

<論 文>

均一두께의 圓筒핀에서 過渡溫度分布에 관한 研究

孫炳鎭\* · 朴喜鎔\* · 李寬洙\* · 李興周\*\*

(1982年 5月 29日 接受)

Study on Transient Temperature Distribution  
in Annular Fin of Uniform Thickness

Byung Jin Son, Hi Yong Pak, Kwan Soo Lee and Hung Joo Lee

Abstract

The heat diffusion equation for an annular fin is analyzed by Laplace transformation. The fin has a uniform thickness, with its end insulated, and three different temperature profiles at the base such as step change, harmonic and exponential functions.

The exact solutions for the temperature and heat flux of the fins are obtained with the infinite series. The series solutions converge rapidly for large values of dimensionless time, but slowly for small values. Therefore some approximate solutions are presented here to find the temperature distribution and heat flux for small values of dimensionless time. Furthermore a simple approximate heat flux,  $Q=1.13c\tau^{\frac{1}{2}}$  is found in the range of  $\tau \leq \frac{0.1}{c}$  for the exponential function at the base.

記 號 說 明

A : 無次元 진폭 매개변수

$$B = \frac{\omega(r_a - r_b)^2}{\alpha}$$

b : 핀 두께

$$c = \frac{(r_a - r_b)^2 \gamma}{\alpha}$$

h : 熱傳達係數

$I_n(x)$ ,  $K_n(x)$  : 修正 Bessel 函數

$J_n(x)$ ,  $Y_n(x)$  : Bessel 函數

k : 熱傳導係數

$$m = \left\{ \frac{2h(r_a - r_b)}{k\delta} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

q : 핀 바탕에서의 熱流束

$$R = \frac{r}{r_a - r_b}$$

r : 반지름

T : 溫度

$T_b$  : 바탕온도

$T_0$  : 일정온도

$T_\infty$  : 周圍流體溫度

t : 時間

$\alpha$  : 熱擴散係數

$\gamma$  : 指數常數

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

$$\bar{\theta} = \int_0^\infty e^{-\tau} \theta d\tau$$

$\lambda$  : 고유값

$\rho$  :  $s = -m^2$ 에 中心을 둔 가상반지름

$$\tau = \frac{\alpha t}{(r_a - r_b)^2}$$

Q : 熱流束 Eq. (14)

\* 正會員, 漢陽大學校 機械工學科

\*\* 正會員, 陸軍士官學校 兵器工學科

下添字

- a : 外部
- b : 內部
- n : 整數

1. 緒 論

핀의 熱傳達問題를 解析하는데 있어서 初期段階에서는 定常狀態에서의 熱傳達問題를 主로 解析하였다. Harper 와 Brown<sup>(1)</sup>이 最初로 핀의 定常狀態의 問題를 解析한 以來 많은 사람들이 이것에 대한 研究를 계승하여 왔다.<sup>(2-6)</sup> 最近에 이르러서는 連續으로 發射하는 銃列과 砲身의 熱應力除去, 溫度에 민감한 電子部品の 溫度制御等を 設計하는데 있어 핀의 熱傳達에 關한 過渡特性의 知識을 많이 필요로 하고 있다.

핀의 1次元 過渡熱傳達問題는 Chapman<sup>(7)</sup>에 의하여 처음으로 研究되었다. 그는 핀 바탕(base)의 溫度가 階段函數인 圓筒핀에서의 熱傳達問題를 變數分離法으로 解析하였다. Aziz<sup>(8)</sup>는 圓筒핀에서 핀 바탕의 溫度가 調和函數로 變할 때 複素數法(complex method)으로 持續解(sustained solution)를 얻었다. Suryanarayana<sup>(9)</sup>는 Laplace 變換을 使用하여 直線핀의 바탕에서 溫度 또는 熱流束이 階段函數일 때와 調和函數로 變하는 경우 各各에 대하여 精密解(exact solution)를 구하였으며, 특히 작은 時間領域에서 收斂速度가 빠른 近似解를 提示하였다. 그러나 Chapman의 解는 數值計算을 할 경우 작은 時間領域에서 收斂速度가 느려 실제로 利用하는데에는 많은 컴퓨터時間이 요구되고, Aziz의 持續解는 陰函數型(implicit form)으로 나타나있기 때문에 使用하는데 不便하다. 또한 Suryanarayana가 구한 작은 時間領域에서 收斂速度가 빠른 近似解는 그것을 구할 때의 Laplace 逆變換 過程에서 指數函數의 冪數(m<sup>2</sup>τ)가 0.01 보다 작다는 假定下에 그 指數函數積分값의 平均값을 指數函數로 代置하여 使用하였기 때문에 어느 特定한 冪數領域밖에서는 큰 誤差를 유발할 수 있는 要因을 갖고 있다.

本 研究는 圓筒핀에서의 過渡熱傳達問題를 Laplace 變換으로 핀 바탕의 溫度가 階段函數일 때, 調和函數로 變할 때 및 指數函數의 增加하는 세가지 境界條件에서 各各의 精密解를 구하였고, 작은 時間領域에서 收斂速度가 빠른 近似解도 아울러 求하였다. 핀 바탕의 溫度가 階段函數일 때와 調和函數로 變할 때 解析過程에서 위의 研究者<sup>(7-9)</sup>들의 問題點을 解決하였다. 특히 自然現象의 慣性으로 因하여, 핀 바탕의 溫度가

階段函數일 때 보다는 指數函數의 變化가 實際問題에 있어서 應用範圍가 넓기 때문에 핀 바탕의 溫度가 指數函數의 增加하는 경우를 解析하였다.

