□ 技 術 動 向 □

이산시스템이론의 동향

崔 京 三*

차 례

1. 서 론

지난 30년간을 통하여 이산자동제어시스템 (離散自動制御systems)의 분야는 대단히 진보되었다. 이산특성을 갖는 그 시스템 자체도 실용면에서 볼 때 매우 중요하지만, 디지틀·컴퓨터를 광범위하게 사용할 수 있는 현 시점을 감안할 때 이산시스템이론은 연속시스템이론 (continuous systemthe theory)에도 큰 역할을 하고 있다.

즉, 연속시스템을 가지고 디지틀 컴퓨터를 사용하려면 먼저 연속시스템에 대응되는 이산형모델을 만들어야 하기 때문이다. 이러한 관점에서 이산시스템이론은 매우 중요하다 하겠다.

이 분야를 망라한 개관논문들 [1~3] 중에서 대표적인 것이 Jury 가 발표한 것이라고 볼 수 있는데, 이개관논문의 중요구성을 보면 ① 샘플치시스템의 해석과 합성 (141편**), ② 비선형샘플치시스템해석 (108편), ③ 최적비선형시스템해석 (57편), ④ 랜덤샘플링 (26편), ⑤ 이산형적응시스템 (adaptive pulsed system; 28편), ⑥ 디지틀 필터링 (25편), ⑦ 시퀀셜 머쉰 (15편)으로 되어있다.

(이하 괄호내의 숫자는 참고문헌 편수임)

* 正會員 : 弘益大 工大 電氣工學科 敎授 · 工博

본 원고에서는 E. I. Jury 가 미국기계학회의 100주년 기념강연회에서 강연하였던 내용을 주로하여 이산시스템이 발달되어 온 역사적 고찰과 연속시스템에 큰 역할을 하고 있는 이산이론* (discrete theory)을 소개하고, 그리고 연속이론과 이산이론과의 관계, 이산시스템의 기술향상, 및 이산시스템이론의 최근진 이산시스템이론을 이산이론, 연속시스템이론을 연속* 이론이라고도 칭함. 전경향을 간단히 소개하고자 한다.

2. 역사적 배경

샘플치제어시스템의 응용은 이론의 발달보다 훨씬 먼저 였다. 기록된 바에 의하면 그 첫번째 응용은 1793년경에 Paris에 사는 Abraham-Louis Breguet 가 초기에 만든 시계의 회전수를 정교하게 제어하기 위하여 정밀한 경도 (經度) 측정용 시계인 크로노미터 (Chronometer) 를 사용하여 고안한 " Pendule Sympathetique [4] 었다. 그래서 값비싼 시계와 같은 동작특성을 갖는 싼 시계를 만들 수 있게 되었다. 또 다른 보기는 1897년에 Gouy [5] 가 개발한 것인데 이는 정보

* 이산시스템이론을 이산이론, 연속시스템이론을 연속이론이라고도 칭함.

의 이산적인 응용에 기본을 둔 오븐조절기(oven regulator)이다. 1941년에는 궤환증폭기에 샘플링을 사용하였고,[6] 라디오송수신기의 안정도를 개선하기 위하여 역시 샘플링을 사용하였다. 그리고 역사적으로 볼 때 흥미있는 것은 1934년에 Hazen 이 샘플치 시스템이 산업에 응용될 것을 일찌기 예견한 바 있었다.[7]

샘플치시스템이론은 2차세계대전 (1939-1945년) 동안에 레이더 (radar) 의 응용과 더불어 급속히 발전되었다. 이러한 결과로 대표적인 두 개의 문헌이 발표되었는데 그 하나가 Hurewicz 가 쓴 MIT Radiation Series 중에 제 25권의 제 5장 [8] 이고,다른 하나가 Macoll 이 쓴 " Fundamental Theory of Servomechanism " 중의 제 10장 [9] 이다. Hurewicz 의 접근법이 후에 Z - 변환으로 발전하게된 동기가 되었고, MaColl 의 접근법은 임펄스변조를 위한 무한주파수접근법 (infinite frequcency approach)의기초가 되었다. 이와는 별도 Lawden 등 [10] 과 Barker 도 Z- 변환과 유사한 접근법을 발표하였다.

앞에서 언급한 바와 같이 레이더의 응용으로 서구에서는 샘플치시스템의 이론을 발전시키는 동안에 소련에서는 Tsypkin 이 릴레이제어시스템에 관한 그의 연구를 통하여 역시 이 이론을 발전시켰다. 어떻게 샘플치시스템이 릴레이제어시스템의 안정도에 중요한 역할을 하는가를 4장에서 간단히 다루기로 한다.

본격적인 이산치시스템의 연구는 Ragazzini 와 Zadeh [11] 가 Z - 변환의 공식적인 정의를 발표하면서 시작되었다. Z- 변환법이 샘플링순간에 시스템의 응답을 얻기 위하여 사용되는 동안에 Jury [21] 는 Barker 의 수정된 시퀀스 접근법을 확장시켜 샘플링순간 외에 모든 시간에서도 응답을 구할 수 있는 변형된 Z-변환법(modified Z-transform method) 을 발표하였다. Z- 변환과 변형된 Z- 변환의 자세한 것은 참고문헌 [14] 와 [15] 를 참조하기 바란다.

