

LMS 適應 필터 設計를 위한 高速 收斂 알고리즘에 관한 研究

(A Study on the Fast Converging Algorithm for LMS Adaptive Filter Design)

辛潤焄*, 李鍾珏**

(Yoon Ki Shin and Jong Gak Lee)

要 約

現在까지의 適應 필터(adaptive filter)의 設計 方法을 大別하면 局部 파라미터 최적화(local parameter optimization) 方法^{1,11}과 安定性(stability)을 主眼點으로 하는 方法^{1~3,1}의 두 가지로 된다. 그리고 이들 중에서 비교적 간단한 方法은 로칼 파라미터 최적화 方法으로서, 이것에서는 스티피스트-디센트(steepest-descent) 方法¹⁵을 이용하는 LMS 알고리즘을 代表的인 것으로 들 수 있다. 適應 필터의 設計에 있어서 가장 중요한 것은 收斂 速度를 높이는 일이다.

本 論文은 適應 非循環 필터의 設計를 위한 高速 收斂 알고리즘을 개발하는 문제에 관하여 研究한 것으로, 適應 利得(adaptation-gain)을 적절히 조정함으로써, 從來 사용되어 오던 LMS 알고리즘 및 그의 變形인 여러 알고리즘에 비하여 收斂 速度를 높일 수 있으며, 동시에 安定性이 높은 새로운 알고리즘을 提示하였다. 그리고 提案된 알고리즘을 이용한 適應 필터의 特性 改善 問題를 多角度로 檢討하였다.

Abstract

In general the design methods of adaptive filter are divided into two categories, one is based upon the local parameter optimization theory and the other is based upon stability theory. Among the various design techniques, the LMS algorithm by steepest-descent method which is based upon local parameter optimization theory is used widely.

In designing the adaptive filter, the most important factor is the convergence rate of the algorithm. In this paper a new algorithm is proposed to improve the convergence rate of adaptive filter compared with the commonly used LMS algorithm. The faster convergence rate is obtained by adjusting the adaptation gain of LMS algorithm. And various aspects of improvement of the adaptive filter characteristics are discussed in detail.

I. 序 論

適應 필터(adaptive filter)는 일종의 파라미터 추정(parameter estimation)¹⁵으로서, 어떤 未知의 系統의 入力과 出力 信號만을 觀測 對象으로 삼아서 反復 抽出法(iteration)에 의하여 未知의 系統의 파라

*,** 正會員, 서울대학교 工科大学 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Seoul National Univ.)
接受日字: 1982年 4月 13日

미터들을 찾아내는 것이다. 따라서 適應 필터 設計에 있어서는 短時間 內에 이 파라미터들을 抽出해 낼 수 있는 알고리즘을 필요로 한다.

지금까지 提示되어온 適應 필터 設計 方法은 局部 파라미터 최적화(local parameter optimization) 方法과 安定性 理論(stability)을 이용한 方法의 두 가지가 있다. 그러나 局部 파라미터 최적화 方法은 適應 非循環 필터(adaptive nonrecursive filter)에서만 유용하다는 것이 증명되었다.¹⁵⁾ 이것의 代表的 알고리즘으로서 Hoff-Widrow¹⁶⁾의 LMS 알고리즘을 들 수 있다.

適應 循環 필터(adaptive recursive filter)는 모두 安定性 理論에 바탕을 둔 設計 方法을 채택하고 있으며, 이들 중에서 代表的 알고리즘으로는 V. M. Popov⁶⁾에 의한 超安定性(hyperstability)을 이용한 HARF(hyperstable adaptive recursive filter)⁷⁾ 및 SHARF(simple HARF)⁸⁾을 들 수 있다. 그러나 超安定性을 이용하는 알고리즘의 最大 難點은 誤差緩和 필터(error smoothing filter)의 係數를 결정하는데 있다. 현재는 I. D. Landau⁹⁾에 의해 이를 考慮하지 않아도 되는 알고리즘이 完成되었으나 이 알고리즘은 지나치게 복잡하다. 또한 適應 非循環 필터에서만 收斂性을 보장 받고 있는 LMS 알고리즘도 適應 利得(adaptation-gain)의 값에 따라 收斂 與否 및 收斂 速度가 상당한 영향을 받는다.¹⁰⁾

本 論文은 適應 非循環 필터의 設計를 爲한 高速 收斂 알고리즘을 開發하는데 關於하여 研究한 것으로서, LMS 알고리즘의 適應 利得을 비교적 간단한 형태로 조절 시킴으로써 高速 收斂性을 가질 수 있고, 適應 利得이 適應 필터의 動作 特性에 미치는 바람직하지 못한 영향을 緩和시킬 수 있는 새로운 알고리즘을 提示하였다.

이 새로 提案된 알고리즘을 簡易상 “ μ -LMS 알고리즘”이라 부르기로 한다.

