

集積 光學用 光帶域 格子 필터의 解析 (Analysis of Broad-Band Grating Filter Response in Integrated Optics)

金 富 均*, 申 相 永**
(Boo-Gyoon Kim and Sang-Yung Shin)

要 約

집적 광학에서 응용되는, 주기가 거의 선형으로 변하는 도파로 격자 필터의 파장에 따른 응답을 격자의 길이가 유한함을 고려하여 수식적으로 구하였다.

이 필터가 광대역 필터로서 설계되는 보편적인 경우에 대해서는 관련된 포물주면 함수를 변수의 위상에 따라 점근 근사를 취함으로써 파장에 따른 응답을 간단한 함수들로써 나타냈다. 또한 구한 결과식들이 기존 근사식들을 특별한 경우로 포함하는 일반적인 식임을 보였다. 마지막으로, 수식적인 해에 의한 결과와, Runge-Kutta 수치 계산법에 의한 정확한 해를 비교하여 서로 잘 일치함을 확인하였다.

Abstract

An analytic solution for the spectral response of linearly-chirped grating filter is derived, which takes the finite physical length of filter into account. In the usual case of broad-band linearly-chirped grating filter the analytic solution is expressed in terms of elementary functions, by approximating asymptotically the involved parabolic cylinder functions over different ranges of its argument. It is also shown that derived results are general enough to include previously-available approximations as particular cases, and that they agree well with the numerical solutions based upon the Runge-Kutta method.

I. 序 論

집적 광학에서 기본 구조물은 광파를 주어진 방향으로 유도하는 박막 유전체 광 도파로이다. 이러한 광 도파로에 주기적인 미세한 변형을 가함으로써 주기적 구조물 또는 격자(corrugated grating)를 만들어 광 범위한 응용을 하고 있다.^[1] 한 가지 예로서 일정한 주기를 갖는 격자를 단일 모드 광 도파로 상에 제작하면, 도파로를 따라 격자에 수직으로 입사하는 파동

과 반사하는 파동 사이에 Bragg 조건이 만족되는 파장 부근에서 대역배제필터(band rejection filter)로 동작 시킬 수 있는데 대역폭을 0.1~6 [Å] 정도 범위에서 조정할 수 있음을 확인하였다.^[2] 이러한 종류의 필터는 광통신을 위한 집적 광학적인 파장 분할 다중화 회로에 사용할 수 있겠으나, 이를 위해서는 사이드 로우브의 수준(sidelobe level)이 훨씬 작아야 하고, 보다 넓은 대역폭을 갖는 것이 요망된다. 이러한 목적에 부합시키기 위하여 격자의 모양을 변화시켜 줄 수 있다.^[3] 하나는 격자의 포락선의 모양을 변화시켜 주는 것으로서 점점 줄이기(tapering)라 부르며 주로 사이드 로우브의 수준을 줄이는 데 사용하고, 다른 하나는 격자의 주기를 변화시키는 것으로 칩핑(chirping)이라 하고 대역폭을 넓히는 데 사용한다. 특히 광대역 필터를 만드는 데 있어서 격자주기를 거의 선형으로

* 非會員, 崇田大學校 工科學 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Soong-Jun Univ.)

** 正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., KAIST)

변화시켜 Bragg 조건이 만족되는 파장의 범위를 넓게 하는 linearly-chirped grating이 성공적으로 사용되었다.^[4] 또한 linearly-chirped grating은 파장 분할 다중화 광통신 방식을 위한 집적 광학용 나중화기(multiplexer/demultiplexer)에도 중요하게 이용된다.^[5]

이와 같이 집적 광학에서 중요하게 사용되는 linearly-chirped grating 필터의 특성을 해석하기 위하여, Kogelnik은 필터 특성을 Riccati 미분 방정식으로 바꾼 후 제 4 차 Runge-Kutta 수치 계산법을 사용하여 파장에 따른 반사율(즉 spectral response)을 구하였다.^[3] 이 수치 계산은 계산 시간이 대역폭의 증가에 따라 막대하게 소요될 뿐 아니라, 설계상 사용되는 매개 변수들 간의 상호 관계 및 그들의 영향에 관한 고찰이 어려운 단점이 있다. 지금까지 수식적인 해(analytic solution)로서는 먼저 Matsuhara 등이 linearly-chirped grating의 길이가 무한대라 가정하고 Whittaker 함수를 사용하여 반사율을 얻은 것이 있다.^[6] 그러나, 길이가 무한대라는 가정때문에 파장에 따른 반사율의 변화, 대역폭, 사이드로우브의 크기등에 관한 중요한 정보를 얻을 수가 없었다. 그 후 Hong 등은 Matsuhara 등이 구한 식을 포물주면 함수(parabolic cylinder function)를 이용해서도 구할 수 있음을 지적하고, 또한 광대역 필터의 반사율이 모든 파장에서 1보다 아주 작은 제한된 경우에 대하여 반사율을 적분식으로 나타낸 해를 얻었는데,^[4] Kogelnik도 같은 적분식을 구하였다.^[3] 그러나, 유한한 길이를 갖는 보다 일반적인 광대역 격자 필터의 응답에 대한 수식적인 해는 아직 없었다.