2. 解 析

本 論文에서 취급되는 圓筒핀의 모양과 座標系는 Fig.1과 같고, 핀 바탕의 溫度가 다음과 같은 3가지 境界條件을 갖는 各各의 경우에 대하여 解析한다.

- a) 階段函數일 때
- b) 調和函數로 變할 때
- c) 指數函數로 增加할 때

本 解析時 핀의 熱傳達은 1次元 熱흐름<sup>(10-13)</sup>이고 핀 끝은 斷熱되어 있으며,<sup>(1)</sup> 핀 材料의 熱物性値와 熱傳達係數 및 周圍流體溫度는 一定한 것으로 假定한다.

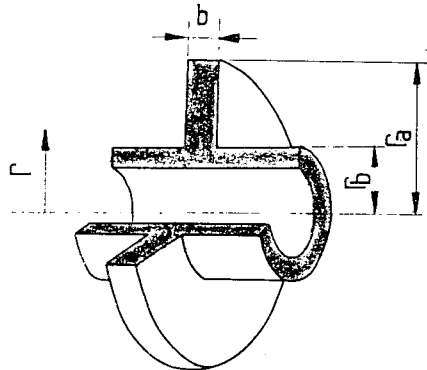


Fig. 1 The physical model of an annular fin with a coordinate system.

2.1. 핀 바탕의 溫度가 階段函數일 때

핀의 熱傳達 方程式은 다음과 같다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{2h}{kb} (T - T_{\infty}) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

初期 및 境界條件은

$$t=0 \text{ 일 때 } T=T_{\infty} \quad (2a)$$

$$r=r_b \text{ 일 때 } T=T_0 \quad (2b)$$

$$r=r_a \text{ 일 때 } \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (2c)$$

이다. 式 (1)과 (2)를 無次元化하면 다음과 같이 된다

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) - m^2 \theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (3)$$

$$\tau=0 \text{ 일 때 } \theta=0$$

$$R=R_b \text{ 일 때 } \theta=1 \quad (4)$$

$$R=R_a \text{ 일 때 } \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0$$

式 (3)과 (4)를 Laplace 變換하면

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\bar{\theta}}{dR} - (m^2 + s)\bar{\theta} = 0 \quad (5)$$

$$R=R_b \text{ 일 때 } \bar{\theta} = \frac{1}{s} \quad (6a)$$

$$R=R_a \text{ 일 때 } \frac{d\bar{\theta}}{dR} = 0 \quad (6b)$$

이다. 式 (5)와 (6)을 풀면 解는

$$\bar{\theta}(R, s) = \frac{K_1(\sqrt{m^2+s}R_a)I_0(\sqrt{m^2+s}R)}{s\{K_1(\sqrt{m^2+s}R_a)I_0(\sqrt{m^2+s}R_b) + I_1(\sqrt{m^2+s}R_a)K_0(\sqrt{m^2+s}R)\}} + \frac{I_1(\sqrt{m^2+s}R_a)K_0(\sqrt{m^2+s}R)}{I_1(\sqrt{m^2+s}R_a)K_0(\sqrt{m^2+s}R_b)} \quad (7)$$

이다. 式 (7)에서  $s = -m^2$  은

$$\bar{\theta}(R, -m^2 + \rho e^{i\alpha}) = \bar{\theta}(R, -m^2 + \rho e^{-i\alpha})$$

이므로 branch point 가 될 수 없고,  $s = -m^2$  에서  $\bar{\theta}(R, s)$  는 single-valued function 이다. 式 (7)을 Laplace 逆變換公式에 代入하여 逆變換하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \theta(R, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} e^{s\tau} \bar{\theta}(s, \tau) ds \\ &= \text{Res}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(-m^2 - \lambda_n^2) \\ &= \frac{K_1(mR_a)I_0(mR) + I_1(mR_a)K_0(mR)}{K_1(mR_a)I_0(mR_b) + I_1(mR_a)K_0(mR_b)} + \\ &2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n e^{-(m^2 + \lambda_n^2)\tau} \{Y_1(\lambda_n R_a)J_0(\lambda_n R) - J_1(\lambda_n R_a)Y_0(\lambda_n R)\}}{(m^2 + \lambda_n^2)(R_a S_0 - R_b S_1)} \quad (8) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} S_0 &= Y_0(\lambda_n R_a)J_0(\lambda_n R_b) - J_0(\lambda_n R_a)Y_0(\lambda_n R_b) \\ S_1 &= Y_1(\lambda_n R_a)J_1(\lambda_n R_b) - J_1(\lambda_n R_a)Y_1(\lambda_n R_b) \quad (9) \end{aligned}$$

이고,  $\lambda_n$  은

$$Y_1(\lambda_n R_a)J_0(\lambda_n R_b) - J_1(\lambda_n R_a)Y_0(\lambda_n R_b) = 0 \quad (10)$$