3. 연속시스템의 이론적인 면에서 본 이산시스템이론

3장에서는 이산이론을 발전시키기 위하여 개발된 Z- 변환과 변형된 Z- 변환의 연속시스템에의 응용과, 이산이론에서 유도된 inners 개념과 연속이론과의 관계를 간략하게 살펴 보고, 그리고 Poincaré 가 제창한 point mapping 이 비선형 연속 시스템을 해석하는데 어떻게 응용되는가를 알아 보기로 한다. 이러한 몇가지 방법들이 연속이론과 더불어 연속시스템에 접근하는 기법들로 사용된다.

3-1 Z - 변환과 변형된 Z - 변환 이론

Z- 변환이론이 주로 샘플치시스템에 사용되어 온 이후, 시간지연요소가 있거나 또는 없는 연속시스템에 확정입력(deterministic input)이 인가된 경우에 응답을 구하는 데에도 Z- 변환이 적용되게 되었다. 즉, 샘플치모델이 연속시스템의 근사화된 모델로 사용되었다. 그리고 연속시스템에서 모든 시간에서 응답을 알 수 있는 바와 같이 이와 같은 접근법의 응용으로서 변형된 Z- 변환이 사용되었다. 특히, 연속시스템에 주기입력이 인가되었을 때에 정상응답과 실제의 응답을 구하는 경우에는 효율적으로 이용되었다.[16~19]

릴레이제어시스템을 해석할 때 주기적인 해(解)또는 리밋트 사이클(limit cycle) 을 구하고자 하는 경우에 변형된 Z- 변환을 사용한다. Hsu 등 [20] 은 여러형의 릴레이시스템에 대하여 해석한 바 있다. 또한 변형된 Z- 변환법은 수렴하는 무한급수의 화(和) [21] 와 생체제어시스템으로 안구운동의 연구[22], 및 혼합된 선형차분 - 미분방정식의 해 [23] 를 구하는 데에도 사용된다. 변형된 Z- 변환에 기반을 둔 또 다른 연구중에 하나로서 샘플링주기에 영향을 받은 가제어(可制御)와 가관측(可觀測) 의 개념이 명백하게 된 것은 [24] 괄목할 만한 것이다.

3-2 Inners 개념

임의의 정방행열의 inners 에 대한 개념은 약 20 년전에 Jury 에 의하여 도입되었다. 그 동기는 이산시스템의 안정도연구에서 비롯되었다. 그리고 이 개념이 안정도판별과 연속형 및 이산형 양쪽 이론에 관련되는 문제들의 특징을 단일화할 수 있는 장점을 갖고 있을 뿐만 아니라 이 개념이 연속이론에도 영향을 미치고 있다는 것이 밝혀 졌다. 지난 20년간 이 개념에 관한 연구 [25] 가 많이 진척되었고, 이 분야를 개괄한 문헌 [26] 도 발표되었다.

$$F(z) = a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0,\ a_4 > 0 \quad (1)$$

식(1)의 다항식으로 표시된 선형연속시스템과 샘플치시스템의 안정도 특성을 단일화하는 문제를 검토하여 보자.

Liénard-Chipart [27] 에 의하면 안정조건은 좌반평면에서

$$a_k > 0,\quad k = 0,1,2,3 \quad (2)$$

식(2)이고, Hurwitz 행열에서는

$$\Delta_3 = \left[\begin{array}{ccc} \underset{\Delta_1}{a_3} & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{array}\right] \quad (3)$$

$$|\Delta_1| > 0, \quad |\Delta_3| > 0 \quad (4)$$

식(3)과 (4)가 된다. 이 Hurwitz 행열의 inner 형(形)은 inner-minor array 변환 [25] 을 통하여

$$\Delta_1^1 = \left[\begin{array}{ccc} a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & \underset{\Delta_1^1}{\boxed{a_3}} & a_1 \\ a_3 & a_1 & 0 \end{array}\right] \quad (5)$$

식(5)와 같이 쓸 수 있다. 이 행열로부터 얻은 안정조건은 Δ_3^1이 PI (positive innerwise), 즉

$$|\Delta_1^1| > 0, \quad |\Delta_3^1| > 0 \quad (6)$$

식(6)이 된다. 여기서 식(3)과 (6)의 조건이 같다는 점에 유의하여라.

식(1)의 다항식에서 Anderson-Jury [28] 에 의하면 단위원내의 안정조건은

$$F(1) > 0, \ F(-1) > 0, \ 4(a_4 - a_0) + 2(a_3 - a_1) > 0, \ 4(a_4 - a_0) + 2(a_1 - a_3) > 0 \quad (7)$$

식(7) 과

$$\Delta_3^- = X_3 - Y_3 = \left|\begin{array}{ccc} a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_4 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{array}\right|$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} a_4 & a_3 & a_2 - a_0 \\ 0 & \boxed{a_4 - a_0}\ \Delta_1^- & a_3 - a_1 \\ -a_0 & -a_1 & a_4 - a_2 \end{array}\right] \quad (8)$$

식(8)의 행열 Δ_3^-가 PI, 또는

$$|\Delta_1^-| > 0, \quad |\Delta_3^-| > 0 \quad (9)$$

식(9)가 된다. 행열 Δ_3^-를 minor array 형으로 변환하면(즉, inner Δ_1^-이 제일 첫번째의 minor array가 되고 이 행열들의 행열식의 값들은 같다.) 변환된 행열의 배열은 다음과 같다.