본 논문에서는 linearly-chirped grating filter의 길이가 유한한 경우의 응답을 구하기 위하여 파동 결합 방정식을 풀어 이를 포물주면 함수(parabolic cylinder function)로 정확히 나타낸 후, 광대역 필터로 사용하는 경우에 대해서 포물주면 함수의 복소 변수의 위상에 따른 점근 근사(asymptotic approximation)를 사용하여 응답을 간단한 함수들로 표현하였다. 본 논문에서 구한 해는 격자의 길이가 무한히 큰 극한을 취하면 Matsuhara 등이 구한 식으로 귀착된다. 또한 반사율이 모든 파장에서 1에 비해 아주 작은 정도로 채핑(chirping)이 큰 경우의 극한을 취하면, Hong 등이 얻은 적분식으로 부터 구할 수 있는 점근치와 동일한 결과를 얻음으로써, 본 논문에서 구한 수식적인 해의 일반성을 보였다. 다시 말하면 본 논문의 해는 광대역 격자 필터 특성을 해석하는데, 반사율이 1에 비해 아주 작아야 하는 Hong 등의 식이 받는 제한에 구애되지 않는 일반적인 식이고, 또한 적분식이 아닌 간

단한 함수들로 표현된 장점을 갖는다.

마지막으로 수식적인 해의 정확성을 보이기 위하여, Kogelnik의 방법^[3]을 쫓아 Runge-Kutta 수치 계산법에 입각한 정확한 해를 구하고 이와 서로 비교하여 잘 일치함을 확인하였다.

II. 광대역 격자 필터 특성 해석

단일 모드만을 도파시키는 박막 유전체 광 도파로에 그림 1에 보인 바와 같이 길이가 2ℓ 인 linearly-chirped grating 구조가 x축을 따라 $(-\ell, \ell)$ 사이에 주어졌다. 파동의 진행 방향 즉 x축을 따라 변하는 격자의 주기를 $d(x)$ 라 하면 linearly-chirped grating은

$$2\pi/d(x) = 2\pi/d_0 - \alpha x \tag{1}$$

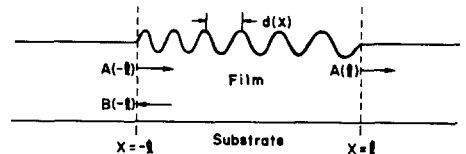


그림 1. 도파로 격자 필터

Fig. 1. Linearly-chirped grating filter.

로 표시할 수 있는 데, 여기서 d_0 는 $x=0$ 에서의 격자의 주기를 말하며 α 는 격자의 주기를 변화시키는 정도를 나타낸다. 이제 그림 1에서와 같이 주어진 박막 도파로에서 도파 모드의 전파 정수를 β 라 하면, 이것은 광원의 파장 (또는 주파수)에 따라 변한다. 그림 1 따라서, 도파 모드의 빛이 격자에 수직으로 왼쪽으로부터 입사하는 경우, 빛이 강하게 반사되는 보강 간섭 조건인 Bragg 조건은

$$2\beta = 2\pi/d(x) \text{ 또는 } 2(\beta - \pi/d_0) = -\alpha x \tag{2}$$

가 된다. 균일한 주기를 갖는 격자(즉 $\alpha=0$)는 일정 파장에서만 만족하던 Bragg 조건을, linearly-chirped grating은 파장에 따라 β 가 변하더라도

$$x = x_B \triangleq -2\delta/\alpha \text{ (단 } \delta = \beta - \pi/d_0) \tag{3}$$

에서 국소적으로 만족시킨다. 고로 Bragg점 x_B 가 격자 구조 내부에 위치하는 파장 즉

$$-\ell < 2\delta/\alpha < \ell \tag{4}$$

을 만족시키는 범위의 파장의 빛은 강하게 반사된다. 위의 식판적인 고찰로부터 δ 의 범위로 나타낸 대역폭은 $\alpha\ell$ 이 되어 격자의 길이가 주어진 경우 채핑

(chirping)의 정도, α 에 비례함을 알 수 있다. 고로 광대역 필터 제작에 α 가 큰 linearly-chirped grating이 유용하다.