의 양의 根이다. 式 (8)은  $\tau$  가 작은 경우 매우 느리게 收斂하므로 작은  $\tau$  에 대하여 빠르게 收斂하는 解를 구할 必要가 있다. 따라서 Tauberian 定理<sup>(14)</sup>에서  $\tau \rightarrow 0$  는  $s \rightarrow \infty$  이므로  $K_0, K_1, I_0, I_1$  에서 argument 가 클 때의 近似式들을 使用하여 式 (7)을 다시 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(R, s) &= \sqrt{R_b/R} \frac{\exp[-(R_a - R)\sqrt{m^2+s}] + \exp[(R_a - R)\sqrt{m^2+s}]}{s\{\exp[-(R_a - R_b)\sqrt{m^2+s}] + \exp[(R_a - R_b)\sqrt{m^2+s}]\}} \\ &= \sqrt{R_b/R} \frac{\exp[-(2R_a - R - R_b)\sqrt{m^2+s}] + \exp[-(R - R_b)\sqrt{m^2+s}]}{s\{1 + \exp[-2(R_a - R_b)\sqrt{m^2+s}]\}} \quad (11) \end{aligned}$$

여기서  $s$  가 큰값이므로  $\exp[-2(R_a - R_b)\sqrt{m^2+s}] \ll 1$  이다. 따라서 式 (11)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{\theta}(R, s) \cong \sqrt{R_b/R} \cdot \frac{1}{s} \{\exp[-(2R_a - R - R_b)\sqrt{m^2+s}] + \exp[-(R - R_b)\sqrt{m^2+s}]\} \quad (12)$$

式 (12)를 附錄의 式 (A-6)를 利用하여 Laplace 逆變換하면  $\tau$  가 작은 경우 溫度分布는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \theta(R, \tau) &= \frac{1}{2} \sqrt{R_b/R} \{\exp[m(2R_a - R - R_b)\tau] \cdot \text{erfc}\left(\frac{2R_a - R - R_b}{2\sqrt{\tau}} + m\sqrt{\tau}\right) + \exp[-m(2R_a - R - R_b)\tau] \cdot \text{erfc}\left(\frac{2R_a - R - R_b}{2\sqrt{\tau}} - m\sqrt{\tau}\right) + \exp[m(R - R_b)\tau] \cdot \text{erfc}\left(\frac{R - R_b}{2\sqrt{\tau}} + m\sqrt{\tau}\right) + \exp[-m(R - R_b)\tau] \cdot \text{erfc}\left(\frac{R - R_b}{2\sqrt{\tau}} - m\sqrt{\tau}\right)\} \quad (13) \end{aligned}$$

핀 바탕( $R=R_b$ )에서 無次元熱流束은 다음과 같이 定義한다.

$$\Omega = \frac{q}{2\pi k R_b b (T_0 - T_\infty)} = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_{R=R_b} \quad (14)$$

작은 時間의 경우 式 (13), 큰 時間의 경우 式 (8)을 利用하여 各各의 無次元熱流束을 구하면 다음과 같다.

큰 時間의 경우 :

$$\begin{aligned} \Omega &= m \frac{I_1(mR_a)K_1(mR_b) - K_1(mR_a)I_1(mR_b)}{K_1(mR_a)I_0(mR_b) + I_1(mR_a)K_0(mR_b)} \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \exp[-(m^2 + \lambda_n^2)\tau] S_1}{(m^2 + \lambda_n^2)(R_a S_0 - R_b S_1)} \quad (15) \end{aligned}$$

작은 時間의 경우 :

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(\frac{1}{4R_b} + \frac{m}{2}\right) e^{2m\tau} \cdot \text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} + m\sqrt{\tau}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{4R_b} - \frac{m}{2}\right) e^{-2m\tau} \cdot \text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} - m\sqrt{\tau}\right) \\ &+ \frac{1}{2R_b} + \text{merf}(m\sqrt{\tau}) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \left[ e^{-m^2\tau} - e^{-\left(\frac{1}{\tau} + m^2\right)\tau} \right] \quad (16) \end{aligned}$$

## 2.2. 핀 바탕의 溫度가 調和函數로 變할 때

핀 바탕의 溫度가 Fig.2와 같이 週期的으로 變한다고 假定할 때에 핀 바탕의 溫度는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$T_b = T_0 + (T_0 - T_\infty) A \cos \omega t, \quad 0 < A < 1 \quad (17)$$

式 (17)을 無次元化하여 Laplace 變換을 하면

$$R=R_b \text{ 일 때 } \bar{\theta} = \frac{1}{s} + \frac{As}{s^2 + B^2} \quad (18)$$

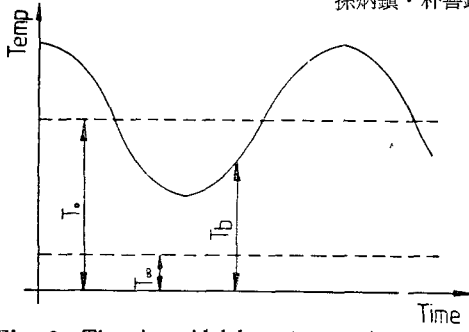


Fig. 2 The sinusoidal base temperature.