II. LMS 알고리즘 및 高速 收斂性을 爲한 그의 여러 가지 變形에 대한 要約

그림 1은 適應 非循環 필터의 構成을 나타낸다. 그림 1의 各 量의 內容은 아래와 같다.

- $X_n = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-N+1}]^T$
- $W_n = [w_{n1}, w_{n2}, \dots, w_{nN}]^T$
- N : 필터의 次數
- x_n : 入力 信號
- W_n : 무게 벡터 (weight vector)
- d_n : 未知 系統의 出力

y_n : 適應 필터의 出力
어떤 샘플링 순간 n에서의 未知 系統의 出力 d_n 와 適應 필터의 出力 y_n 와의 差를 e_n 이라 하면, n+1 샘플링 순간에서의 웨이트 벡터 W_{n+1} 은 誤差 自乘 平均 $E(e_n^2)$ 이 最小가 되는 方向으로 修正된다. 이러한 과정을 反復하면, 시간이 경과함에 따라 $E(e_n)$ 은 最小로 향하여 收斂하며, 同時에 W_n 도 最適 무게 벡

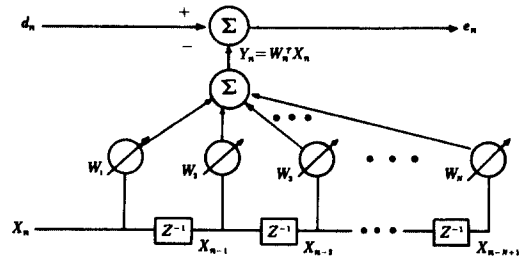


그림 1. 適應 非循環 필터
Fig. 1. Adaptive nonrecursive filter.

터(optimal weight vector) W^* 로 收斂한다. 이상의 原理를 바탕으로 한 Hoff-Widrow¹⁶⁾의 LMS 알고리즘(標準 LMS 알고리즘)은 아래와 같다.

$$W_{n+1} = W_n + 2\mu_n e_n X_n \quad (1)$$

B. Widrow¹⁰⁾ 등에 의하여 分析된 바에 의하면 식 (1)에 있어서 가장 重要한 要素는 適應 利得 μ_n 으로서, μ_n 이 固定된 값 μ 를 가질 때 이 μ 가 알고리즘 (1)에 미치는 영향은 아래와 같다.

1. μ 가 작을 때 :
 - 1) 收斂性이 安定된다.
 - 2) 收斂 速度가 느리다.
2. μ 가 클 때 :
 - 1) 收斂性이 不安定하다.
 - 2) 收斂 速度가 빠르다.

위의 LMS 알고리즘을 變形시켜 收斂 速度를 높이는 여러 가지 變形된 LMS 알고리즘이 提示되어왔다.^{11~14)} 그 중의 하나로서, J. G. Proakis, J. R. Glover 등에 의해 提示된 高次 LMS 알고리즘^{11,12)}을 들 수 있다. 그러나 이 알고리즘은 표준 LMS 알고리즘에 비하여 收斂 速度는 약간 增加하나, 定常 狀態에서의 무게 벡터 偏差가 增加함으로써, 이것이 收斂 速度 增加의 利點을 相殺시키는 要인이 된다.

R. D. Giltin, F. R. Magee¹³⁾ 등에 의해 提示된 알고리즘이 있는 데 이 알고리즘은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} W_{n+1} &= W_n - \mu_n \bar{D}_n e_n X_n \\ \bar{D}_{n+1} &= \bar{D}_n - \frac{\bar{D}_n X_{n+1} X_{n+1}^T \bar{D}_n}{1 + X_{n+1}^T \bar{D}_n X_{n+1}} \\ \bar{D}_n &= \frac{\bar{D}_n}{n} \end{aligned} \right\} (2)$$

이 알고리즘은 다른 알고리즘에 비하여 收斂 速度가 가장 빠르다. 이 알고리즘을 Godard 알고리즘이라고도 한다. 그러나 一般的으로 非循環 필터의 次數는 상당히 높기 때문에 行列 \bar{D}_n 을 計算하는데 많은 시간이 소요된다.

또 E. R. Ferrara, B. Widrow^[4] 등에 의하여, 入力 信號의 統計的 性質이 反復되는 特殊한 경우에는, 誤差 函數를 몇 가지만으로 制限 設定해 놓고 入力 信號의 統計的 特性이 反復될 때마다 이에 該當되는 適當한 誤差 函數 및 웨이트 벡터만을 채택하여 修正 시킴으로써, 誤差 函數의 時間的 變化에 의한 誤差를 줄여 주는 알고리즘이 提示되었다. 그러나 이 알고리즘은 特殊한 性質의 入力 信號의 경우에만 該當되므로, 모든 경우의 入力 信號에 適用될 수 있는 보다 普遍的인 알고리즘의 開發이 요청된다.