$$\left[\begin{array}{ccc} \underset{\Delta_1^-}{a_4 - a_0} & 0 & a_3 - a_1 \end{array}\right.$$

$$\Delta_3^- = \left|\begin{array}{ccc} a_3 & a_4 & a_2 - a_0 \\ a_1 & a_0 & a_4 - a_2 \end{array}\right]$$

여기서 단위원과 좌반평면에 대한 inner 형(形)들을 비교하여 보면 제 2행의 첫번째원소가 각각 "0"이므로 양쪽의 특성을 단일화하여 보여 주고 있음을 알 수 있다.

Inners 개념을 이용하므로서 기여되는 바를 요약하면 다음과 같다.

① 이산형과 연속형 안정도판별법의 통합가능

② Schur-complement [29], Sylvester 정리의 일반화 등과 같은 수학적인 새로운 결과 유도

③ Inners를 기본으로 한 Lyapunov의 제 2판별법의 다른 유형 유도

④ 안정도판별법의 간단화 [28]

⑤ 하나의 계산알고리즘으로 연속시스템과 이산시스템에 적용 가능

Tsypkin은 이산시스템분야에 대한 그의 연구업적으로 적응(適應), 동정(同定) 및 학습(學習) 시스템들의 관계와 많은 개념들을 통합한 공식들과 알고리즘들을 발표한 바 있다.[30] 따라서 이산이론이 연속이론에 영향준 바는 크다.

3-3 Point Mapping 응용

미분방정식으로 표시될 수 있는 부류의 시스템에 접근하는 방법의 하나로서 이산시간에서 발생되는 상태들로 그 시스템의 운동을 공식화하는 방법을 생각할 수 있다. 그래서 이 시스템의 동특성을 미분방정식보다는 차분방정식으로 표기하는 것이 의미있는일이다. 이러한 미분방정식에 대응되는 차분방정식 **을 구하기 위하여Hsu등[31~34] 은 임펄스입력을 사용하였다. 이 방법을 일정한, 예를 들면,릴레이시스템과 같은 비선형시스템에 적용시키는 경우에는 변형된 Z-변환과도 밀접한 관계를 갖는다.

Poincaré [35] 가 n 차원동적시스템을 $(n-1)$차원으로 축소하는 연구를 하다가 처음으로 point mapping의 아이디어를 도입하였다. 주기적인시스템의 연구에 이산시간 접근법을 사용하므로서의 장점은 이 개념을 도입하므로서 시간영역에서의 종속관계를 소거 시킬 수 있는 점이다. 이러한 특성은 주기적인 해를 구하는 문제를 함수공간에서 시간의 함수로 구하는 것보다 쉬운 대수방정식의 해를 구하는 문제로 간편화시킬 수 있기 때문에 해를 용이하게 결정할 수 있고, 그리고 안정도특성의 검토가 용이한 장점을 갖

** Point mapping이라고 함.

고 있다. 일반적인 동적시스템으로 부터 정확한 차분방정식을 구하기는 어려우므로 mapping 을 얻기 위하여는 통상 근사법을 사용하게 된다. 이러한 근사법 [34,36] 과 원하는 정도(精度)로 근사화시키는 방법 [37] 은 발표된 바 있다. 이러한 까닭에 차분방정식을 검토하므로 인하여 역으로 연속시스템의 특성에 관한 정보도 얻을 수 있다.

point mapping 의 아이디어를 간단히 검토하기 위하여

$$\dot{\underline{x}}(t) = F[\underline{x}(t),\ t] \tag{10}$$

식 (10) 으로 표시되는 동적시스템을 생각하여 보자. 여기서 임의의 주기의 끝에서 이 시스템의 상태를 그 주기의 초기상태로 표시할 수 있다고 가정하면 이 문제를

$$\underline{x}(n+1) = G[x(n)],\quad n: \text{정수} \tag{11}$$

식 (11) 의 차분방정식으로 표시할 수 있는 시스템의 문제로 바꿔서 생각할 수 있다. 주어진 함수 F에 대하여 식 (11) 의 함수 G는 경우에 따라 정확히 또는 근사적으로 결정된다. 근년에 이러한 근사법으로 mapping에 관한 연구가 위상수학과 미분기하 [38] 에 근거를 둔 "diffeomorphism" 이론의 유형을 본 따고 있다. 최근에 Hsu [39,40] 는 2차 및 고차인 동적시스템의 point mapping에 대하여 Poincaré 의 인덱스이론(theory of index) 과 유사한 인덱스이론을 발전시키고 있다.

4. 이산시스템이론의 극한인 경우로서의 연속시스템이론

4장에서는 샘플링주기가 0에 접근할 때 이산시스템이론의 극한으로서 두 가지 경우를 검토해 보기로 한다. 첫번째로는 비선형계통의 안정도와의 관련으로 즉, Popov의 판별법 [41] 을 이산시스템에서 Jury-Lee 판별법 [42] 의 극한인 경우로서 얻을 수 있는 경우와, 두 번째는 불확정시스템(stochastic systems) 에서 이산시스템이론의 극한인 경우로서의 연속시스템이론을 유도하는데 있어 그 타당성과 타당성의 결여 여부를 살펴 본다. 여기선 깊이 다루지는 않지만 이산이론의 극한인 경우로 부터 이에 대응되는 연속이론을 유도해 내는데에는 어려움이 있다는 것을 부언하여 둔다.