지금부터 필터 특성을 정량적으로 고찰하기 위하여 그림 1의 왼쪽으로 부터 박막 도파로를 따라 입사하는 파와 격자에 의해 반사되는 파의 진폭을 각각 $A(x)$ 와 $B(x)$ 라 하면 다음과 같은 파동 결합 방정식

$$\frac{dA}{dx} = -iKB e^{i(2\sigma x + \alpha x^2/2)} \quad (5)$$

$$\frac{dB}{dx} = iKA e^{-i(2\sigma x + \alpha x^2/2)} \quad (6)$$

을 얻는다.^[3] 단 δ 는 식(3)에서 정의한 바와 같이 도파 모드의 전파 정수 β 와 기준점($x=0$)에서 Bragg 조건을 만족하는 파동의 전파 정수 β_0 (즉 $\pi/d\alpha$)와의 차이이고, K 는 결합 계수로서 파동 결합 이론에 의해 주어지는데 격자의 두께에 비례한다.^[7] 한가지 유의할 점은 Kogelnik [3]의 R과 S는 이 논문의 A 및 B와 각각 $R(x) = A(x)e^{-i\sigma x}$, $S(x) = B(x)e^{i\sigma x}$ 의 관계를 갖는다.^[8]

식(5)를 x 에 관하여 미분하고 식(6)에 대입하여 B를 소거한 후에 변수 x 를 $y = x + 2\delta/\alpha$ 로 주어지는 변수 y 로 치환하면

$$\frac{d^2A}{dy^2} - i\alpha y \frac{dA}{dy} - K^2 A = 0 \quad (7)$$

을 얻는다. 식(7)의 1차 미분항을 소거하기 위해 $A(y) = e^{i\frac{1}{4}\alpha y^2} w(y)$ 를 대입하며 w 에 대한 미분방정식

$$\frac{d^2w}{dy^2} + \left(\frac{1}{4}\alpha^2 y^2 + \frac{1}{2}i\alpha - K^2\right)w = 0 \quad (8)$$

을 구한 후, 잘 알려진 형태로 바꾸기 위해 $z = e^{-i\pi/4} \alpha^{1/2} y$ 로 변수 치환하면

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2\right)w = 0, \quad n = -1 - i\frac{K^2}{\alpha} \quad (9)$$

를 얻는다. 이것은 Weber 미분 방정식이므로 포물주면 함수(parabolic cylinder function)를 해로 갖는다. 따라서, A를 독립적인 두개의 포물주면 함수(parabolic cylinder function) $D_n(z)$ 와 $D_n(-z)$ 로서 표현하면

$$A = e^{-z^2/4} [C_1 D_n(z) + C_2 D_n(-z)] \quad (10)$$

이 되고 C_1 및 C_2 는 경계 조건에 의해 정해질 상수이다. 식(10)을 식(5)에 대입하고, 포물주면 함수(parabolic cylinder function)의 점화식^[8]

$$D'_n(z) - (z/2) D_n(z) + D_{n+1}(z) = 0 \quad (11)$$

를 사용하면(단 '은 z 에 대한 일차 도함수를 의미한다.)

$$B = \frac{-e^{-i\pi/4}}{ik} \alpha^{1/2} e^{z^2/4} [C_2 D_{n+1}(z) - C_1 D_{n+1}(z)] \quad (12)$$

를 얻는다.

먼저 $x=l$ 에서의 경계 조건은 그림 1의 오른쪽에서 입사파가 없으므로 B가 영이된다. 격자 필터의 응답, 즉 $x=-l$ 에서 δ 에 따라 변하는 반사율 $R(\delta)$ 는 $|B|^2/|A|^2$ 를 $x=-l$ 에서 구하면 되므로 편위상 A를 $x=-l$ 에 l 로 규격화 시킨 후 B를 $x=-l$ 에서 구하면,

$$B = \frac{e^{-i\pi/4}}{iK} \alpha^{1/2} e^{-u^2/2}$$

$$\frac{D_{n+1}(-u)D_{n+1}(v) - D_{n+1}(u)D_{n+1}(-v)}{D_n(u)D_{n+1}(-v) + D_n(-u)D_{n+1}(v)} \quad (13)$$

(단, $u = e^{-i\pi/4} \alpha^{1/2}(-l + 2\delta/\alpha)$,

$$v = e^{-i\pi/4} \alpha^{1/2}(l + 2\delta/\alpha)$$

가 되고, $R(\delta)$ 는 식(13)의 지수함수의 절대값이 1임을 유의하면

$$R(\delta) = |B(-l)|^2 = \frac{\alpha}{K^2}$$

$$\left| \frac{D_{n+1}(-u)D_{n+1}(v) - D_{n+1}(u)D_{n+1}(-v)}{D_n(u)D_{n+1}(-v) + D_n(-u)D_{n+1}(v)} \right|^2 \quad (14)$$

가 된다.