III. μ -LMS 알고리즘의 誘導

周知하는 바와 같이 LMS 알고리즘은 아래와 같이 誘導되었다.

$$J_n = e_n^2 = (d_n - W_n^T X_n)^2 \quad (3)$$

$$\nabla_{W_n}(J_n) = \frac{\partial J_n}{\partial W_n} = -2 e_n X_n \quad (4)$$

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W_n + \mu_n (-\nabla_{W_n}(J_n)) \\ &= W_n + 2 \mu_n e_n X_n \end{aligned} \quad (1)$$

그러나 위의 式(3), (4), (1)을 자세히 檢討해 보면 誤差 函數 J_n 이 J_{n+1} 과 같다는 假定下에서 이루어졌음을 알 수 있다. 즉 式(1)에 있어서 精確한 기울기 벡터(gradient vector)는 $\nabla_{W_n}(J_n)$ 이 아니라 $\nabla_{W_n}(J_{n+1})$ 이어야 한다. 그러나 기울기 벡터 $\nabla_{W_n}(J_{n+1})$ 을 사용하면 式(1)의 因果律(causality)이 깨어지므로, 式(1)을 그대로 사 용 할 수 밖에 없다. 따라서 式(1)은 誤差 函數의 時間的 變化로 인하여, 무게 벡터를 교정하는 過程에서 당연히 誤差를 發生시키게 된다.^[1] 이에 따라 LMS 알고리즘의 收斂 速度가 減少하게 되어 高速 收斂性을 가지기 어렵게 된다.

本 論文에서는 適應 利得 μ_n 을 일정하게 固定시키

는 대신, 매 반복 순간마다 推定된 기울기 벡터의 方向을 그 直前의 반복 순간에서의 기울기 벡터 方向과 比較해 봄으로써, 이 推定된 기울기 벡터가 실제 기울기 벡터의 方向에 一致될 確率이 높을 때는, 適應 利得 μ_n 을 增加시켜 무게 벡터 W_n 이 올바른 方向으로 많이 교정되도록 유도하고, 反面에 그 反對가 될 경우에는 μ_n 을 減少시켜, 무게 벡터 W_n 이 可能한 한 그 릇된 方向으로 향하지 않도록 유도하는 알고리즘을 提示한 것이다.

어떤 반복 순간 n 에 있어서 W_n, e_n, X_n 등은 系統 自体에 의해 결정되는 값이므로 우리가 任意로 變化시킬 수 없다. 다만 우리가 變化시킬 수 있는 μ_n 의 값 뿐이다. 따라서 어떤 반복 순간 n 에 있어서의 μ_n 을, $\mu_{n-1}, W_{n-1}, W_n, e_{n-1}, e_n, X_{n-1}, X_n$ 등의 주어진 값들을 써서 구하되, 이때 誤差 函數 J_n 이 最小가 되는 方向으로 향하도록 μ_n 을 아래와 같이 결정하고자 한다.

반복 순간 n 에 있어서의 誤差 函數 J_n 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} J_n &= e_n^2 \\ &= (d_n - W_n^T X_n)^2 \\ &= |d_n - (W_{n-1} + 2\mu_{n-1} e_{n-1} X_{n-1})^T X_n|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 變化시킬 수 있는 量 μ_{n-1} 을 하나의 變數로 삼고, $e_{n-1}, e_n, X_{n-1}, X_n, W_{n-1}, W_n$ 등의 주어진 값을 常數로 삼아서, J_n 이 最小가 되는 方向으로 향하도록 μ_{n-1} 을 조정하여 그 새로운 값을 μ_n 으로 삼는다.

式(5)에서 J_n 은 變數 μ_{n-1} 에 대하여 단일 모드의 2次 函數(unimodal quadratic function)가 된다. 이것은,

$$\nabla_{\mu_{n-1}}(J_n) = \frac{\partial J_n}{\partial \mu_{n-1}} = 2e_n (-2e_{n-1} X_{n-1}^T X_n) \quad (6)$$

과 같이 되어 極小點은 $e_n = 0$ 인 경우 하나 뿐이라는 사실에 起因한다. 즉 J_n 은 變數 μ_{n-1} 에 대하여 하나의 局部的 極小點(local minimum)만을 가지므로 단일 모드(unimodal)하다. 이러한 조건을 만족하여 야만 스티피스트-디센트(steepest-descent)方法을 사용할 수 있다. 즉 μ_{n-1} 을 조정시켜 μ_n 을 얻는데 스티피스트-디센트方法을 적용시킬 수 있다. 즉,

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \rho \cdot (-\nabla_{\mu_{n-1}}(J_n)) \quad (7)$$

여기서 $\nabla_{\mu_{n-1}}(J_n)$ 은 스칼라 量이며 $\rho > 0$ 이어야 한다. 그림 2는 式(7)의 알고리즘의 內容을 나타낸 것이다.