4-1 절대안정도 판별법

1959년에 Popov 가 절대안정도에 관하여 연구하였던 그림-1의 유형인 연속비선형제어시스템에 대하여 생각해 보기로 한다. 그림 1에서 $\phi(\sigma)$ 는

$$\phi(0) = 0 \tag{12}$$

$$\sigma\phi(\sigma) > 0 \quad \text{단,}\ \sigma \neq 0 \tag{13}$$

식 (12) 와 (13) 의 조건을 만족하는 비선형 연속함수이다. Popov의 정리에 의하면 이 시스템의 절대안정

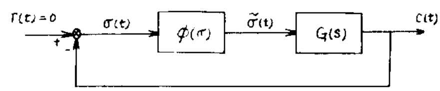

그림 1. 비선형연속 제어시스템

조건은 $(-\infty, \infty)$ 구간의 모든 실수 w에 대하여

$$R_e\ G(j\omega)[1 + j\omega q_c] \geq 0 \tag{14}$$

식 (14) 를 만족하는 (−) 가 아닌 q_c가 존재하여야 한다는 것이다. 그림 1의 시스템이 연속시스템이지만 샘플링주기 T가 매우 작은 경우에는 그림 2의 샘플치시스템으로 표시할 수 있다. 그리고 Popov의 정리

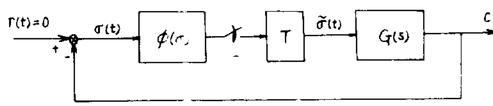

그림 2. 비선형샘플치 제어시스템

는 Jury-Lee의 안정도판별법의 극한인 경우로 유도가능하다. 그림 2에서 선형플랜트 $G(s)$ 에 인가된 신호의 Laplace 변환을

$$\begin{aligned} L[\tilde{\sigma}(t)] &= z[T\phi\{\sigma(nT)\}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T\phi[\sigma(nT)]\cdot Z^{-n},\ \text{단}\ Z = \varepsilon^{Ts} \end{aligned} \tag{15}$$

식 (15) 로 쓸 수 있는데, 이 식에서 $T \to 0$ 로 극한을 취하면 $nT \to t$ 가 되어

$$\begin{aligned} \lim_{T\to 0} L[\tilde{\sigma}(t)] &= \int_0^{\infty} \phi[\sigma(t)]\,\varepsilon^{-st}dt \\ &= L[\phi\{\sigma(t)\}] \end{aligned} \tag{16}$$

식 (16) 을 얻을 수 있다. 그리고 입력 $r(t) = 0$인 궤환루프시스템에서 비선형요소 $\phi(\sigma)$ 에 가해지는 신호들은 선형플랜트의 출력신호와 같고, 그림 1 에서 $G(s)$ 에 인가된 신호의 Laplace 변환이 식 (16) 으로 주어지기 때문에 $T \to 0$인 극한의 경우에는 연속

시스템과 샘플치시스템의 응답과 그 동특성이 일치한다는 것을 알 수 있다. 그러므로 Popov 가 고려했던 연속시스템을 $T\to 0$인 극한의 경우에 이에 대응하는 Γ_1 유형 *** 의 샘플치시스템으로 간주할 수 있다.

다음으로 그림 2에서 Z-변환이

$$G_d(Z)=z[TG(s)]=\sum_{n=0}^{\infty}Tg(nT)\varepsilon^{-nTS}|Z=\varepsilon^{TS}$$

단, $g(t):G(s)$의 임펄스응답 (17)

식 (17) 과 같은 선형플랜트블록을 생각하여 보자. Γ_1 유형의 샘플치시스템에 Jury-Lee 의 안정도이론을 적용하여, 구간 $(-\pi/T,\ \pi/T)$ 내의 모든 ω에 대하여

$$R_eG_d(\varepsilon^{j\omega T})\{1+Tq_d(T)[\frac{\varepsilon^{j\omega T}-1}{T}]\}+\frac{1}{K}$$

$$-\frac{T^2q_d(T)K'}{2}\cdot|\frac{\varepsilon^{j\omega T}-1}{T}\cdot G_d(\varepsilon^{j\omega T})|^2\geq 0 \qquad (18)$$

식 (18) 을 만족하는 (—) 가 아닌 $q_d(T)$가 각 T 값에 대하여 존재한다면 이 샘플치시스템이 절대안정하다는 것을 알 수 있다.

