

# 多變數 制御系統의 極點配置를 위한 컴퓨터 알고리즘에 관한 研究

論 文  
31~4~3

## A Study on Computer Algorithm for Pole Assignment in Multivariable Control Systems

韓 萬 春\* · 張 成 煥\*\*  
(Man-Chun Han · Seong-Whan Jang)

### Abstract

The computer algorithm and program are developed to obtain the Luenberger Canonical form and the transform matrices for linear time invariant multivariable control systems.

The model controller of an eighth order system, which assigns the modes of the multivariable control systems and closed-loop matrices are computed numerically by the developed programs. It is shown that the computed results coincide with the Luenberger's and Kalman's method.

The gain of the model controller has varied from  $10^{-3}$  to  $10^5$  by the modes assignment of the open-loop system.

### 1. 서 론

다변수 제어시스템의 극점 배치 방법에는 상수 이득 케환과 동특성 보상기를 이용하는 2가지 방법이 있다. Jordan<sup>(1)</sup>, Gordon et al<sup>(2)</sup>, Retallack and Macfarlan<sup>(3)</sup>, Kalman<sup>(4)</sup> 등은 상태 케환을 이용한 상수 이득 케환 알고리즘을 제안하였고, 출력 케환을 이용한 상수 이득 케환에 관한 알고리즘은 Howze and Pearson<sup>(5)</sup>, Munro and Vardulakis<sup>(6)</sup>, Rosenbrock<sup>(7)</sup>, Davison and Chatterjee<sup>(8)</sup> 등에 의하여 제안되었다.

다변수 제어시스템의 설계에서는 원하는 제어량을 얻기 위한 케환 이득 행렬의 구성이 매우 중요하다. 그러나 동특성 보상기를 이용하는 방법보다 간편하고 사용하기 쉬운 컴퓨터 시뮬레이션 해석이 요구되므로 극점배치를 이용한 모델 제어를 구하기 위한 컴퓨터 프로그램의 개발이 요구된다.

본 논문에서는 극점 배치를 이용한 상수 케환 이득 행렬을 구하는 컴퓨터 프로그램을 개발하고, 8차모델을 선택하여 컴퓨터 시뮬레이션으로 구한 수치적 결과가 Luenberger 및 Kalman 방법의 이론치에 일치함을 입증하였고, 케환 이득 행렬과 페루우프 행렬을 구하였다. 또한 컴퓨터 알고리즘의 결과는 표준형 행렬을 구하는데 소요되는 계산시간을 크게 감소하였다. Luenberger방법에 비하여 새로운 알고리즘을 이용한 방법이 약 40%의 증산회수를 절감하였다.

### 2. 상태 케환을 이용한 극점 배치

#### 2.1 극점 배치를 위한 모델 제어기 선형 시불변 다변수 제어시스템

선형 시불변 다변수 제어시스템

$$\dot{X} = AX + BU \tag{2-1}$$

의 모드(Mode)는

$$|\lambda I_n - A| = 0 \tag{2-2}$$

의 근( $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ )이다.

여기서  $X$ 는  $n \times 1$  상태 벡터,  $U$ 는  $m \times 1$  입력 벡터

\* 正 會 員 : 延世大 工大 電氣工學科 教授 · 工博

\*\* 正 會 員 : 圓光大 工大 電氣工學科 助教授

接受日字: 1981年 11月 28日



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b_{\sigma_1,2} & b_{\sigma_1,3} & \dots & b_{\sigma_1,m} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & b_{\sigma_2,3} & \dots & b_{\sigma_2,m} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3-7)$$

식(3-7) 및 식(3-6)로부터 각각 다음식을 얻는다.

$$t_{\sigma_i} = \sum_{j=1}^l C_{ji} b_j \quad (3-8)$$

$$t_{\sigma_{l-j}} = A t_{\sigma_{l-j+1}} - \sum_{i=1}^m a_{\sigma_i, \sigma_{l-j+1}} t_{\sigma_i} \quad (3-9)$$

$$0 = A t_{\sigma_{l-K_l+1}} - \sum_{i=1}^m a_{\sigma_i, \sigma_{l-K_l+1}} t_{\sigma_i} \quad (3-10)$$

여기서  $C_{ji}=1, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, K_l-1, l=1, 2, \dots, m$  이다.