式(1), (7)로 부터 아래와 같은 알고리즘을 얻을 수

있다.

$$W_{n+1} = W_n + \mu_n (-\nabla w_n(J_n)) \quad (8)$$

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \rho (-\nabla \mu_{n-1}(J_n)) \quad (9)$$

여기서 $\nabla \mu_{n-1}(J_n)$ 과 $\nabla w_n(J_n)$ 과의關係를誘導하여 본다. 式(6)으로부터, 아래關係를 얻는다.

$$\begin{aligned} \nabla \mu_{n-1}(J_n) &= -(-2e_{n-1} X_{n-1})^T (-2e_n X_n) \\ &= -\nabla w_{n-1}(J_{n-1})^T \nabla w_n(J_n) \\ &= -\nabla w_{n-1}(J_{n-1}) \cdot \nabla w_n(J_n) \end{aligned} \quad (10)$$

지금부터는 $\nabla w_n(J_n)$ 을 $\bar{\nabla}_n$ 으로表記하기로 한다. 따라서 式(8), (9)는 아래와 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} W_{n+1} &= W_n - 2\mu_n \bar{\nabla}_n \\ \mu_n &= \mu_{n-1} + \rho \bar{\nabla}_{n-1} \cdot \bar{\nabla}_n \\ \bar{\nabla}_n &= -2e_n X_n \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(11)이 바로 구하고자 하는 μ -LMS 알고리즘이다.

이 알고리즘은 아래와 같은 조건을 만족하면 항상收斂한다.

$$|\mu_n| > 0, \quad n = 0, 1, \dots, \infty$$

$$1/\lambda_{\max} > \mu_0$$

μ_0 : 適應利得의初期置

λ_{\max} : 入力信号信号自己相関메트릭스의特性值(eigen value)중最大의값

式(11)이 갖는意味는 이式을 기하학적으로 해석하면 더욱分明해진다. 첫째로, 어떤 반복 순간 n 에서推定된기울기 벡터 $\bar{\nabla}_n$ 과, 바로 그直前の 반복 순간 $n-1$ 에서의기울기 벡터 $\bar{\nabla}_{n-1}$ 이 서로 같은方向의成分을 많이 포함하고 있을 경우에는, 이 두 벡터의方向이誤差函數 J_{n+1} 이最小值로向하는 올바른方向이 될可能性이 커진다고 볼 수 있으므로, 이

때는 $\bar{\nabla}_n$ 의 크기 μ_n 을增加시켜 可能한限 무게 벡터를 많이 교정시켜 준다. 즉 $\mu_n = \mu_{n-1} + \rho \bar{\nabla}_{n-1} \cdot \bar{\nabla}_n > \mu_{n-1}$ 이 되도록 한다. 그림3은 이 상황을 나타낸 것이다. 이와는反對로 $\bar{\nabla}_n$ 의方向에 $\bar{\nabla}_{n-1}$ 과反對되는方向의成分이 많이 포함되어 있을 경우에는, $\bar{\nabla}_n$ 이 그 전의方向 $\bar{\nabla}_{n-1}$ 과 거슬러 가고 있다는 뜻이므로, 이 벡터 $\bar{\nabla}_n$ 의方向이誤差函數 J_{n+1} 의最小值로 가는 올바른方向이 될可能性이 희박해진다.

이런 경우에는 μ_n 을 감소시켜 무게 벡터 W_n 이 可能한限 적게 교정되도록 한다. 즉 $\mu_n = \mu_{n-1} + \rho \bar{\nabla}_{n-1} \cdot \bar{\nabla}_n < \mu_{n-1}$ 의關係가成立되도록 한다. 그림4는 이러한 상황을表示한 것이다.