$T\to 0$인 극한의 경우에 이 시스템에 대한 안정도 판별기준을 구하기 위하여 식 (18) 의 부등식 좌변의 각 항의 극한을 구하면 식 (17) 로 부터

$$\lim_{T\to 0}G_d(Z)=\lim_{T\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}Tg(nT)\varepsilon^{-nTS}$$

$$=\int_0^{\infty}g(t)\ \varepsilon^{-st}dt=G(s) \qquad (19)$$

또한, $\lim_{T\to 0}G_d(\varepsilon^{j\omega})=G(j\omega)$ (20)

그리고, $\lim_{T\to 0}\frac{\varepsilon^{j\omega T}-1}{T}=j\omega$ (21)

식 (21) 의 관계를 얻는다. 그리고 식(18)을 T를 독립변수로 하는 부등식으로 보면 T의 값에 대하여 (—) 이 아닌 유한한 $q_d(T)$ 가 존재하거나 또는 이 시스템이 절대안정이 아니던지 둘 중에 하나일 것이다. 즉, $T\to 0$인 극한의 경우에는

$$q_c=\lim_{T\to 0}Tq_d(T) \qquad (22)$$

식 (22) 의 q_c 가 (—) 가 아닌 유한한 값으로 주어지거나 또는, 이 시스템이 절대안정이 되지 못한다. 유한한 q_c 가 존재하는 경우에는

$$\lim_{T\to 0}\frac{T^2q_d(T)K'}{2}=\lim_{T\to 0}\frac{Tq_cK'}{2}=0 \qquad (23)$$

이므로, 식 (19) ~ (21) 과 (23) 을 식 (18) 에 대입하여

$$R_eG(j\omega)[1+j\omega q_c]+\frac{1}{K}\geq 0,\ -\infty\leq\omega\leq\infty \qquad (24)$$

식 (24) 를 얻을 수 있다. 그래서 샘플치시스템의 응답과 특성이 극한의 경우에 연속시스템의 응답과 특성에 접근되므로 이 경우에는 동일한 안정도판별법을 사용할 수 있다는 것을 알 수 있다.

4-2 불확정차분방정식의 극한인 경우로서의 불확정미분방정식

불확정이산시스템 (stochastic discrete systems) 에 극한인 경우를 적용시킬 때 유의하여야 할 경우로 Åstrom이 발표한 내용 [43] 을 참고로 간단히 검토하고, 그리고 Tsypkin 의 연구에 대하여 약술하기로 한다.

확정이산시스템 (deterministic discrete system) 을

$$\underline{x}(t+1)=g[\underline{x}(t),t],\quad t\in T \qquad (25)$$

단, T : 정수의 집합

식 (25) 로 표기할 때 이를 불확정모델로 전환시키는 경우에 $\underline{x}(t+1)$를 t와 $\underline{x}(t)$의 종속확율변수로 가정하면, 불확정모델을

$$\underline{x}(t+1)=g[\underline{x}(t),t]+v[\underline{x}(t),t],\ t\in T \qquad (26)$$

식 (26) 으로 쓸 수 있다. 이 식에서 g는 $\underline{x}(t)$가 주어졌을 때에 $\underline{x}(t+1)$의 조건부확율평균이고, v는 평균이 0인 불규칙변수이다. g가 $\underline{x}(t)$의 과거값들의종속함수가 아닌 경우에 식 (26) 을 불확정차분방정식이라고 부른다.

식 (25) 의 극한의 경우인 미분방정식으로 표시되는 확정상태모델을 생각하여 보자

$$\dot{\underline{x}}(t)=f[\underline{x}(t),t] \qquad (27)$$

식 (27) 의 확정모델로 부터 불확정상태모델을 구하기 위하여 식 (26) 과 유사하게 $\dot{\underline{x}}$를 확율분포가 시간과

*** 그림 2와 같이 선형플랜트를 갖는 샘플치비선형시스템에서 비선형요소가 다음 세조건을 만족할때 Γ_1 유형이라고 한다. ① $\phi(0)=0$; ② $0<\frac{\phi(\sigma)}{\sigma}<K,\ \sigma\neq 0$; ③ $|\frac{d\phi}{d\sigma}|<K'$
단, K' : 함수 $\phi(\sigma)$의 기울기

그 시간에서의 상태벡터값으로 유일하게 결정되는 확율변수라고 가정한다. 그러면 불확정상태모델을

$$\dot{\underline{x}}(t) = f[\underline{x}(t), t] + v[\underline{x}(t), t] \tag{28}$$

단, $\{v(\underline{x}, t),\ t \in T\}$: 평균이 0인 확율과정

식 (28)로 기술할 수 있다. 식 (28)과 (27)을 비교하므로서 두 모델의 해(解)의 차이가 자승평균으로 0이고, 위에서 고려한 극한의 경우에 원하는 특성을 갖는 불확정모델을 만들수 없음을 Åstrom은 지적한 바 있다.[43]

그러면 보편타당한 불확정미분방정식을 유도하기 위하여

$$\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t) = f(\underline{x}, t)h + \underline{o}(h) \tag{29}$$

식 (29)의 극한을 취하므로서 (h로 나누고 $h \to 0$) 미분방정식을 얻을 수 있다. 식 (29)가 차분방정식이므로 앞에서 한 바와 같이 식 (29)의 우변에 잡음(외란)을 가하므로서

$$\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t) = f(\underline{x}, t)h + \underline{v}(t+h) - \underline{v}(t) + \underline{o}(h) \tag{30}$$

식 (30)과 같이 불확정차분방정식을 얻을 수 있다. Åstrom은 $h \to 0$의 극한을 취하여

$$d\underline{x} = f(\underline{x}, t)\, dt + \sigma(\underline{x}, t)\, d\omega \tag{31}$$

단, σ: 분산(分散)

$\{\omega(t), t \in T\}$: 단일 분산 매개변수를 갖는 Wiener 확율과정

식 (31)의 불확정미분방정식(연속불확정모델)을 유도하였다.[43]

Tsypkin[30]은 이산시스템의 극한의경우로서 연속적응알고리즘(continuous adaptive algorithms)을 구하였다. 그리고 이와 유사한 학습알고리즘을이산의 경우와 극한의 경우로서의 연속인 경우 각각에 대하여 유도하였다. Tsypkin이 사용한 불확정미분방정식이라는 용어의 의미와 Åstrom이 사용한 불확정미분방정식과는 의미가 다르다는것을 유의하기 바란다.