이다. 式 (5)와 (6b) 및 (18)을 풀면  $\bar{\theta}(R, s)$ 는  $\bar{\theta}(R, s) = (1+A)$

$$\frac{K_1(\sqrt{m^2+s} R_a) I_0(\sqrt{m^2+s} R)}{s \{K_1(\sqrt{m^2+s} R_a) I_0(\sqrt{m^2+s} R_b) + I_1(\sqrt{m^2+s} R_a) K_0(\sqrt{m^2+s} R) + I_1(\sqrt{m^2+s} R_a) K_0(\sqrt{m^2+s} R_b)\}} - \frac{AB^2}{s^2+B^2}$$

$$\frac{K_1(\sqrt{m^2+s} R_a) I_0(\sqrt{m^2+s} R)}{s \{K_1(\sqrt{m^2+s} R_a) I_0(\sqrt{m^2+s} R_b) + I_1(\sqrt{m^2+s} R_a) K_0(\sqrt{m^2+s} R) + I_1(\sqrt{m^2+s} R_a) K_0(\sqrt{m^2+s} R_b)\}} \quad (19)$$

이다. 위 式을 Laplace 逆變換하기 위하여 첫번째 項의 Laplace 逆變換은 式 (8)을 使用하고, 두번째 項의 Laplace 逆變換은 Convolution 定理를 利用하면 解는 다음과 같이 된다.

$$\theta(R, \tau) = (1+A) \text{Eq. (8)} - A(1 - \cos B\tau)$$

$$\frac{K_1(mR_a) I_0(mR) + I_1(mR_a) K_0(mR)}{K_1(mR_a) I_0(mR_b) + I_1(mR_a) K_0(mR_b)}$$

$$- 2AB \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \{Y_1(\lambda_n R_a) J_0(\lambda_n R) - J_1(\lambda_n R_a) Y_0(\lambda_n R)\} \{(m^2 + \lambda_n^2) \sin B\tau - B \cos B\tau\}}{(m^2 + \lambda_n^2) \{(m^2 + \lambda_n^2)^2 + B^2\} \{R_a S_0 - R_b S_1\}}$$

$$- 2AB^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \{Y_1(\lambda_n R_a) J_0(\lambda_n R) - J_1(\lambda_n R_a) Y_0(\lambda_n R)\} \{e^{-(m^2 + \lambda_n^2)\tau} + B^2\} \{R_a S_0 - R_b S_1\}}{(m^2 + \lambda_n^2) \{(m^2 + \lambda_n^2)^2 + B^2\} \{R_a S_0 - R_b S_1\}} \quad (20)$$

熱流束은

$$\Omega = (1+A) \text{Eq. (15)} - Am(1 - \cos B\tau)$$

$$\frac{I_1(mR_a) K_1(mR_b) - K_1(mR_a) I_1(mR_b)}{K_1(mR_a) I_0(mR_b) + I_1(mR_a) K_0(mR_b)}$$

$$- 2AB \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 S_1 \{(m^2 + \lambda_n^2) \sin B\tau - B \cos B\tau\}}{(m^2 + \lambda_n^2) \{(m^2 + \lambda_n^2)^2 + B^2\} \{R_a S_0 - R_b S_1\}}$$

$$- 2AB^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 S_1 e^{-(m^2 + \lambda_n^2)\tau}}{(m^2 + \lambda_n^2) \{(m^2 + \lambda_n^2)^2 + B^2\} \{R_a S_0 - R_b S_1\}} \quad (21)$$

가 된다.

### 2.3. 핀 바탕의 溫度가 指數函數의 으로 增加할 때

핀 바탕의 溫度가 Fig.3과 같이 指數函數의 으로 增加한다고 假定할 때에 핀 바탕의 溫度는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$T_b = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty})(1 - e^{-c\tau}) \quad (22)$$

위 式을 無次元化하고 Laplace 變換을 하면

$$R = R_b \text{ 일 때 } \bar{\theta} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+c} \quad (23)$$

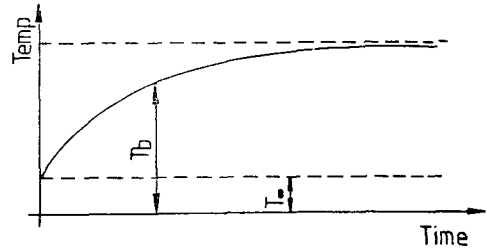


Fig. 3 The exponential base temperature.

이다. 式 (5)와 (6b) 및 (23)을 풀어서  $\bar{\theta}(R, s)$ 를 구한 후 그것을 Laplace 逆變換시키면 다음과 같다.

a)  $m^2 > c$  일 때 ;

$$\theta(R, \tau) = \text{Eq. (8)} - \frac{e^{-c\tau} \{K_1(\sqrt{m^2-c} R_a) I_0(\sqrt{m^2-c} R) + I_1(\sqrt{m^2-c} R_a) K_0(\sqrt{m^2-c} R) + I_1(\sqrt{m^2-c} R_a) K_0(\sqrt{m^2-c} R_b)\}}{K_1(\sqrt{m^2-c} R_a) I_0(\sqrt{m^2-c} R_b) + I_1(\sqrt{m^2-c} R_a) K_0(\sqrt{m^2-c} R_b)}$$

$$- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n e^{-(m^2 + \lambda_n^2)\tau} \{Y_1(\lambda_n R_a) J_0(\lambda_n R) - J_1(\lambda_n R_a) Y_0(\lambda_n R)\}}{(m^2 + \lambda_n^2) \{R_a S_0 - R_b S_1\}} \quad (24a)$$

b)  $m^2 = c$  일 때 ;

$$\theta(R, \tau) = \text{Eq. (8)} - e^{-c\tau}$$

$$- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(m^2 + \lambda_n^2)\tau} \{Y_1(\lambda_n R_a) J_0(\lambda_n R) - J_1(\lambda_n R_a) Y_0(\lambda_n R)\}}{\lambda_n \{R_a S_0 - R_b S_1\}} \quad (24b)$$