IV. μ -LMS 알고리즘의 高速收斂에 대한 證明

LMS 알고리즘의 收斂性を 해석하는데 있어서 式

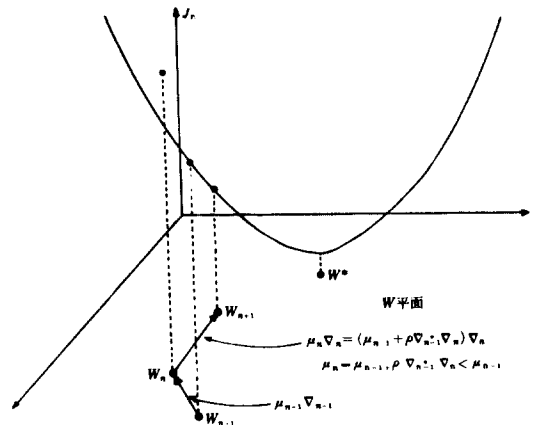
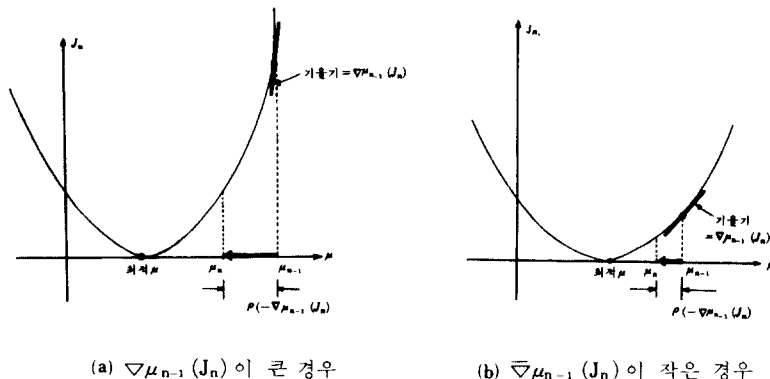


그림3. 適應利得의增加

Fig. 3. Increased adaptation-gain.



(a) $\nabla \mu_{n-1}(J_n)$ 이 큰 경우

(b) $\nabla \mu_{n-1}(J_n)$ 이 작은 경우

그림2. 適應利得調節機構

Fig. 2. Adapting mechanism of adaptation-gain.

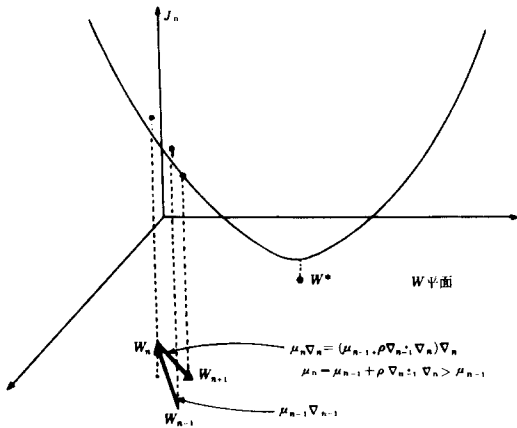


그림4. 適應 利得의 減少
Fig. 4. Decreased adaptation-gain.

4)에 의한 기울기 벡터를 사용하면 定量的 해석이 힘들기 때문에, J_n 대신에 J_n 의 平均值인 $E(J_n)$ 의 기울기 벡터 ∇_n 을 이용하여 해석한다. ∇_n 은 式 (3)의 平均值로 부터 아래와 같이 구해진다.

$$\nabla_n = 2RV_n \tag{12}$$

단 R 은 入力 信號의 相關行列(correlation matrix)를 나타내며, 이 行列은 대칭行列(symmetric matrix)이므로 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$R = E[X_n X_n^T] \tag{13}$$

$$R = Q \Lambda Q^{-1} = Q \Lambda Q^T \tag{14}$$

Λ : R 의 特性值(eigen-value)로 이루어진 대각선 行列(diagonal matrix)

Q : R 의 直交 모달 行列(orthonormal modal matrix)

$$W^* = R^{-1}P \tag{15}$$

$$V_n = W^* - W_n \tag{16}$$

W^* : 最適 웨이트 벡터

벡터 P 는 入力信號와 出力信號간의 相關벡터(correlation vector)를 나타낸다.

$$\text{즉, } P = E[d_n X_n] \tag{17}$$

式 (12)를 式 (11)에 代入하면 아래와 같은 式들을 얻을 수 있다.

$$W_{n+1} = W_n + \mu_n (-\nabla_n) \tag{18}$$

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \rho \nabla_{n-1}^T \cdot \nabla_n \tag{19}$$

$$\nabla_n = 2RV_n \tag{20}$$

式 (18)의 양변으로 부터 W^* 를 빼면 아래와 같이 된다.

$$W_{n+1} - W^* = W_n - W^* - 2\mu_n RV_n$$

$$\therefore V_{n+1} = V_n - 2\mu_n Q \Lambda Q^{-1} V_n \tag{21}$$

式 (21)의 양변에 行列 Q^{-1} 을 곱하면 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} V'_{n+1} &= V'_n - 2\mu_n \Lambda Q^{-1} V_n \\ &= (\mathbb{I} - 2\mu_n \Lambda) V'_n \end{aligned} \tag{22}$$

$$V'_n = Q^{-1} V_n \tag{23}$$

다음에 式 (19)에 式 (20)을 代入하여 아래의 관계를 얻는다.