그리고 불확정시스템에 극한과정을 적용시키므로서 더 어려운 문제들이 생기는 다른 경우들이 있음을 부언하여 둔다.

5. 이산시스템의 기술향상

이산시스템의 중요성은 실제응용의 실현성 때문에 높이 평가된다. 특히 디지틀 컴퓨터분야의 기술향상으로 이산시스템의 실용이 더욱 증가되고 있다.

최근에 마이크로프로세서와 마이크로 컴퓨터의 새로운 개발로 인하여 제어분야에 혁신을 가져왔고, 디지틀 필터분야에도 큰 변화를 가져 오게 되었다.

이러한 혁신중에 하나는 집적회로의 개발로 인하여 컴퓨터 및 전자장치들의 크기가 작아지고 저렴한 가격으로 만들 수 있는 구조적 변화이고, 또 하나는 마이크로프로세서를 도입하므로서 제어와 학습알고리즘을 실제 프로세스로 적용할 수 있는 계산상의 융통성과 적응성이 있기 때문에 이론과 실제와의 간격을 줄이는데 크게 기여한 것이다.

디지틀 컴퓨터가 사용되는 일 예로 산업공정에 사용되고 있는 DDC(direct digital control) 분야를 보자. 이 분야에 있는 사람들은 누구나 디지틀 제어용 프로그램을 짜서 사용하고 있다. 디지틀 PID제어기를 일 예로 보면, PID 알고리즘을 디지틀화하면 샘플링시간사이에서는 정보를 잃게 되므로 아날로그형만큼 잘 수행되지 못하는 것은 당연지사이다. 그러나 정보손실의 단점이 최소가 되도록보완하는 프로그램을 개발한 디지틀 PID제어기는 융통성과 적응성이 있는 장점을 갖게 된다. 이러한 보기로서 Auslander 등[44]의 "Stand-alone digital controllers"를 들 수 있는데, Auslander 등은 Z-변환이론과 상태공간법을 이 문제를 해석하는데에 훌륭히 적용시켰다.

6. 이산시스템이론의 최근동향

근년에 와서 2차 또는 다차원 디지틀 필터에 집중된 연구발표를 볼 수 있다. 이 디지틀 필터는 영상처리과정, 사진자료의 계수화(計數化), 지진, 중력 및 자기(磁氣)데이터의 조사·분류·처리를 요하는 지구물리학 등의 많은 분야에 응용되고 있다. 이로서 최근 10년간에 디지틀 필터의 분야가 급속히 성장한 것을 볼 수 있다.

일차원의 디지틀 필터의 이론은 상태공간법과 Z-변환에 기초를 두고 있다. 다차원의 디지틀 필터이론은 일차원 이론과는 대조적으로 이산형으로 전개된다. 선형다차원의 이산이론은 주로

$$z[f(n, m, k, \cdots\cdots, l)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(n, m, k, \cdots l)\, z_1^{-n}\, z_2^{-m}\, z_3^{-k}\cdots \tag{32}$$

식 (32)와 같이 정의된 다차원의 Z-변환에 기반을 두고 있다. 역사적으로 보면 이러한 유형은 다변수발생

함수 (multivariate generating function)[45] 로서 확율이론에 사용되어 왔다. 다차원의 Z-변환과 변형된 Z-변환이론[46~49]은 다차원의 Laplace 변환[50]과 유사하다. 이와 더불어 다차원의 상태공간법이 근래에 발전을 보이고 있다.[51~53]

최근에 디지틀 필터의 안정도[54]와 다차원이론[55]에 관한 논문들이 발표되었고, Willsky 는 디지틀 신호처리와 제어 및 추정이론과의 관계[56,57]를 연구하였고, 제어이론에 응용에 관한 책[58,59]들도 발행되었다.

7. 결 론

이산자동제어시스템은 그 시스템 자체도 중요하지만 디지틀 컴퓨터가 광범위하게 사용되는 현 시점을 감안할 때 연속시스템에 대응되는 시스템으로서도 중요하므로 이산이론의 중요성은 더욱 강조되고 있다.

3장에서 취급한 이산이론이 연속이론에 미친 영향에 관한 토론은 매우 중요하다. 또한 지난 10년간에 제어와 이에 관련된 분야에서 많이 발표된 문헌과 책 등을 통하여 이산이론이 중시되고 있는 것을 볼 수 있다. 4장에서는 극한의 경우를 검토하므로서, 이 외의 특정한 경우에는 그 접근이 어렵기 때문에 이 어려운 문제를 극복하고 명확히 밝히기 위하여 이 분야의 연구가 더욱 요청되고 있음을 알았다. 5장에서는 디지틀 컴퓨터, 특히 마이크로 컴퓨터의 기술향상으로 제어분야에 많은 변동을 가져오고 있음을 보았다. 6장에서 취급한 다차원의 이산이론 분야는 새로운 이론 발전에 촛점을 모으고 있고, 이 영역은 아직 유아기에 있기 때문에 앞으로 많은 연구가 수행되어야 할 것이다.