식(3-9)와 식(3-10)을 재정리하여 다음식을 얻는다.

$$t_{\sigma_{l-j}} = A^j t_{\sigma_l} - \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{j-1} a_{\sigma_i, \sigma_{l-j+k+1}} A^k t_{\sigma_i} \quad (3-11)$$

$$0 = A^K t_{\sigma_l} - \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{K_l-1} a_{\sigma_i, \sigma_{l-K_l+k+1}} A^k t_{\sigma_i} \quad (3-12)$$

여기서  $j=1, 2, \dots, m, l=1, 2, \dots, m$  이다.

식(3-8)로부터  $t_{\sigma_i}$ 를 식(3-12)에 대입하여 정리하면 다음식을 얻는다.

$$0 = A^{K_l} \left[ \sum_{j=1}^l C_{ji} b_j \right] - \sum_{k=0}^{K_l-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l (a_{\sigma_i, \sigma_{l-K_l+k+1}} C_{ij}) A^k b_i \quad (3-13)$$

또는

$$0 = A^{K_l} \left[ \sum_{j=1}^l \alpha_{ij} b_j \right] + \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{K_l-1} \alpha_{ik} A^k b_i \quad (3-14)$$

여기서  $C_{ji} = \alpha_{ij} K_l, \sum_{j=1}^l (a_{\sigma_i, \sigma_{l-K_l+k+1}} C_{ij}) = -\alpha_{ik}$

식(3-13) 및 식(3-14)에서  $C$ 와  $a$ 를 구하기 위하여 다음과 같이 가정한다.

- 1)  $C_{ji} = \alpha_{ij} K_l, l=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, l, C_{ii} = \alpha_{ii}, \kappa_i=1$
- 2)  $\sum_{j=1}^l C_{ij} a_{\sigma_i, \sigma_{l-K_l+k+1}} = -\alpha_{ik}, l=1, 2, \dots, m, i=1, 2, \dots, m, K=0, 1, \dots, K_l-1$

여기서  $K > K_l$  및  $K = K_l, i > l$ 인 경우

$\alpha_{ik} = 0$  이다.

위의 알고리즘으로부터 직접 변환행렬 및 Luenberger형 행렬을 구한다.

변환행렬  $T, T^{-1}$ 와 Luenberger 표준형 행렬  $\tilde{A}, \tilde{B}$ 를 구하는 컴퓨터 계산 흐름선도는 그림 3.1과 같다.

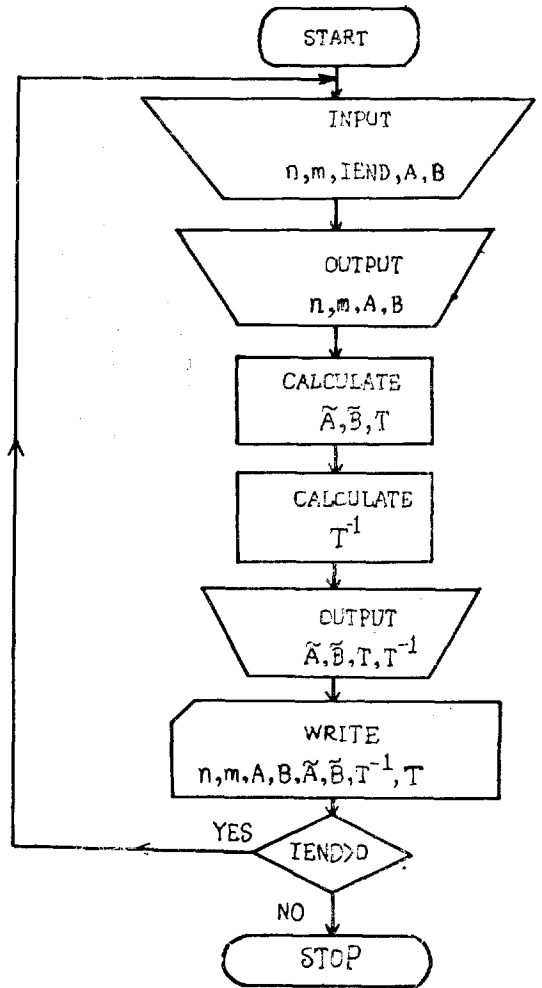


그림 3.1. Luenberger 표준형을 구하는 계산 흐름선도

Fig. 3.1. Flow chart for computing Luenberger canonical form

#### 4. Kalman 방법에 의한 극점 배치

식(3-3)에서 구한 변환행렬  $T$ 를 이용하여 새로운 상태벡터

$$X = TZ \quad (4-1)$$

를 정의한다.

식(2-1)과 식(4-1)에서 다음식을 얻는다.