$$\begin{aligned} \nabla_{n-1} \cdot \nabla_n &= 4 V_{n-1}^T R^T R V_n \\ &= 4 V_{n-1}^T R R V_n \\ &= 4 V_{n-1}^T Q \Lambda^2 Q V_n \\ &= 4 V_{n-1}^T S V_n \end{aligned} \tag{24}$$

$$S = Q \Lambda^2 Q^{-1} = Q \Lambda^2 Q^T \tag{25}$$

따라서 式 (19)는 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \mu_n &= \mu_{n-1} + 4\rho V_{n-1}^T S V_n \\ &= \mu_0 + 4\rho \sum_{k=0}^{n-1} V_k^T S V_{k+1} \end{aligned} \tag{26}$$

式 (22), (26)을 종합하면 아래와 같이 된다.

$$V_{n+1}' = (\mathbb{I} - 2\mu_n \Lambda) V'_n \tag{27}$$

$$\mu_n = \mu_0 + 4\rho \sum_{k=0}^{n-1} V_k^T S V_{k+1} \tag{26}$$

위의 두 式은 多次元 領域이므로 μ -LMS 알고리즘의 收斂性을 定量的으로 해석하기가 어렵다. 여기서는 이 두 式을 1次元 領域으로 내려서 해석해 보기로 한다.

1次元에서는 式 (22), (26)은 아래의 두 式으로 표시된다.

$$V_{n+1} = (1 - 2\mu_n \lambda) V_n \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \mu_n &= \mu_0 + 4\rho S \sum_{k=0}^{n-1} V_k V_{k+1} \\ &= \mu_0 + 4\rho \lambda^2 \sum_{k=0}^{n-1} V_k V_{k+1} \end{aligned} \tag{28}$$

標準 LMS 알고리즘을 사용할 때, 즉 $\mu_n = \mu_0$ 로 固定될 때는 式 (27)로 부터 기하학적 비율(geometric ratio) γ 은 아래와 같이 된다.

$$\gamma = \frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - 2\mu_0 \lambda \tag{29}$$

一般的으로 기하학적 수열(geometric sequence)의 近似式에는 指數 函數가 적당하다. 따라서 式 (29)에서 V_n 이 時定數 τ_0 를 가지고 指數的으로 減少한다고 하면 式 (29)는 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} r &= \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{V_0 \exp(-\frac{n+1}{\tau_0})}{V_0 \exp(-\frac{n}{\tau_0})} \\ &= \exp(-\frac{1}{\tau_0}) \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{2! \tau_0^2} - \dots$$

$$= 1 - 2\mu_0 \lambda \tag{30}$$

여기서 收斂 速度가 느릴 때는 τ_0 가 크다는 뜻이므로(보통의 경우) 아래와 같이 된다.

$$r = 1 - 2\mu_0 \lambda = 1 - \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{2! \tau_0^2} - \dots$$

$$\approx 1 - \frac{1}{\tau_0}$$

$$\therefore \tau_0 \approx \frac{1}{2\mu_0 \lambda} \tag{31}$$

마찬가지로 μ -LMS 알고리즘에서도 V_n 이 指數的으로 減少한다고 가정할 수 있다. 이것은 실험에서도 증명되었다. 이때의 時定數를 τ_1 이라 하면 아래와 같이 된다.

$$V_n = V_0 \exp\left(-\frac{n}{\tau_1}\right) \tag{32}$$

式(32)를 이용하여 式(28)의 $\sum_{k=0}^{n-1} V_k V_{k+1}$ 의 近似 値를 구할 수 있다. 즉,

$$V_k \cdot V_{k+1} = V_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{k}{\tau_1}\right) \cdot \exp\left(-\frac{k+1}{\tau_1}\right)$$

$$= V_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau_1}\right) \cdot \exp\left(-\frac{2k}{\tau_1}\right) \tag{33}$$

여기서 積分의 原理를 이용하여 式(33)의 k 에 관한 合을 아래와 같이 近似的으로 구할 수 있다.

$$\sum_{k=0}^{n-1} V_k V_{k+1} = V_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau_1}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(-\frac{2k}{\tau_1}\right)$$

$$\approx \frac{1}{T} V_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau_1}\right) \int_0^{(n-1)T} \exp\left(-\frac{2t}{\tau_1 T}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \tau_1 V_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau_1}\right) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2(n-1)}{\tau_1}\right) \right\} \tag{34}$$

$$\therefore \mu_n = \mu_0 + C \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2(n-1)}{\tau_1}\right) \right\} \tag{35}$$

$$C = 2\rho \tau_1 \lambda^2 V_0^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_1}\right) > 0 \tag{36}$$

反復이 계속됨에 따라 μ_n 의 값이 平均的으로 점점 增加하여 $\mu_0 + C$ 에 收斂하게 된다. 따라서 (27)에서 기하학적 비율 γ 는 $\gamma = \frac{V_n + 1}{V_n} = 1 - 2\mu_n \lambda = 1 - 2$

$$\left. \mu_0 + C \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2(n-1)}{\tau_1}\right) \right\} \right] \lambda \tag{37}$$