이상으로 이산시스템이론의 동향을 살펴 보았지만 이것이 전체의 일부임을 첨언하여 둔다.

참 고 문 헌

[1] H. Freeman and O. Lowenchuss; "Bibliography of Sampled-Data Control Systems and Z-Transform Applications," IRE Trans. on AC, vol. PGAC-4, pp. 28-30, 1958.

[2] E.I. Jury; "Status of Sampled-Data Systems," AIEE Transactions Communications and Electronics, vol. 79, Part I, pp. 769-777, 1960.

[3] E.I. Jury and Ya. Z. Tsypkin; "On the Theory of Discrete Systems," IFAC Journal of Automatica, vol. 7, no. 1, Jan. 1971, pp. 89-107.

[4] Otto Mayr; "The Origins of Feedback Control," MIT Press, Cambridge, MA, 1970.

[5] G. Gouy; "On Constant Temperature Oven," J. Physics 6, pp. 975-983, (1897)

[6] G. Guanella, "Electrical Oscillations Translating Systems," U.S. Patent 2, pp. 253, 976 Aug. 26 (1941).

[7] H.L. Hazen; "Theory of Sevomechanisms," Jour. Franklin Inst. pp. 218-297, 1934.

[8] H.M. James, et al.; "Theory of Sevomechanisms," MIT, Rad. Lab. Series, vol. 25 (Chapter 5 by W. Hurewicz); McGraw Hill, New York, (1947)

[9] L.A. MacColl; "Fundamental Theory of Sevomechanisms," Chapter X Van Nostrand, New York (1945)

[10] D.F. Lawden; "A General Theory of Sampling Sevomechanisms," Proc. IEE, London, vol. 98, Part IV, Oct., 1951, pp. 31-36.

[11] R.H. Barker; "The Pulse Transfer Function and its Application to Sampling Servomechanisms," Proc. IEE, London, 99, Part IV, 302-317 (1952)

[12] J.R. Ragazzini and L.A. Zadeh; "The Analysis of Sampled-Data Systems," AIEE Trans., vol. 71, Part II, Nov. 1952, pp. 225-234.

[13] E.I. Jury; "Synthesis and Critical Study of Sampled-data Control Systems," AIEE Trans., vol. 75, Part II, pp. 141-151, 1956.

[14] J.R. Ragazzini and G. Franklin; "Sampled-Data Control System," McGraw-Hill Book Co., New York, 1958.

[15] E.I. Jury; "Theory and Application of the z-Transform Method," R. Kreiger Pub. Co., Huntington, New York, 1973.

[16] E.I. Jury; "A note on the Steady-State Response of Linear Time-invariant Systems," IRE Proc., vol. 48, no. 5, May 1960.

[17] B.C. Kuo; "Analysis and Synthesis of Sampled-data Control Systems," Prentice-Hall, Inc., 1963.

[18] E.I. Jury; "Sampled-data Control Systems," R. Kreiger Pub. Co., Huntington, New York, 1977.

[19] B.C. Kuo; "Digital Control Systems," Holt,

Rinehart and Winston, Inc., 1980.

[20] J.C. Hsu and, A.U. Meyer; "Method Control Principles and Applications," McGraw-Hill Pub. Co., 1968 (ch. 8).

[21] E.I. Jury and M.A. Pai; "On the Summation of $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n^k}$ and its associated integrals," J. Franklin Inst., vol. 271, no. 2, Feb., 1961.

[22] E.I. Jury; "Hidden Oscillations in Sampled-data Control Systems," Trans. of AIEE, vol. 75, Part II, 1956, pp. 391-395.

[23] M.A. Pai; "The Operational Solution of Difference-Differential equation using the modified z-Transform," IRE, PGAC, Oct., 1962, pp. 124-126.

[24] R.E. Kalman; "Mathematical Description of Linear Dynamical Systems," Journal on Control Series A, vol. I, no. 2, SIAM, 1963.

[25] E.I. Jury; "Inners and Stability of Dynamic Systems," John Wiley & Sons, Inc., 1974.

[26] E.I. Jury; "Theory and Applications of the Inners," Proc. of the IEEE, vol. 63, no. 7, pp. 1044-1069, July, 1975.

[27] A. Liénard and M.H. Chipart; "Sur La Signe de la partie réelle des racines dune équation algebrique," J. Math. Pure. Appl., vol. 10, pp. 291-346, 1914.

[28] B.D.O. Anderson and E.I. Jury; "A Simplified Schur-Cohn Test," IEEE Trans. on A-C, vol. AC-18, pp. 157-163, Apr., 1973.

[29] S. Barnett and E.I. Jury; "Inners and Schur-Complement," Linear Algebra and Its Applications 22, pp. 57-63 (1978).

[30] Ya. Z. Tsypkin; "Adaptation and Learning in Automatic Control," Academic Press, New York, London, vol. 73 (1971). Translation from the Russian edition of 1968.