보통 포물주면 함수(parabolic cylinder function)

$D_n(z)$ 는 $z=0$ 근방에서 무한 급수

$$\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) 2^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{n}{2})} + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}) 2^{n/2-1/2}}{\Gamma(-\frac{n}{2})} Z + \dots \right) \quad (15)$$

로 표시하는데 이는 $\frac{1}{4}|z|^2 \ll |n + \frac{1}{2}|$ 인 경우의 수치 계산에는 용이하나 $\frac{1}{4}|z|^2 \gg |n + \frac{1}{2}|$ 인 경우에는 수렴 속도가 너무 늦어 쓸모가 없어 이 대신 점근 급수(asymptotic series)를 사용한다.^[8] 반사율 $R(\delta)$ 의 계산을 δ 를 변화시키면서 시도하기 전에 식(15)를 보면 $R(\delta)$ 는 α 와 K 가 주어지면 u 와 v 만에 의하여 변화하는데, u 및 v 는 각각 $(-l + 2\delta/\alpha)$ 와 $(l + 2\delta/\alpha)$ 에 의해 좌우된다. 이들은 다음아닌 격자 양끝점 $x=-l$ 과 $x=l$ 에서 Bragg 점 x_0 까지의 거리에 관계되는 양이다. 그런데 실제 광대역 격자 필터를 만들기 위해서는 앞서 직관적으로 고찰한 바와 같이 α 가 커서 무차원 수인 αl^2 이 1에 비해 아주 커야 한다(보통 수백에서 수천에 이름). 다른 하나의 무차원 수 Kl 은, 격자를 깊게 만드는 데 제한이 있어, 보통 αl^2 에 비해 작은 양이다.^[4] 따라서 필터 응답을 무차원 수 δl 을 변화시키면서 계산하는 경우 광범위한 영역

의 $\delta\ell$ 에 걸쳐 점근 근사를 사용할 수 있겠다. 즉 식 (14)의 점근 근사를 위하여, $|u|^2/4 \gg |n + \frac{1}{2}|$ 및 $|v|^2/4 \gg |n + \frac{1}{2}|$ (참고: $|n + \frac{1}{2}| = |n + \frac{3}{2}|$)을 만족하는 $\delta\ell$ 의 영역을 구하면 다음 두 부분

$$|\delta\ell| < \frac{a\ell^2}{2} - \left\{ \frac{1}{4} + (K^2/a)^2 \right\}^{1/4} a^{1/2} \ell \quad (16a)$$

과

$$|\delta\ell| > \frac{a\ell^2}{2} + \left\{ \frac{1}{4} + (K^2/a)^2 \right\}^{1/4} a^{1/2} \ell \quad (16b)$$

로 나눌 수 있다. 각 영역을 도시하면 그림 2와 같다.

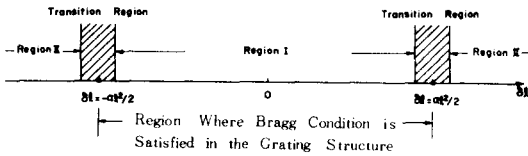


그림 2. $\delta\ell$ 의 각 영역

Fig. 2. Designation of various regions of $\delta\ell$.

식(16a)로 표시된 영역 I은 Bragg조건이 격자 내부에서 만족되는 식(4)로 표시된 $\delta\ell$ 영역을 나타내며, Bragg 점 x_b 가 격자 끝점에 너무 접근 (즉 u 또는 v 가 영에 접근)하여 점근 근사를 사용할 수 없는 영역인 천이 영역을 제외한 곳이다. 마찬가지로 식(16b)로 표시된 영역 II는 Bragg조건을 격자내부에서 만족하지 못해 식(4)로 표시된 '직관적' 대역폭 밖에 있으며 x_b 가 격자 끝점에 너무 가까운 천이 영역은 제외한다. 영역 I과 II사이의 천이 영역은 $a^{1/2}\ell$ 정도의 폭을 갖는 영역으로 '직관적' 대역폭 $a\ell^2$ 에 비해 상대적으로 좁은 영역이다. 이 부분에서 반사율을 근사적으로 구하는 것 역시 뒤에서 언급한다.

이제 스펙트럴 레스판스의 점근 근사에 필요한 $D_n(z)$ 의 점근 근사식을 써 보면

$$D_n(z) \sim \begin{cases} e^{-z^{2/4}}, & |\arg z| < \frac{3}{4}\pi \\ e^{-z^{2/4}} z^n - \frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma(-n)} e^{i\pi n} e^{z^{2/4}} z^{-n-1}, & \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5}{4}\pi \end{cases} \quad (17)$$

가 된다. 그런데 도파로 격자 필터는 $\delta\ell = 0$ 에 대해 대칭인 필터 응답을 가지므로^[3], $\delta\ell > 0$ 인 경우에 국한하여

i) 영역 I

식(17)을 식(15)에 직접 적용하고, $1/uv$ 항등은 $1/u$ 또는 $1/v$ 에 비해 높은 차수이므로 작아 무시하고 Gamma 함수의 다음 관계식^[9]

$$|\Gamma(iK^2/a)|^2 = \pi a / K^2 \sinh(\pi K^2/a) \quad (18)$$

을 이용하는 긴 계산 과정을 거치면

$$R(\delta) = 1 - e^{-2\pi K^2/a} \left\{ 1 - 2\sqrt{2} Ke^{-\pi K^2/2a} \sqrt{\sinh(\pi K^2/a)} \left[\frac{\sin(a+f+\eta)}{a\ell - 2\delta} + \frac{\sin(b+g+\eta)}{a\ell + 2\delta} \right] \right\}^{-1} \quad (19a)$$