와 같이 되며, 반복이 진행됨에 따라 γ 의 값이 점점

감소함을 알 수 있다. 즉 收斂 速度가 增加함을 알 수 있다. 또한 式(36)에서 ρ 의 값이 增加하게 되면, 式(36)의 C 가 增加하여 收斂 速度가 더욱 더 增加함을 알 수 있다. 이 현상은 本 論文의 實驗 結果에서도 立證되고 있다. 다음에 收斂 領域 擴大에 대하여 생각하여 보면, μ -LMS 알고리즘은 작은 값의 μ_0 로써, 큰 값의 μ 를 가지는 LMS 알고리즘과 같은 효과를 나타내므로, 결국 收斂 領域을 擴大시키는 효과가 있다. 따라서 이 알고리즘의 收斂性은 상당히 安定된다고 할 수 있다.

V. 電算 시뮬레이션

구하고자 하는 실제의 필터의 시스템 函數를 아래와 같이 設定하였다.

$$H(z) = \sum_{k=0}^4 Z^{-k}$$

이 필터의 入力 信號는 平均値가 0이며 標準 偏差가 0.5인 定規 分布 特性을 갖는 가우스 랜덤 信號(Gaussian random signal)로 하였다.

μ_0 , ρ 의 여러 값에 따른 收斂 狀態의 變化를 그림 5 및 그림 6에 圖示하였다. 그림 5 및 그림 6은 각각 μ_0 의 값을 0.005, 0.05로 設定하고 ρ 의 값을 變化시킬 때 이에 따른 收斂 狀態의 變化를 나타낸 것이다.

그림 5에서 그래프 (b), (c)는 그래프 (a)에 비하여 상당한 收斂 速度의 增加를 보이고 있다. 그래프 (a)는 數千回數의 反復후에야 定常 狀態에 收斂하지만, 그래프 (C)는 단 90번만에 收斂 狀態에 도달한다.

그림 6에서도 그래프 (a)에 비하여 그래프 (b), (c), (d)는 상당한 收斂 速度의 增加를 보이고 있다.

여기서 유의할 점은 그래프 (c), (d)의 收斂 過程에서 약간의 振動이 있다는 점이다. 이 현상은 ρ 의 값이 지나치게 커지면, 벡터의 內積 $\bar{v}_{n-1} \cdot \bar{v}_n$ 이 陽 또는 陰이 됨에 따라, $\mu_n = \mu_{n-1} + \rho \bar{v}_{n-1} \cdot \bar{v}_n$ 이 각각 지나치게 陽의 값을 갖거나, 지나치게 陰의 값을 가지게 되어 收斂 條件을 만족하는 범위를 벗어나 發散할 可能性이 있다는 것을 示唆하고 있다. 또한 이들 그래프에는 자세히 나타나 있지 않으나, 定常 狀態에서의 雜音 特性도 μ -LMS 알고리즘이 LMS 알고리즘에 비하여 나아지고 있음을 확인하였다. 本 論文에서 행한 시뮬레이션의 結果를 종합하면, μ -LMS 알고리즘은 LMS 알고리즘에 비하여 適應 利得 μ 의 값을 수십배 이상 增加시킨 것과 같은 효과가 있음을 알 수 있다.

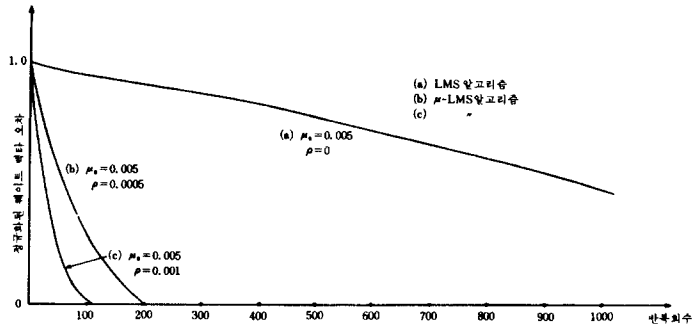


그림5. μ -LMS 알고리즘의 收斂 速度 ($\mu_0=0.005$)
 Fig. 5. Convergency rate of μ -LMS algorithm ($\mu_0=0.005$).

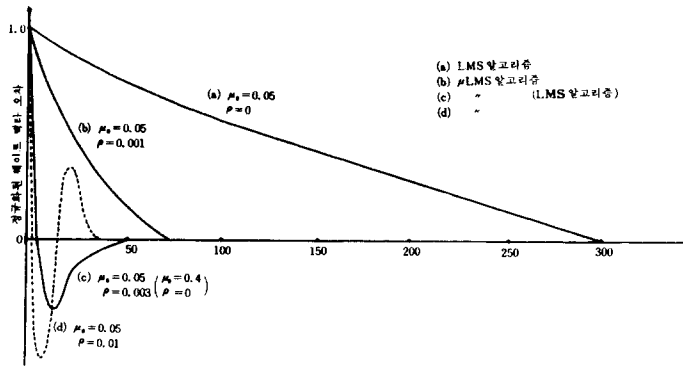


그림6. μ -LMS 알고리즘의 收斂 速度 ($\mu_0=0.05$)
 Fig. 6. Convergence rate of μ -LMS algorithm ($\mu_0=0.05$).