[31] C.S. Hsu and et al; "Determination of Global Regions of Asymptotic Stability for Difference Synamical Systems," Journal of Applied Mechanics, vol. 44, 1977, pp. 147-153.

[32] C.S. Hsu and et al; "Steady-State Response of a Nonlinear System Under Impulsive Periodic Parametric Excitation," Journal of Sound and Vibration, vol. 50, 1977, pp. 95-116.

[33] C.S. Hsu; "On Nonlinear Parametric Excitation Problems," Advances in Applied Mechanics, vol. 17, 1977, pp. 245-301.

[34] C.S. Hsu; "Nonlinear Behaviour of Multibody Systems Under Impulsive Parametric Excitation," Dynamics of Multibody Systems, Editor: K. Magnus, Springer-Verlag, Proc. of IUTAM Symposium on Dynamics of Multibody Systems, Munich, Germany, 1977, pp. 63-74.

[35] H. Poincaré; "Surles Courbes Défines par les équations différentielles," J. Math. Pure Appl. Ser (3), vol. 7, 1881, pp. 375-422.

[36] J. Bernussou; "Point Mapping Stability," Pergamon Press, 1977.

[37] Henryk Flashner; "A Point Mapping Study of Dynamical Systems," Ph. D Dissertation, Dept. of Mechanical Engineering, University of Calif., Berkeley, 1979.

[38] L. Markus; "Lectures on Differentiable Dynamics," Regional Conference Series in Mathematics, no. 3, American Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1971.

[39] C.S. Hsu; "A Theory of Index For Point Mapping Dynamical Systems," To appear in the Journal of Applied Mechanics, 1980.

[40] C.S. Hsu; "Theory of Index For Dynamical Systems of Order Higher than Two," Submitted for publication, 1979.

[41] V.M. Popov; "Absolute Stability of Nonlinear Systems of Automatic Control," Avtomatika i Telemekhanika, vol. 22, no. 8, pp. 961-979, Aug., 1961.

[42] E.I. Jury and B.W. Lee; "On the Stability of a Certain Class of Nonlinear Sampled-data Systems," Trans. IEEE, PGTAC, IEEE Trans. on A-C, vol. AC-9, no. 1, pp. 51-61, Jan., 1964.

[43] K.J. Åstrom; "Introduction to Stochastic Control Theory," Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1970.

[44] D.M. Auslander and et al; Direct Digital Process Control. Practice and Algorithms for Microprocessor Application, Proc. of the IEEE, vol. 66, no. 2, Feb., 1978, pp. 199-208.

[45] W. Feller; An "Introduction to Probability Theory and Its Applications," John Wiley & Sons, New York (Second Edition) 1959, ch. XI.

[46] P. Alper; "Two Dimensional z-Transforms." Technological University Electronics Laboratory, Delft-Netherlands, Aug., 1963.

[47] A. Rault and E.I. Jury; "Nonlinear Sampled-data Systems and Multidimensional z-Transforms," Internal. Tech. Memo, M-112, Electronics Res. Lab., University of Calif., Berkeley, Feb. 11, 1965.

[48] H.A. Barker and S. Ambati; "Nonlinear Sampled-data System Analysis by Multidimensional z-Transforms," Proc. of IEE, Sept., 1972.

[49] A. Lavi and S. Narayanan; "Analysis of a Class of Discrete Nonlinear Systems using Multidimensional Modified z-Transforms," IEEE Trans. AC-13, 1968, pp. 90-93.

[50] J.K. Lubbock and V.S. Bonsal; "Multidimensional Laplace Transforms For Solution of Nonlinear Equations," Proc. IEE, Dec., 1979.

[51] R.P. Roesser; "A Discrete State-space Model for Linear Image Processing," IEEE Trans. Auto. Contr., vol. AC-20, pp. 1-10, Feb., 1975.

[52] E. Fornasini and G. Marchesini; "State-space Realization Theory For Two Dimensional Filters," IEEE Trans. Auto. Contr., vol. AC-21, pp. 484-492, Aug., 1976.

[53] S. Kung and et al; "New Results in 2-D systems Theory, Part II: 2-D State-space Models-realization and the notions of Controllability, Observability and Minimality," Proc. IEEE, vol. 65, pp. 945-961, June, 1977.

[54] E.I. Jury; "Stability of Multidimensional Scalar and Matrix Polynomials," Proc. of IEEE, vol. 66, no. 9, Sept., 1978, pp. 1018-1047.

[55] N.K. Bose; "Multidimensional Systems: Present State as an Indicator of Future Prospects. in Multidimensional Systems, Theory & Applications: ed. N.K. Bose, IEEE Press Book, 1979.

[56] A.S. Willsky; "Relationships between Digital Signal Processing and Control and Estimation Theory," Proc. IEEE, vol. 66, no. 3, Sept., 1978. pp. 996-1017.

[57] A.S. Willsky; "Digital Signal Processing and Control and Estimation Theory," MIT Press, Camb., Mass., 1979.

[58] I. Postelthwaite and A.G.J. MacFarlane; "A Complex Variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems," Springer Verlag, vol. 12, 1979.

[59] A.G.J. MacFarlane; "Frequency Response Methods in Control Systems," IEEE Press Book, 1979.