c)  $m^2 < c$  일 때

$$\theta(R, \tau) = \text{Eq. (8)} - \frac{e^{-c\tau} \{J_1(\sqrt{c-m^2} R_a) Y_0(\sqrt{c-m^2} R) + Y_1(\sqrt{c-m^2} R_a) J_0(\sqrt{c-m^2} R) + Y_1(\sqrt{c-m^2} R_a) J_0(\sqrt{c-m^2} R_b)\}}{J_1(\sqrt{c-m^2} R_a) Y_0(\sqrt{c-m^2} R_b) + Y_1(\sqrt{c-m^2} R_a) J_0(\sqrt{c-m^2} R_b)}$$

$$- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n e^{-(m^2 + \lambda_n^2)\tau} \{Y_1(\lambda_n R_a) J_0(\lambda_n R) - J_1(\lambda_n R_a) Y_0(\lambda_n R)\}}{(m^2 + \lambda_n^2 - c) \{R_a S_0 - R_b S_1\}} \quad (24c)$$

2.1. 절에서와 같이 작은 時間領域에서 式 (24)보다 收

歛速度가 빠른 解를 구하면 다음과 같이 된다.

a)  $m^2 \geq c$  일 때 ;

$$\begin{aligned} \theta(R, \tau) = & \text{Eq. (13)} - \frac{1}{2} \sqrt{R_b/R} e^{-c\tau} \exp[\sqrt{m^2-c}\tau] \\ & (2R_a - R - R_b) \cdot \text{erfc}\left(\frac{2R_a - R - R_b}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{(m^2-c)\tau}\right) \\ & + \exp[-\sqrt{m^2-c}(2R_a - R - R_b)] \cdot \text{erfc} \\ & \left(\frac{2R_a - R - R_b}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{(m^2-c)\tau}\right) \\ & + \exp[\sqrt{m^2-c}(R - R_b)] \cdot \text{erfc} \\ & \left(\frac{R - R_b}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{(m^2-c)\tau}\right) \\ & + \exp[-\sqrt{m^2-c}(R - R_b)] \cdot \text{erfc} \\ & \left(\frac{R - R_b}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{(m^2-c)\tau}\right) \end{aligned} \quad (25a)$$

b)  $m^2 < c$  일 때

式 (25a)에서 複素 error function의 關係式<sup>(15)</sup>을 利用하여 整理하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \theta(R, \tau) = & \text{Eq. (13)} - \frac{1}{2} \sqrt{R_b/R} e^{-c\tau} \\ & \left[ 2(\cos 2pq \cdot \text{erfc} p + \cos 2rq \cdot \text{erfc} r) \right. \\ & + \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{e^{-p^2}}{p} (1 - \cos 2pq) + \frac{e^{-r^2}}{r} (1 - \cos 2rq) \right\} \\ & - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{4}} \left\{ \frac{pe^{-p^2}}{n^2 + 4p^2} (\cos 2pq - \cosh nq) \right. \\ & \left. + \frac{re^{-r^2}}{n^2 + 4r^2} (\cos 2rq - \cosh nr) \right\} \end{aligned} \quad (25b)$$

여기서

$$p = \frac{2R_a - R - R_b}{2\sqrt{\tau}}, \quad q = \sqrt{(c-m^2)\tau}, \quad r = \frac{R - R_b}{2\sqrt{\tau}}$$

이다.

式 (24)와 (25)를 利用하여 各各의 無次元熱流束을 다음과 같이 얻을 수 있다.

時間이 큰 구역

a)  $m^2 \geq c$  일 때 ;

$$\begin{aligned} \Omega = & \text{Eq. (15)} + \frac{e^{-c\tau} \sqrt{m^2-c} \{K_1(\sqrt{m^2-c}R_a)\}}{K_1(\sqrt{m^2-c}R_a)I_0(\sqrt{m^2-c}R_b)} \\ & \frac{I_1(\sqrt{m^2-c}R_b) - I_1(\sqrt{m^2-c}R_a)K_1(\sqrt{m^2-c}R_b)}{+I_1(\sqrt{m^2-c}R_a)K_0(\sqrt{m^2-c}R_b)} \\ & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 e^{-(m^2+\lambda_n^2)\tau} S_1}{\{(m^2+\lambda_n^2)-c\} [R_a S_0 - R_b S_1]} \end{aligned} \quad (26a)$$

b)  $m^2 < c$  일 때 ;

$$\begin{aligned} \Omega = & \text{Eq. (15)} + \frac{e^{-c\tau} \sqrt{c-m^2} \{Y_1(\sqrt{c-m^2}R_a)J_1(\sqrt{c-m^2}R_b)\}}{J_1(\sqrt{c-m^2}R_a)Y_0(\sqrt{c-m^2}R_b) -} \\ & \frac{-m^2 R_b - J_1(\sqrt{c-m^2}R_a)Y_1(\sqrt{c-m^2}R_b)}{Y_1(\sqrt{c-m^2}R_a)J_0(\sqrt{c-m^2}R_b)} \end{aligned}$$

$$- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 e^{-(m^2+\lambda_n^2)\tau} S_1}{\{(m^2+\lambda_n^2)-c\} [R_a S_0 - R_b S_1]} \quad (26b)$$