Ⅶ. 結 論

本 論文에서 提示한 μ -LMS 알고리즘의 長短點을 종합하면 아래와 같다.

μ_0 와 ρ 가 각각 $\mu_n = \mu_{n-1} + \rho \nabla_{n-1} \cdot \nabla_n > 0$ 과 $1/\lambda_{\max} > \mu_0$ 의 관계를 만족시키는 범위내에서는, μ -LMS 알고리즘은 LMS 알고리즘에 비하여 收斂 速度가 굉장히 빨라지며 동시에, 收斂 領域이 擴大되는 효과를 가져오게 되어 상당히 安定된 收斂性을 가지게 된다. 따라서 μ -LMS 알고리즘은 高速 收斂 알고리즘으로 적합하다.

μ -LMS 알고리즘의 단점은 收斂 條件에서 μ_0 이외에 ρ 에도 제약이 가해진다는 것이다. 그러나 시뮬레이션 結果에서 보듯이, ρ 를 μ_0 보다 충분히 작게 設定해도 收斂 速度의 增加는 여전히 크므로, μ 가 LM S 알고리즘에 미치는 영향에 비하여 ρ 가 μ -LMS 알고리즘에 미치는 영향을 무시할 수가 있다. 그리고 μ -LMS 알고리즘의 適應 利得 μ 를 조정시키는 原理 그

자체가 벡타의 內積을 이용하는 客觀性을 지니므로, 기울기 벡타 ∇_n 의 구체적인 형태에 관계없이, μ -LMS 알고리즘도 LMS 알고리즘과 마찬가지로 普遍的인 알고리즘으로 사용 될 수 있다.

參 考 文 獻

- [1] I. D. Landau, "A survey of model reference adaptive techniques-theory and applications," *Automatica*, vol. 10, pp. 353-379, 1974.
- [2] D. P. Lindorff and R. L. Carroll, "Survey of adaptive control Liapunov design," *Int. J. control*, vol. 18, no. 5, pp. 897-914, 1973.
- [3] I. D. Landau, "A generalization of the hyper-stability conditions for model reference adaptive systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, pp. 246-247, April 1972.

- [4] P. L. Feintuch, "An adaptive recursive LMS filter, " *Proc. IEEE*, pp. 1622-1624. Nov. 1976.
- [5] C. R. Johnson, M. G. Larimore, "Comments on and additions to "adaptive recursive LMS filter", *Proc. IEEE*, pp. 1399-1402, Nov. 1976.
- [6] V. M. Popov, "The solution of a new stability problem for controlled systems, " *Automation and Remote Control*, vol. 24, pp. 1-23, Jan. 1963.
- [7] C. R. Johnson, "A convergence proof for a hyperstable adaptive recursive filter, " *IEEE Trans. Information Theory*, vol. IT-25, no. 6, pp. 745-749, Nov. 1979.
- [8] M. G. Larimore, J. R. Treichler, C. R. Johnson, "SHARF: An algorithm for adapting IIR digital filters, " *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. Assp-28, no. 4, Aug. 1980.
- [9] I. D. Landau, "Elimination of the real positivity condition in the design of parallel MRAS, " *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-23, no. 6, pp. 1015-1020, Dec. 1978.
- [10] B. Widrow, J. M. McCool, M. G. Larimore, C. R. Johnson, "Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter, " *Proc. IEEE*, vol. 64, no. 8, pp. 1151-1162, Aug. 1976.
- [11] J. G. Proakis, "Channel identification for high speed digital communications, " *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-19, no. 6, pp. 916-922, Dec. 1974.
- [12] J. G. Glover, "High order algorithms for adaptive filters, " *IEEE Trans. Communication*, vol. COM-27, no. 1, pp. 216-221, Jan. 1979.
- [13] R. G. Giltin, F. R. Magee, "Self-orthogonalizing adaptive equalization algorithms, " *IEEE Trans. Communications*, vol. COM-25, no. 7, pp. 666-672, July 1977.
- [14] E. R. Ferrara, B. Widrow, "The time-sequenced adaptive filter, " *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-29, no. 3, pp. 679-683, June 1981.
- [15] Eykhoff, *System Identification*. John Wiley and Sons. New York pp. 8, 1977.
- [16] B. Widrow and M. E. Hoff, "Adaptive switching circuits, " in 1960 WESCON Conv. REC., Pt. 4, pp. 96-140.
-