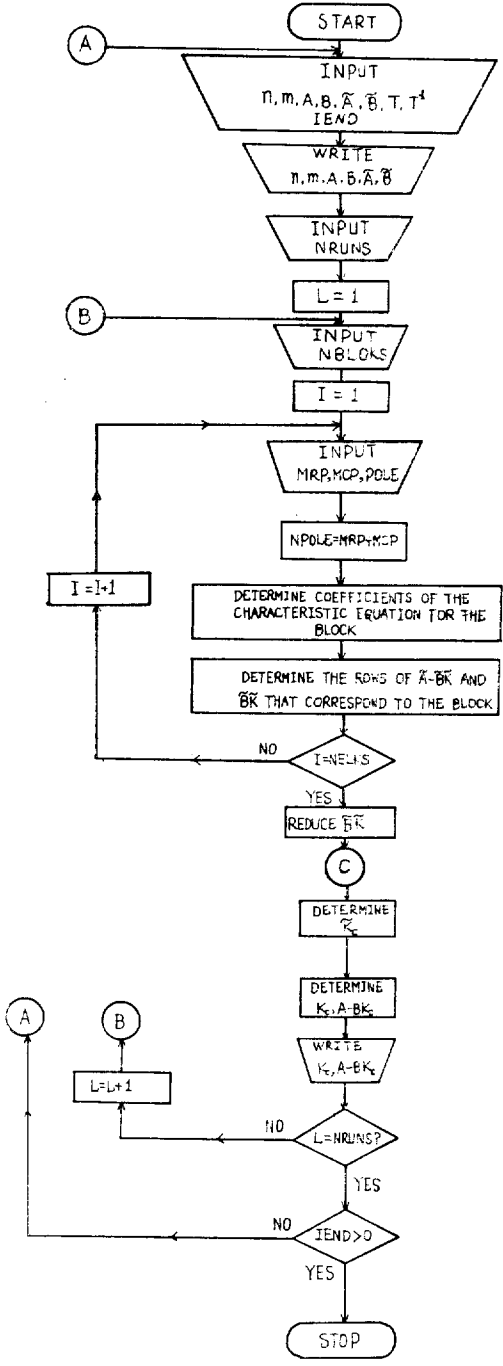


그림 4.2.  $K_c$ 와  $A-BK_c$ 를 구하는 계산흐름도  
Fig. 4.2. Flow chart for computing  $K_c$  and  $A-BK_c$ .

를 갖어 불안정 하므로 게루우프 극점 0.50428535는 -0.1로, -2.3581974는 -2.5로, -0.19357781±j 0.35173796은 -0.2±j 0.4로 각각 이동시키고, 극점

-17.5±j 21.857493(2중근)은 고정하여 페루우프 제어계통을 안정화한다.

그림 3·1의 컴퓨터 시뮬레이션에 의한 결과  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $T$ 와  $T^{-1}$ 는 각각 부록 1, 부록 2와 같다.

Luenberger형 페루우프 계통행렬의 블록구성 순서는 다음과 같다.

(1)  $(\bar{A}-\bar{B}K_c)$ 의 첫블록은 복소수 극점수가 2이고 실수 극점수가 2인 4×4 블록에 극점 ① = -0.2+j 0.4, 극점 ② = -0.2-j 0.4, 극점 ③ = -0.1, 극점 ④ = -2.5를 배치하였을때 특성방정식이  $\xi^4+3\xi^3+1.49\xi^2+0.62\xi+0.05$ 이고, 두번째 블록은 복소수 극점수가 4이고 실수 극점수가 0인 4×4 블록에 극점 ① = -17.5+j 21.8574, 극점 ② = -17.5-j 21.8574, 극점 ③ = -17.5+j 21.8574, 극점 ④ = -17.5-j 21.8574를 배치하였을때 특성방정식이  $\xi^4+612.5\xi^3+9535.7.054\xi^2+480197.4\xi+614649.6$ 이며,  $K_c$ 와  $(A-BK_c)$ 의 계산을 위한 그림 4·2의 컴퓨터 시뮬레이션결과는 부록 3과 같다.

