)| - e^{k(dy-y)} |E_1(r_2)|| \leq \epsilon \leq \frac{e^{kdy}}{2\pi} \{e^{k(y-dy)} |E_1(r_1)| + e^{k(dy-y)} |E_1(r_2)|\} \quad (20)$$

### 4. 考 察

#### 4.1. 放射條件 및 斷切誤差

지금까지 Rankine용출점을 조화적으로 분포함으로써 線型放射波를 얻을 수 있다는 것을 보여주었다.

이는 자유표면 유동 문제를 해석하는데 있어서 Rankine용출점 분포법이 단지 技法에 그치지 않고 물리적인 근거를 갖는다는 것을 보여준다.

그렇지만, 문제의 해석을 위해서 하류에서의 단절로 인한 교란속도의 단절오차를 주의깊게 다루어야 한다. 이 오차는 Fig. 4에서 보는바와 같이 下流의 放射境界 (radiation boundary)를 어떻게 선택하느냐에 따라서 마지막 제어점에서의 오차의 변화를 보여준다. 이 그림에서는 하류에서의 최대오차와 최소오차를 보여주고 있으며, Fig. 5에서는 Rankine용출점 세기의 위상에 따른 오차의 변화를 보여주고 있다.

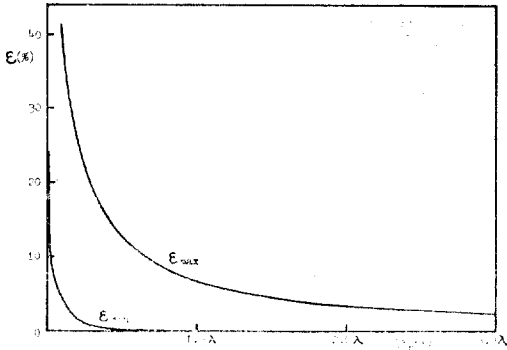


Fig. 4. The Upper and Lower Bounds of the Error  $\epsilon$  in the Induced Velocity Computation with Variation of the Position of the Field Points away from the Truncation Boundary ( $\Delta y = \lambda/20$ ,  $y=0$ ).

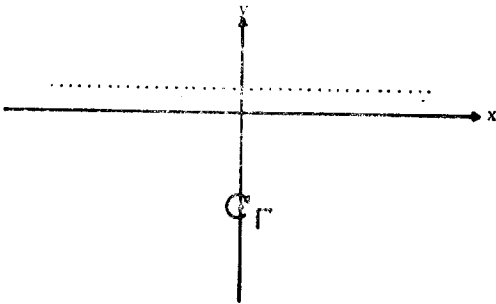


Fig. 5. Variation of Error  $\epsilon$  with Phase Angle  $\theta$ .

예를 들어 Rankine용출점의 경계와 하류경계가 일치할 경우 하류경계에서의 교란속도의 오차는 최소 24%, 최대 76%에 이른다는 것을 보여준다.

즉, 이러한 방법으로는 좋은 결과를 얻을 수 없다는 것을 미리 예견할 수 있다.

4.2. 1點보오텍스(vortex)에 대한 계산에

참고문헌[4]에서는 Fig.6에서 보는 바와 같이 1點보오텍스에 대한 자유표면 문제를 해석한 바 있다. 이 문헌[4]에서는 Rankine용출점을 하류 경계 뒤로 2과장 만큼 더 분포하는 방법을 사용했다. 이 방법에 대한 오차범위를 Fig. 4로부터 조사하던 교란속도의 오차범위가 가장 큰 하류경계절에서도 최소오차 0.0019% 최대오차 3.4%밖에 안된다. 하류 경계절보다 상류에서의 오차는 이보다 훨씬 적기 때문에 전체적인 解의 오차범위는 하류경계절에서의 최대오차 3.4%보다 훨씬 적어질 것이 분명하다. 즉, 이 방법을 사용하면 좋은 결과를 얻을 수 있다는 것을 예견할 수 있다.

이를 확인하기 위해서 이 방법에 의한 결과와 식(9)로부터 계산한 결과를 Table 1에서 비교하고 있다.

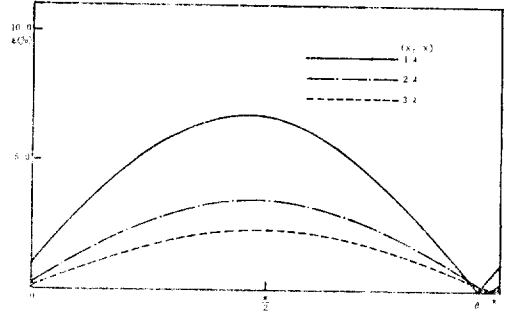


Fig. 6. Free Surface Flow Problem in Case of Submerged 1 Point Vortex [4].

Table 1. Comparison of the Free Surface Elevations  $\eta_{max}$ . [4] with Those Calculated by Equation(9) in Case of 1 Point Vortex( $\Gamma/Ua=1.6965$ )

$\Delta y/\Delta x$	$\eta_{max}[4]$	$\eta_0(9)$	Relative Error(%)
0.5	0.7803	0.7761	0.54
1.0	0.7854	0.7869	0.20
1.5	0.7796	0.7830	0.44
2.0	0.7818	0.7817	0.01

이 표를 보면 상대오차가 0.5%이하임을 알 수 있다. 이 결과로부터 Rankine 용출점을 하류경계 뒤로 2과장만큼 더 반복 분포하는 Rankine용출점 분포방법은 정확한 解를 준다고 확신할 수 있다.