을 얻는 데, 단

$$\begin{aligned} a &= a(\ell - 2\delta/a)^2/2, & b &= a(\ell + 2\delta/a)^2/2 \\ f &= -(2K^2/a) L_n |a^{1/2}(\ell - 2\delta/a)| + 3\pi/4 \\ g &= -(2K^2/a) L_n |a^{1/2}(\ell + 2\delta/a)| + 3\pi/4 \\ \eta &= \arg \{ \Gamma(1 + iK^2/a) \} \end{aligned} \quad (19b)$$

이다. 위 식의 η 는 coulomb 파동 함수에도 나오는 양으로 수표^[9]로 만들어져 있으며 $K^2/a \ll 1$ 일 때는 Gamma 함수 $\Gamma(1 + iK^2/a)$ 을 1 근처에서 K^2/a 에 대해 급수 전개하여

$$\eta = -\gamma x^2/a \quad (20)$$

로 근사시킬 수도 있는데 이때 γ 는 Euler 상수로서 0.577.....이다.^[9]

ii) 영역 II

전변과 같은 방법으로 계산하되, $1/u$ 과 $1/v$ 차수까지는 영이 되어 다음 높은 차수까지 유지하면

$$R(\delta) = K^2 \left\{ \frac{1}{(a\ell - 2\delta)^2} + \frac{1}{(a\ell + 2\delta)^2} + \frac{2 \cos \left[4\delta\ell - 2(K^2/a) L_n \left(\frac{2\delta + a\ell}{2\delta - a\ell} \right) \right]}{(a\ell - 2\delta)(a\ell + 2\delta)} \right\} \quad (21)$$

을 얻는다. 이 식은 사이드 로우브들에 대한 정보를 주게 된다.

iii) 천이 영역

이 영역에서 u 가 영에 가깝고 v 는 큰 절대값을 가지므로 u 를 변수로 하는 포물주면 함수는 식(15)에 의해 근사시키고, v 를 변수로 하는 포물주면 함수는 식(17)에 의해 점근 급수를 사용하여 근사시키면 된다. 이렇게 계산된 반사율의 표현식은 복잡하다. 그런데, 천이영역의 중앙인 $\delta\ell = \frac{a\ell^2}{2}$ 에서는 $u=0$ 이므로 간단하게

$$R = \frac{\sinh(\pi K^2/2a) - (K/2a\ell)}{\cosh(\pi K^2/2a) - (K/2a\ell)} \frac{\sqrt{2\sinh(\pi K^2/a)} \sin(b+g+\eta)}{\sqrt{2\sinh(\pi K^2/a)} \sin(b+g+\eta)} \quad (22)$$

과 같이 되는 데, 단 b, g 및 η 는 식(19b)에 정의된 양이다. 따라서, 이 좁은 영역에서는 영역 I과 II와의 경계점 둘과 $\delta\ell = a\ell^2/2$ 를 포함한 세점에서의 반사율을 가지고 보간법을 사용하는 것으로 족할 것이다. 경

계점의 위치 선정에 관해서는 제 4 절의 정확한 수치 계산을 참고하는 것이 좋겠다.

식 (19)와 (21)은 $\delta l = 0$ 에 대해 대칭이며, 지금까 지 a 가 양수인 경우에 대해서만 논하였는 데, 만약 a 가 음수가 되면 식 (19)와 (21)에서 a 대신 $|a|$ 로 치환하면 되는 것을 또한 확인하였다.

III. 기존 수식해들과의 비교

먼저 Matsuhara 등이 구한 무한한 길이의 도파로 격자 필터의 반사율 공식^[6]과 비교하는 것은, 식 (19)에서 $l \rightarrow \infty$ 인 극한을 취함으로써

$$R \approx 1 - e^{-2\pi K^2/a} \quad (23)$$

가 되어, 서로 일치함을 간단히 볼 수 있다. 이와 함께 식 (21) 및 (22)는 $a l^2$ 이 아주 큰 수이면, 새로운 결과로서,

$$R \approx \begin{cases} \tanh(\pi K^2/2a), & \delta l = a l^2/2 \\ 0, & \delta l \gg a l^2/2 \end{cases} \quad (24)$$

임을 말한다. 반사율이 $\delta l \gg a l^2/2$ 인 경우 영이 되는 것은 직관적인 추측과도 일치한다. 식 (23) 및 (24)는 $a l^2$ 가 매우 큰 경우 대략적인 계산에 유용하다.