時間이 작은 구역

a)  $m^2 \geq c$  일 때 ;

$$\begin{aligned} \Omega = & \text{Eq. (16)} - \exp[-c\sqrt{\tau} + 2\sqrt{m^2-c}] \\ & \left(\frac{1}{4R_b} + \frac{1}{2}\sqrt{m^2-c}\right) \cdot \text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} + \sqrt{(m^2-c)\tau}\right) \\ & - \exp[-c\tau - 2\sqrt{m^2-c}] \left(\frac{1}{4R_b} - \frac{1}{2}\sqrt{m^2-c}\right) \\ & \text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} - \sqrt{(m^2-c)\tau}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-m^2\tau} (1 - e^{-\tau}) \\ & - e^{-c\tau} \left[ \sqrt{m^2-c} \text{erf}(\sqrt{(m^2-c)\tau}) + \frac{1}{2R_b} \right] \end{aligned}$$

b)  $m^2 < c$  일 때

$$\begin{aligned} \Omega = & \text{Eq. (16)} - e^{-c\tau} \left\{ \left[ \frac{1}{2R_b} \cos(2\sqrt{c-m^2}) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{c-m^2} \sin(2\sqrt{c-m^2}) \right] \text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right) \right. \\ & + \frac{\sqrt{\tau} e^{-\frac{1}{4}}}{\pi} \left\{ \frac{1}{4R_b} (1 - \cos(2\sqrt{c-m^2})) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\sqrt{c-m^2} \sin(2\sqrt{c-m^2}) \right\} \\ & - \frac{2}{\pi\sqrt{\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}n^2}}{(n^2+4/\tau)} e^{-\frac{1}{4}} \\ & \left\{ \sqrt{c-m^2} (2\sin(2\sqrt{c-m^2}) + n\sqrt{\tau} \sinh(n\sqrt{(c-m^2)\tau})) \right. \\ & \left. - \frac{1}{R_b} (\cos(2\sqrt{c-m^2}) - \cosh(n\sqrt{(c-m^2)\tau})) \right\} \left. \right\} \\ & - \frac{e^{-m^2\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} (1 - e^{-\frac{1}{4}}) \\ & - e^{-c\tau} \left[ \frac{1}{2R_b} - \frac{(c-m^2)\sqrt{\tau}}{\pi} - \frac{2\sqrt{c-m^2}}{\pi} \right. \\ & \left. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}n^2}}{n} \sinh(n\sqrt{(c-m^2)\tau}) \right] \end{aligned} \quad (27b)$$

### 3. 討 議

#### 3.1. 핀 바탕의 溫度가 階段函數일 때

式 (10)에서 구한 처음 8개의  $r_b/r_a$ 의 比에 대한 eigenvalue는 Table 1과 같다.

解析結果로부터 얻어진 精密解 式 (8)을 檢討하기 위하여 25개의 eigenvalue를 求한다음,  $r_b/r_a = 0.1 \sim 0.9$ ,  $m = 0.01 \sim 5$ ,  $\tau = 0.0001 \sim 10$ 에 대하여 그 값을 計算하여보았다. 計算은 CDC 6000을 使用하여 級數項의 값이 1/1000이 되는 項까지 計算하고, 나머지 項을 切斷하였다. 式 (8)의 級數項은 eigenvalue를 順次

Table 1 The first eight roots of equation<sup>(10)</sup>.

$r_b/r_a$ \ $\lambda_n$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$
0.1	0.99242	4.48096	7.69886	10.87812	14.04261	17.19967	20.35242	23.50244
0.2	1.12943	4.55686	7.75673	10.92483	14.08162	17.23306	20.38155	23.52824
0.3	1.22458	4.59791	7.78433	10.94555	14.09815	17.24679	20.39328	23.53847
0.4	1.29909	4.62531	7.80160	10.95812	14.10802	17.25490	20.40016	23.54444
0.5	1.36078	4.64590	7.81416	10.96714	14.11506	17.26067	20.40505	23.54868
0.6	1.41355	4.66263	7.82422	10.97433	14.12065	17.26525	20.40892	23.55204
0.7	1.45969	4.67700	7.83280	10.98046	14.12541	17.26914	20.41222	23.55490
0.8	1.50065	4.68976	7.84044	10.98590	14.12965	17.27261	20.41515	23.55743
0.9	1.53744	4.70146	7.84743	10.99090	14.13353	17.27579	20.41784	23.55976

代入하여 計算하여 보면 收斂하는 交替數級이므로 이와 같이 計算하였을 때 생기는 切斷誤差는 1/1000 을 넘지 않는다. 그리고 1/1000 의 切斷誤差는 最大無次元 溫度 1에 比하여 工學的으로 無視할 수 있는 값으로 생각된다. 실제 計算에 있어서  $\tau \leq 0.01$  일 경우 項의 絶對값이 1/1000 이 되기 위하여는 많은 項을 計算하여야 하는 번거로움이 있었다.  $\tau = 0.0001$  일 경우 25 項以上,  $\tau = 0.001$  일 경우 처음 20 項의 計算이 必要하였다 그러나  $\tau = 0.01$  에서 第 8 項의 값이 1/1000 정도이었고  $\tau = 0.1$  에서는 第 5 項의 값이 1/1000 程度이었다. 따라서  $0.01 \leq \tau < 0.1$  에 대하여는 처음 8 項까지를  $\tau \geq 0.1$  에 대하여는 처음 5 項까지 計算하여 切斷誤差의 限界를 1/1000 로 하였다. 한편  $\tau \leq 0.01$  에 대해서는 計算이 간편하고 收斂速度가 빠른 式 (13)을 使用하여 計算하였다. 計算結果 式 (8)의 값에 대한 相對誤差(|eq (8) - eq(13)/eq(8)|)가 1% 미만이었다. 특히  $r_b/r_a \geq 0.5$  에서는  $\tau = 0.1$  까지 式 (13)으로 計算한 값은 式 (8)의 처음 5 項까지 計算한 값에 대하여 1% 미만의 相對誤차를 가졌다. 따라서 이 두식의 比較로부터 여기서 고려한  $r_b/r_a = 0.1 \sim 0.9$  와  $m = 0.01 \sim 5$  에 대하여  $\tau \leq 0.01$  일 때는 式 (13),  $\tau \geq 0.01$  일 때는 8 項을 考慮한 式 (8)을 使用하는 것이 바람직하며, 특히  $r_b/r_a \geq 0.5$  에서는  $\tau \leq 0.1$  일 때는 式 (13),  $\tau \geq 0.1$  일 때는 5 項을 考慮한 式 (8)을 使用하는 것이 바람직하다.