이상의 고찰에서 다루어진 문제는 2次元에 국한되어 왔으나, 3次元에서도 거의 같은 경향을 보일 것으로 예측된다.

5. 結 論

이상의 고찰로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 조파 Rankine용출점을 분포함으로써 放射波(radiation wave)를 얻을 수 있다. 즉, Rankine용출점 분포법으로 放射條件(radiation condition)을 만족시킬 수 있다.

2. 단절오차(truncation error)에 대한 해석으로부터 Rankine용출점 분포법에 대한 해석방법을 제시했다.

3. 하류경계 뒤에 2과장 거리에 용출점을 반복 분포하는 방법[4]의 오차가 아주 적음을 확인했다.

4. 하류 경계 뒤에 용출점을 반복 분포하는 방법은 行列(matrix) 크기의 증가없이 가능하며, 非線型자유표면 문제 해석에의 적용이 용이할 것이다.

이윽고 이러한 해석방법은 3次元문제로의 확장이 가

능할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Dawson, C.W.: "A Practical Computer Method for Solving Ship-Wave Problems", 2nd International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, 1977.
- [2] Mori, K. and Nishimtoo, H.: "On Numerical Techniques of the Rankine Source Method", Proc. of the Continued Workshop on Ship Wave-Resistance Computations, 1980.
- [3] Stoker, J.J.: "Water Wave", Interscience Publishers, Inc., 1957.
- [4] 姜昌求 · 梁承一 · 李昶燮; "集中特異點 分布法을 이용한 線型自由表面問題의 解析", 大韓造船學會誌 第18卷 第3號, 1981.
- [5] Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: "Handbook of Mathematical Functions", National Bureau of Standards, 1964.

부 록 1

본문에서 취급하고 있는 적분들을 고려하기 위해서 다음과 같은 적분들을 고려하자.

참고문헌[5]로부터

$$\int_c^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2+x^2} dx = \frac{i}{2a} [-e^{-a} E_1(-a-ic) + e^a E_1(a-ic)] \quad (A-1)$$

여기서,  $E_1$ 은 지수적분(exponential integral)인데, 이의 정의는 다음과 같다. [5]

$$E_1(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad |\arg z| < \pi \quad (A-2)$$

식 (A-1)을 실수부와 허수부로 나누면 다음과 같이 된다.

$$\int_c^{\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2a} \text{Im} [e^{-a} E_1(-a-ic) - e^a E_1(a-ic)] \quad (A-3)$$

$$\int_c^{\infty} \frac{\sin x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2a} \text{Re} [-e^{-a} E_1(-a-ic) + e^a E_1(a-ic)] \quad (A-4)$$

윗 식에서  $c=0$ 으로 놓으면 다음과 같이 간단히 표시된다.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a} \quad (A-5)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2a} [e^{-a} E_1(a) + e^a E_1(a)] \quad (A-6)$$

$$\text{여기서, } Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

또한 다음과 같은 형태의 적분을 고려해 보자.

$$\int_c^{\infty} \frac{x e^{ix}}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} [e^{-a} E_1(-a-ic) + e^a E_1(a-ic)] \quad (A-7)$$

식(A-7)을 실수부와 허수부로 나누면 다음과 같이 된다.

$$\int_c^{\infty} \frac{x \cos x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \text{Re} [e^{-a} E_1(-a-ic) + e^a E_1(a-ic)] \quad (A-8)$$

$$\int_c^{\infty} \frac{x \sin x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \text{Im} [e^{-a} E_1(-a-ic) + e^a E_1(a-ic)] \quad (A-9)$$

윗 식에서  $c=0$ 인 경우를 생각하면, 다음과 같이 간단히 표시된다.

$$\int_0^{\infty} \frac{x \cos x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} [-e^{-a} Ei(a) + e^a E_1(a)] \quad (A-10)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad (A-11)$$

부 록 2

본 문에서 Rankine용출점의 조화적인 연속분포로부터 방사파의 속도포텐셜  $\phi$ 를 구할 때는 교란속도  $u, v$ 를 먼저 구한 다음 이들로부터  $\phi$ 를 구했다. 이는 자유 표면문제의 단절 오차등을 해석할 때 교란 속도에 관심이 있었기 때문이다. 그렇지만 속도포텐셜  $\phi$ 는 다음과 같이 간단히 직접 구할 수도 있다.

Fig. 1과 같이 분포된 Rankine용출 점에 의한 속도포텐셜은 다음과 같은 적분식으로 표시될 수 있다.

$$\phi(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0 \cos k(\xi + Ut) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-Dy)^2} d\xi \quad (A-12)$$

윗 식을 부분적분하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\phi(x, y, t) = -\frac{\sigma_0}{\pi k} \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin k\xi}{\xi^2 + (y-Dy)^2} d\xi \cos k(x + Ut) \quad (A-13)$$

부록 1의 식(A-11)을 이용하면 속도포텐셜  $\phi$ 는 다음 식으로 표시된다.

$$\phi(x, y, t) = \left(-\frac{\sigma_0}{2k} e^{-ky}\right) e^{ky} \cos k(x + Ut) \quad (A-14)$$

식 (A-14)는 본문에서 교란속도를 이용하여 유도된 식 (8)과 일치한다.