이제 위에서 구한 식들의 일반성을 고찰하기 위하여, Hong 등^[4]이 제시한 해를 검토하고 그들의 해를 개선하여 구한 결과와 비교하여 보자. Hong 등을 좇아 반사율이 1에 비해 아주 작은 경우, 식 (6)에서 $A \sim 1$ 이므로 $x = l$ 에서 경계 조건 $B = 0$ 을 이용하여 식 (6)을 직접 적분하면

$$B(-l) \approx -i \int_{-l}^l 2ce^{-i(2ax + 2/ax^2)} dx \quad (25)$$

를 얻고, 반사율은 $|B(-l)|^2$ 로 표현할 수 있다. 위 적분식은 x 가 상수이므로 Fresnel 적분으로 나타낸 후에 잘 알려진 Fresnel 적분의 점근 근사식을 이용할 수도 있으나, 식 (25)에 직접 정상 위상 방법(stationary phase method)에 의한 적분을 하여도 같은 결과를 얻게 된다. 일차적으로 Hong 등을 좇아 직접 점근 근사를 취하면, 정상 위상점(stationary phase point)은 $x_s = -2\delta/a$ 가 되어 다음 아닌 Bragg점 x_b 와 일치하며 점근 근사치는 정상위상점이 적분 구간안에 위치하는가(즉, 물리적으로는 Bragg조건이 격자 내부에서 만족되는가)의 여부에 따라

$$R(\delta) = |B(-l)|^2 \approx \begin{cases} 2\pi K^2/a; & -l < x_s < l \\ 0; & x_s > l, x_s < -l \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\text{즉 } -\frac{a l^2}{2} < \delta l < \frac{a l^2}{2}) \\ (\text{즉 } \delta l > \frac{a l^2}{2}, \delta l < -\frac{a l^2}{2}) \end{aligned} \quad (26)$$

을 얻는다^[4] 이로부터 반사율이 1에 비해 아주 작다는 가정된 조건은 $2\pi K^2/a \ll 1$ 로서, 취핑(chirping)의 정도 a 가 결합계수 K 의 제곱에 비해 충분히 크다는 조건과 같다는 것을 확인할 수 있다.

식 (26)에 주어진 결과는 물론 부등식의 경계근처에서는 정상 위상점(stationary phase point)이 적분 구간의 끝에 너무 가까이 간 경우가 되어 성립되지 않는다. 특히 경계점 즉 $\delta l = \pm a l^2/2$ 에서 근사값을 구해보면 $B(-l)$ 이 양쪽 영역간 차이값의 반이 되어 반사율은 $\pi K^2/2a$ 가 된다. 본 논문의 a 는 Hong 등의 2γ 이고, δ 는 서로 부호가 반대로 정의되었다. 위에서 구한 반사율 공식으로 부터는 사이드 로우브 수준에 대한 정보를 얻을 수 없을 뿐 아니라 δl 에 따른 반사율의 자세한 변화 또한 고찰할 수 없다. 따라서 점근 근사의 다음 차수까지를 구하기 위하여 정상 위상점의 적분 구간내 존재 여부에 의한 기여항과 적분 구간의 끝점(end point)에서의 기여항까지 고려하면^[10], Hong 등이 구한 식 (26)보다 더 정확한 식으로

$$R(\delta) \approx \begin{cases} K^2 \left[\frac{2\pi}{a} + 2\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \left\{ \frac{\sin(a-\pi/4)}{a l - 2\delta} + \right. \right. \\ \left. \left. K^2 \left[\frac{1}{(a l - 2\delta)^2} + \frac{1}{(a l + 2\delta)^2} + \right. \right. \right. \end{cases} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} & \left. \left. \frac{\sin(b-\pi/4)}{a l + 2\delta} \right\} \right]; \quad -\frac{a l^2}{2} < \delta l < \frac{a l^2}{2} \\ & \left. \left. \frac{2\cos(4\delta l)}{(a l - 2\delta)(a l + 2\delta)} \right] \right]; \quad \delta l > \frac{a l^2}{2}, \delta l < -\frac{a l^2}{2} \end{aligned} \quad (27b)$$

를 얻는다. 단, a 와 b 는 식(19)에서 정의된 양이다. 식 (22)에서의 경우와 같이 $\delta l = \pm a l^2/2$ 에 대하여 별도로 계산하면

$$R \approx K^2 \left[\pi/2a + \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \frac{\sin(2a l^2 - \pi/4)}{2a l} \right] \quad (28)$$

를 얻는다. 식 (27) 및 (28)은 반사율이 1보다 아주 작다는 가정(즉, $2\pi K^2/a \ll 1$)으로 부터 출발하였으나, 본 논문의 식(19)와 (21)은 이러한 제한을 받지 않으므로 만약 $\frac{K^2}{a}$ 이 영으로 접근하는 극한을 취하면 식(27)로 귀착되어야 할 것이다. 이 극한에서 $f \approx$

$3\pi/4$, $\theta \approx 3\pi/4$, $\eta \approx 0$, 그리고 $\sinh^{1/2}(\pi K^2/a) = \sqrt{\pi K^2/a}$ 임을 유의하고 지수 함수를 K^2/a 에 대한 Taylor 급수 첫 항만으로 근사시키면, 식 (19)는 식 (27a)로 귀착된다. 식 (21)도 역시 간단히 식 (27b)가 됨을 볼 수 있다. 천이 영역의 중간에 위치하는 $\delta l = \pm a l^2 / 2$ 에서도 마찬가지로 식 (22)는 식 (28)로 귀착된다.