(2)  $(\bar{A}-\bar{B}K_c)$ 의 첫블록은 복소수 극점수가 2이고 실수 극점수가 2인 4×4 블록에 극점 ① = -17.5+j 21.8574, 극점 ② = -17.5-j 21.8574, 극점 ③ = -6.1, 극점 ④ = -2.5를 배치하였을때 특성방정식이  $\xi^4+308.85\xi^3+1580.496\xi^2+2114.95\xi+196.0$ 이고, 두번째 블록은 복소수극점수가 4이고 실수 극점수가 0인 4×4 블록에 극점 ① = -0.2+j 0.4, 극점 ② = -0.2-j 0.4, 극점 ③ = -17.5+j 21.8574, ④ = -17.5-j 21.8574로 배치하였을때 특성방정식이  $\xi^4+306.65\xi^3+906.695\xi^2+374.848\xi+156.8$ 이며  $K_c$ 와  $(A-BK_c)$ 의 계산을 위한 그림 4·2의 컴퓨터 시뮬레이션결과는 부록 4와 같다.

(3)  $(\bar{A}-\bar{B}K_c)$ 의 복소수 극점수가 6이며 실수 극점수가 2인 8×8 블록에 극점 ① = -0.2+j 0.4, 극점 ② = -0.2-j 0.4, 극점 ③ = -17.5+j 21.8574, 극점 ④ = -17.5-j 21.8574, 극점 ⑤ = -17.5+j 21.8574, 극점 ⑥ = -17.5-j 21.8574, 극점 ⑦ = -0.1, 극점 ⑧ = -2.5를 배치하였을때 특성방정식이  $\xi^8+615.5\xi^7+97196.04\xi^6+767181.8\xi^5+2197704\xi^4+26185.95\xi^3+1218318.1\xi^2+381082.7\xi+3073.499$ 이며  $K_c$ 와  $(A-BK_c)$ 의 계산을 위한 그림 4·2의 컴퓨터 시뮬레이션결과는 부록 5와 같다.

컴퓨터 시뮬레이션에 의한  $\bar{A}$ 와  $\bar{B}$ 를 나타내는 부록 1과 부록 2의 결과는 Luenberger 이론에 일치함을 알 수 있으며 부록 3에서 부록 5까지에서 Kalman의 이론치와도 일치함을 알 수 있다.

모델제어기의 이득행렬값과 페루우프 제어계통행렬

여기서

$$A = \begin{pmatrix} 0.021 & 0.025 & -29.64 & 0.6968 & 0.1879 & 0 & -0.0941 & 0 \\ -0.0903 & -0.802 & -80.98 & -1.878 & 0.5524 & 0 & -8.517 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0058 & 0.0145 & 1.4672 & -1.46 & 0.45 & 0 & 0.068 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -784 & -35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -784 & -35 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 784 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 784 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{A} - \bar{B}K_c) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\ -0.05 & -0.62 & -1.49 & -3 & & & & \\ \hline & & & & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -614649.6 & -480197.4 & -95357.05 & -612.5 & & & & \end{array} \right) \quad (5-2)$$

$$\bar{B}K_c = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 0 \\ 6456.92 & -6662.8 & -1084.62 & -40.8669 & 981.624 & -1128.33 & -51.0763 & -1.495 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 0 \\ 34977.74 & 40070.2 & 1763.75 & 49.1182 & 61994.07 & 485628.07 & 94811.72 & 583.926 \end{pmatrix} \quad (5-3)$$

값은  $10^{-3}$ 에서  $10^8$ 의 범위로 개루우프 계통의 모우드 배치에 따라 많은 변화를 보였다.

Luenberger형 블록구성 방법중 (1)에서 식 (4-5), 식(4-6)과 식(4-7)에 의한 각 블록 특성방정식의 계수

를 선택하면 식 (5-2), 식 (5-3)로 되어 Luenberger 행렬  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ 와 변환행렬  $T$   $T^{-1}$ 에는 관계없이 개루우프 모우드 이등에 따라 이득값이 변함을 보여준다.

컴퓨터 알고리즘의 결과는 표준행렬을 구하는게

표 5-1. Luenberger방법과 새로운 알고리즘  
Table 5-1. Luenberger method and a new algorithm

Luenberger 방법	새로운 알고리즘
$P \ n^3 - nm$	$n^3 - n^2m$
$P^{-1} \ \frac{4}{3}(n^3 - n)$	$\frac{1}{3}(n^3 - n) + m(n^2 - 1)$
$T \ n^3 - nm$	$n^3 + \frac{3}{2}nm^2 - 2n^2m + \frac{1}{2}nm$
$T^{-1} \ \frac{4}{3}(n^3 - n)$	$\frac{1}{2}nm(m-1)$
$\bar{A} \ 2n^3$	$\frac{1}{3}(m^3 - m)$
$\bar{B} \ nm$	
Total $4\frac{2}{3}n^3 + 2n^2(n-m) - 4\frac{2}{3}n + \dots > 4\frac{2}{3}n^3$	$\frac{7}{3}n^3 + \frac{1}{3}m^3 - 2mn(n-m) - \frac{1}{3}(4m+n) < 2\frac{2}{3}n^3$

소요되는 계산시간을 크게 감소하였다.