$r_b/r_a = 0.5$  일 때  $m$  과  $\tau$  의 여러 값에 대한 溫度分布를 구하기 위하여  $\tau \leq 0.1$  일 때는 級數項 5 個를 使用한 式 (8)을  $\tau \leq 0.1$  일 때 式 (13)을 使用하여 計算한 結果를 나타내면 Fig.4와 같다.

핀에서 중요시되는 定常狀態에 도달하는 時間을 알아 보기 위하여 式 (8)의 無次元溫度가 定常狀態의 1% 範圍內에 도달하는데 所要되는 最小 無次元時間은 式 (8)을 利用하면 다음과 같이 얻어진다.

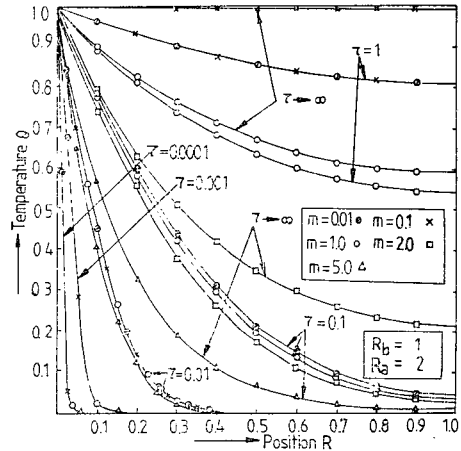


Fig. 4 Temperature distribution in an annular fin.

$$\tau \geq \frac{1}{m^2 + \lambda_1^2} \ln \frac{400m[K_1(mR_a)I_0(mR_b) + I_1(mR_a)K_0(mR_b)]}{(m^2 + \lambda_1^2)\pi(R_a S_a - R_b S_b)_{\lambda_1, \lambda_1}} \quad (28)$$

式 (28)로 부터 여러가지  $r_b/r_a$  와  $m$  값에 대한 最小 無次元時間을 구하여 表로 나타내면 Table 2와 같다.

Table 2에서 모든  $r_b/r_a$  값에 대하여 짧은 핀( $m$ 이 작은 값)에서 定常狀態에 도달하는데 所要되는 最小 無次元時間은 거의 一定하다. 즉  $m = 0.01$  에서  $m = 0.1$  로 增加할 때 無次元時間  $\tau$  는 거의 一定하므로 핀의 길이와 增加함에 따라  $\tau = \frac{\alpha t}{(r_a - r_b)^2}$  에서 實時間  $t$  도

增加하게 된다.  $m$  의 값이 2보다 클 경우  $m$  의 增加에 따라 無次元時間이 減少하므로 定常狀態에 도달하는데 所要되는 實時間은  $m$  의 增加에 비하여 相對的으로 민감하지 않기 때문에  $m$  이 2 이상에서는 無限핀

Table 2 Minimum dimensionless time to reach within 1% of steady state temperature for different values of  $m$  and  $r_b/r_a$ .

$r_b/r_a$	$m$	0.01	0.1	1.0	2.0	5.0	10.0
0.1	0.1	4.77725	4.73071	2.42059	1.02042	0.25691	0.10313
	0.5	2.58556	2.57232	1.71230	0.88088	0.24970	0.10214
	0.9	2.04622	2.03808	14.6583	0.81699	0.24620	0.10182
Straight* fin		1.96	1.95	1.42	0.805	0.246	0.101

\* Reference [9]

으로 看做할 수 있다. 이러한 사실들은 直線핀의 結果와 一致한다.<sup>(9)</sup> 그러나 定常狀態에 도달하는 無次元時間은 一定한  $m$ 에 대해서 直線핀의 結果보다 많은 時間이 所要됨을 알 수 있다. 그 理由는 直線핀에서는 熱容量이 一定하지만 圓筒핀에서는 핀 바탕에서 핀끝으로 갈수록 斷面積의 增加에 따른 熱容量이 增加하는 것에 기인한다. 특히  $r_b/r_a=0.9$ 인 경우 定常狀態에 도달하는 時間이 直線핀에서 얻는 結果와 거의 一致함을 볼 수 있다. 이는 熱容量의 增加의 비가 相對적으로 민감하지 못한 것에 기인된다. 또한  $m$ 의 값이 클 경우 定常狀態에 도달하는 無次元時間이  $r_b/r_a$ 의 값에 關係없이 거의 一定한 것은 無限핀이라는 事實때문이다.