이로써 우리는 Matsuhara 등이 구한 식과 Hong 등이 구한 적분식을 통일하였으며, 이들의 식보다 더 정확하고 일반적인 식을 구했다.

IV. 정확한 수치 계산과의 비교

제 2 절에서 구한 필터 특성 공식의 정확도를 검토하기 위하여 Kogelnik의 방법을 좇아 파동 결합 방정식을 Riccati 미분 방정식으로 변환시킨 후^[3], 제 4 차 Runge-Kutta 방법을 사용하여 수치 계산을 행하였다. 한 간격당 오차의 한계를 10^{-7} 및 10^{-8} 로 놓고 각각 구한 수치계산 결과를 서로 비교하여, 그림 3~5 에 도시된 경우의 필터들에 대해 δl 의 전영역에 걸쳐 반사율이 유효 숫자 세자리까지 일치함을 확인하여, 유효 숫자 세자리까지 정확한 수치 계산을 하였다.

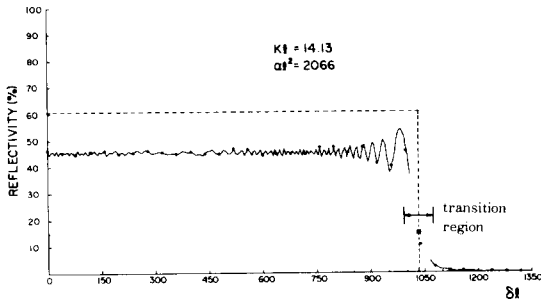


그림 3. 격자 필터의 응답 ($a l^2 = 2066$, $K l = 14.13$)
Fig. 3. Spectral response of a linearly-chirped grating filter.

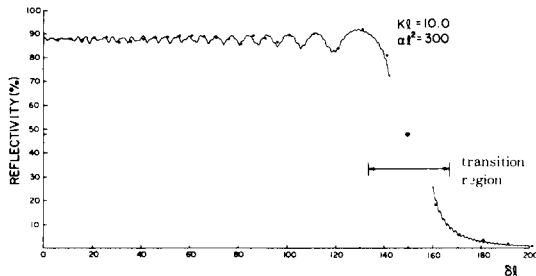


그림 4. 격자 필터의 응답 ($a l^2 = 300$, $K l = 10.0$)
Fig. 4. Spectral response of a linearly-chirped grating filter.

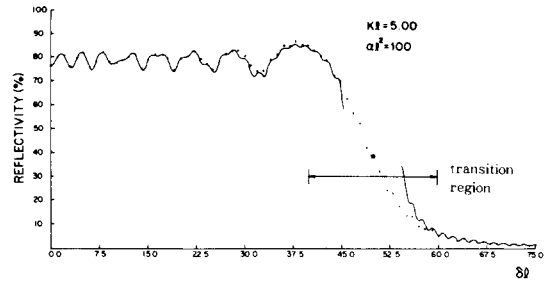


그림 5. 격자 필터의 응답 ($a l^2 = 100$, $K l = 5.000$)
Fig. 5. Spectral response of a linearly-chirped grating filter.

그림 3, 4 와 5는 각각 $a l^2 = 2066$, $K l = 14.13$; $a l^2 = 300$, $K l = 10$; $a l^2 = 100$, $K l = 5$ 인 경우로써 점은 점으로 나타낸 것은 정확한 Runge-Kutta 수치 계산이고, 실선으로 나타낸 것이 본 논문의 공식에 의한 것이다. 천이 영역 중앙인 $\delta l = a l^2 / 2$ 에서의 공식에 의한 반사율은 별표(*)로 나타냈다. 그림 4 와 5의 경우 별표와 Runge-Kutta 수치 계산 값이 겹쳐 있어 그 점에서 분간할 수 없다.

그림 3은 K^2/a 가 9.66×10^{-2} 이며 $a l^2$ 및 $K l$ 값들은 Hong 등이 실험적으로 구현했던 필터^[4]에 대한 것으로 긴 점선으로 나타낸 것은 Hong 등의 방법에 의한 계산 식 (26)으로부터 구한 것이다. K^2/a 가 이와 같이 비교적 작은 경우에도 적분식에 의한 결과는 큰 오차를 갖는다. 실선으로 나타낸 본 논문의 근사해는 Runge-Kutta 수치 계산값과 아주 잘 일치한다.