표 5-1은 Luenberger 방법과 새로운 알고리즘에 의한 컴퓨터 계산과정에서 승산회수를 비교한 것이다. Gaussian소거법을 이용한 Luenberger 방법에 비하여 새로운 알고리즘에 의한 계산된 Cpu계산시간은 53초로서 약 40% 절감하였다.

### 6. 결 론

본 논문에서 제시한 컴퓨터 시뮬레이션 결과는 Luenberger방법과 Kalman방법의 이론치와 일치함을 확인하였다.

폐루우프 제어계통의 모드 선택은 개루우프 계통의 극점 이동에 따라 큰 범위의 제환 이득행렬값이 발생하였는데 이것은 극점 이동에 대한 Kalman 방법의 제어 알고리즘에 의하여 나타나는 것이다.

컴퓨터 시뮬레이션에 8차 모델을 적용하였으나 이보다 적은 계통은 물론이고 10차 이상의 계통도 같은 방법으로 처리될 수 있을 것이다.

\* 부록은 생략

### 참 고 문 헌

[1] Jordan, D.; "Decoupling and pole placement via transfer matrix synthesis," Tech. Report, Univ. of Conn., Storrs, Sept. 1971, Dept. of Electrical Engineering and Computer Science.

[2] Gordon Lee, David Jordan, and Munir Sohrwardy; "A Pole assignment algorithm for multivariable control systems," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-24, No. 2, pp. 357~362, April 1979.

[3] Retallack, D.G., and Macfarlane, A.G.J.; "Pole-shifting techniques for multivariable feedback systems," Proc. Inst. Elec. Eng., Vol. 117, No. 5, pp. 1037~1038, 1970.

[4] Kalman, R.E.; "On the general theory of control systems," Proce. IFAC, Vol. 1, London, Butterworth.

[5] Howze, J.W., and Pearson, J.B.; "Decoupling and arbitrary pole placement in linear systems using output feedback," IEEE Trans. on Automatic Control, AC-15, No. 6, pp. 660~663, 1970.

[6] Munro, N. and Vardulakis, A.; "Pole-shifting using output feedback," control systems center report, No. 205, pp. 1~12, May 1973.

[7] Rosenbrock, H.H.; "The assignment of closed-loop pole," Control Systems Center Report No. 20, pp. 1~5, Oct. 1977.

[8] Davison, E.J., and Chatterjee, R.; "A note on pole assignment in linear systems with incomplete state feedback," IEEE Trans. on Automatic Control, AC-16, pp. 98~99, 1971.

[9] Jordan, D., and Sridhar, B.; "An efficient algorithm for calculation of the Luenberger canonical form," IEEE Trans. on Automatic Control, AC. No. 3, pp. 292~295, 1973.

[10] Murphy, R.D. and Narandra, K.S.; "Design of helicopter stabilization systems using optimal control theory," J. Aircraft, Vol. 6, No. 2, pp. 129~135, 1969.

[11] Francis, J.A.F.; "The QR transformation," Part II, Computer Journal, #4, pp. 265~271 and 332~345, 1962.

[12] Luenberger, D.G.; "Canonical forms for linear multivariable systems," IEEE Trans. on automatic control, AC-12, No. 3, pp. 290~293, 1976.

[13] Kalman, R.E.; "Kronecker invariants and feedback in ordinary differential equations," 1971, NRL-MRC Conference, Editor, L. Weiss.

[14] Morse, A.S., and Wonham, W.M.; "Decoupling and pole assignment by dynamic compensation," SIAM Journal Control, Vol. 8, No. 3, pp. 317~337, 1970.

[15] Rosenbrock, H.H.; "Distinctive problems of process control," Chen. Eng. Prog., Vol. 58, 1962.

[16] Wonham, W.M.; "On pole assignment in multi-input controllable linear systems," IEEE Trans. on Automatic Control, AC-12, pp. 660~665, 1967.

[17] Davison, E.J.; "On pole assignment in multivariable linear systems," IEEE Trans. on Automatic Control, AC-13, pp. 747~748, 1968.

[18] Simon, J.D., and Mitter, S.K.; "A theory of model control," Information and Control, Vol. 13, No. 4, pp. 316~353, 1968.