그림 4 와 그림 5의 경우에도 점근 근사에 의한 해와 수치 계산은 잘 일치한다. 그러나, $a l^2$ 값들이 그림 3의 경우보다 작아 상대적인 정확도는 그림 3보다 떨어진다. 이로써 점근 근사에 의한 공식은 $a l^2$ 이 크면 클수록 정확하다는 것이 수치 계산과의 비교에서도 재확인 되었다. 물론 이 두 그림의 경우는 K^2/a 가 각각 1/3 및 1/4로서 Hong 등이 구한 식은 전혀 적용될 수 없는 경우이다.

이러한 수치 계산과의 비교에서 고찰할 사항중 하나는 식 (19)와 (21)이 각각 성립되는 영역 I 과 영역 II 가 천이 영역과 이루는 경계점을 어디에 둘 수 있는가이다. 그림 3~5 에 도시된 결과는 부등식 (16a)와 (16b)로 주어지는 영역 I 과 영역 II를 최대한로 허용하여 천이 영역을 최소화 하는 점들인 $\delta l = a l^2 / 2 - 1 + (K^2/a)^{1/4} a^{1/2} l \approx a l^2 / 2 - a^{1/2} l$ 과 $\delta l = \frac{a l^2}{2} + \frac{1}{4} + (K^2/a)^{1/4} a^{1/2} l \approx \frac{a l^2}{2} + a^{1/2} l$ 뿐만

아니라 두점으로 정의된 최소 천이 영역을 약간 넘어서 까지도 식 (19)와 (21)의 정확한 반사율을 나타낸다. 따라서, 천이 영역내에서는 상기한 두 경계점에서의 반사율과 천이 영역 중앙점에서 식 (22)로 주어진 반사율로서 보간법을 사용하면 된다.

마지막으로 계산 소요시간을 비교하여 보면 Runge-Kutta 수치 계산 시간이 매개 변수의 값들 al^2 와 Kl^2 가 커지면 대역폭이 넓어지므로 보다 많은 δl 값에서 계산이 요망되어 전체 필터 특성을 구하기 위한 계산 시간은 막대하게 늘어난다. 일례로 그림 2에 34개의 점들로 나타난 모든 Runge-Kutta 수치 계산 소요 시간은 초대형 전산기인 CDC Cyber-174로 751초간 걸린 반면, 본 논문의 근사식에 의한 293개의 점에서의 계산 시간은 0.698초로, 비슷한 정도의 정보를 구하는 경우 수천대 일이 되겠다.

V. 結 論

광대역 격자 필터를 구현하기 위하여 사용되는 도파로 격자 필터의 특성을 포물 주면 함수 (parabolic cylinder function)로 정확히 나타낸 후, 광대역 격자 필터로 사용되는 경우 점근 근사 방법을 도입하여 수식적인 해를 얻었다. 이 공식들은 간단한 함수들로 표현되며, 전 영역에서 수치 계산에 의한 정확한 해와 잘 일치 한다. 본 논문의 점근 근사에 의한 해는 또한 지금까지 존재하던 수식적인 해로서 극히 제한된 용도를 갖던 Matsuhara 등이 구한 식과, Hong 등이 구한 식을 통일하여 일반화한 결과임을 보였다.

끝으로, 주어진 식들은 광대역 격자 필터의 설계에 유용할 뿐 아니라, 같은 구조를 사용하는 집적 광학용 다중화가^[5]의 정확한 해석에도 적용할 수 있다.

또한 만약 분포 Bragg 반사기 레이저 (distributed Bragg reflector laser)에 linearly-chirped grating을 사용하면 본 논문의 결과는 레이저 모드 해석을 쉽게 한다.

參 考 文 獻

- [1] A. Yariv and M. Nakamura, "Periodic structures for integrated optics," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. Qe-13, pp. 233, 1979.
- [2] D.C. Flanders, H. Kogelnik, R.V. Schmidt, and C.V. Shank, "Grating filters for thin-film optical waveguides," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 25, pp. 194, 1974.
- [3] H. Kogelnik, "Filter response of nonuniform almost periodic structures," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 55, pp. 109, 1976.
- [4] C.S. Hong, J.B. Shellan, A.C. Livanos, A. Yariv and A. Katzir, "Broad-band grating filters for thin-film optical waveguides," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 31, pp. 276, 1977.
- [5] A.C. Livanos, A. Katzir, A. Yariv, and C.S. Hong, "Chirped grating demultiplexers in dielectric waveguides," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 30, pp. 519, 1977.
- [6] M. Matsuhara, K. O. Hill, and A. Watanabe, "Optical-waveguide filters: Synthesis," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 65, pp. 804, 1975.
- [7] H. Kogelnik, *Theory of Dielectric Waveguides*. in *Integrated Optics*, 2nd ed., T. Tamir, Ed., New York, Springer-Verlag, 1977.
- [8] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*. 4th ed., Cambridge University Press, 1927.
- [9] M. Abramowitz and I.A. Stegun, Ed., *Handbook of Mathematical Functions*. New York, Dover, 1965.
- [10] A. Erdelyi, *Asymptotic Expansions*. New York, Dover, 1956.