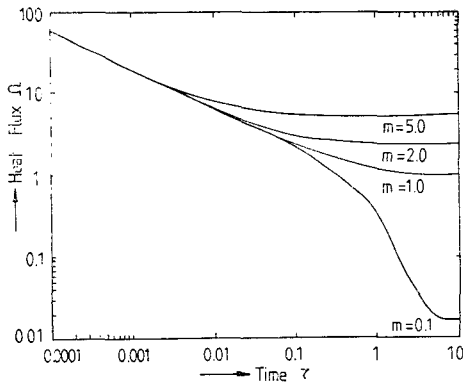


Fig. 5 Base heat flux for  $r_b/r_a=0.5$ .

熱流束은 Fig.5에서 알 수 있는 바와 같이  $\tau$ 의 값이 작을 경우,  $m$  값의 變化에 민감하지 못함을 알 수 있다. 이것은 式 (16)으로부터도 같은 結論을 내릴 수 있다. 즉,  $\tau$ 의 작은 값에 대하여 式 (16)은

$$\Omega \cong \frac{1}{2R_b} + \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}$$

가 된다. Fig.5에서 定常狀態에 도달하는 時間은 熱流束이 一定한 즉  $\frac{d\Omega}{d\tau}=0$ 가 되는 時間이다. 이 時間까지 過渡期의 熱流束은 定常狀態의 熱流束보다 크다. 그 理由는 핀 自體가 溫度를 上昇시키는데 消耗하는 熱과 핀 表面에서 일어나는 對流熱損失의 合이 定常狀態

에서 일어나는 對流熱損失보다 크기 때문이다.

### 3.2. 핀 바탕의 溫度가 調和函數로 變할 때

式 (20)에서 처음 項을 제외하고는 級數項은 式(8)의 級數解에서보다 분모에 因數  $\{(m^2 + \lambda_n^2)^2 + B^2\}$ 을 더 포함하고 있으므로 작은 時間領域에서도 收斂速度가 빠름을 알 수가 있다. 그러므로 작은 時間에서는 처음 項대신에 式 (13)을 대치하여 使用하면 된다. 또한 式 (20)에서 過渡項들을 無視하면 다음과 같은 持續解가 얻어진다.

$$\theta(R, \tau) = (1 + A \cos B\tau)$$

$$\frac{K_1(mR_a)I_0(mR) + I_1(mR_a)K_0(mR)}{K_1(mR_a)I_0(mR_b) + I_1(mR_a)K_0(mR_b)} - 2AB \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \{Y_1(\lambda_n R_a)J_0(\lambda_n R) - J_0(\lambda_n R_a)Y_0(\lambda_n R)\} \{(m^2 + \lambda_n^2) \sin B\tau - B \cos B\tau\}}{(m^2 + \lambda_n^2)^2 \{(m^2 + \lambda_n^2)^2 + B^2\} \{R_a S_0 - R_b S_1\}} \quad (29)$$

윗식의 熱流束은 다음과 같다.

$$\Omega = (1 + A \cos B\tau)m$$

$$\frac{I_1(mR_a)K_1(mR_b) - K_1(mR_a)I_1(mR_b)}{K_1(mR_a)I_0(mR_b) + I_1(mR_a)K_0(mR_b)} - 2AB \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 S_1 \{(m^2 + \lambda_n^2) \sin B\tau - B \cos B\tau\}}{(m^2 + \lambda_n^2)^2 \{(m^2 + \lambda_n^2)^2 + B^2\} \{R_a S_0 - R_b S_1\}} \quad (30)$$

Aziz<sup>(8)</sup>가 구한 持續解는 argument가 複素數인 Bessel 函數로 이루어진 陰函數型으로 表現되어 있기 때문에 實數部와 虛數部를 區別하는데 복잡하고 난해한 반면에 위의 式 (29)와 式 (30)은 陽函數型으로 주어져 있어 使用하기가 便利하다. 이 解의 計算結果에 대한 討議는 Aziz가 자세히 언급해 놓았다.

### 3.3. 핀 바탕의 溫度가 指數函數의으로 增加할 때

$m=0.1, 1, 5$ 일 때 各各의  $c$ 의 變化에 따른 時間一熱流束을 式 (26)과 式 (27)로 구하여 그 結果를 log-log

로 圖示하면 Fig. 6~Fig. 8과 같다.

Fig. 6으로부터 Fig. 8까지에서 알 수 있는 바와 같이 熱流束은  $m$ 의 값이 작을수록  $c$ 의 값이 커질수록 最大值를 나타내는 極點이 明確히 나타나고 極點이 나타나는 時間이 대략  $\tau = \frac{1}{c}$ 이다. 여기서 고려한  $c=1 \sim$

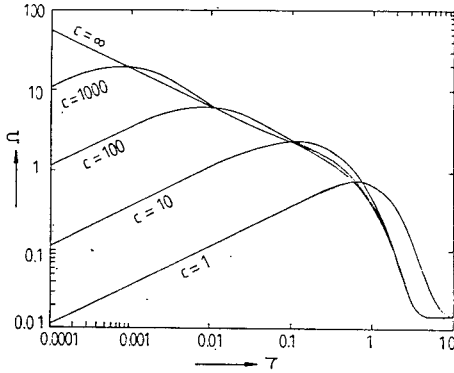


Fig. 6 Base heat flux with variation of  $C$  for  $m=0.1$  and  $r_b/r_a=0.5$ .

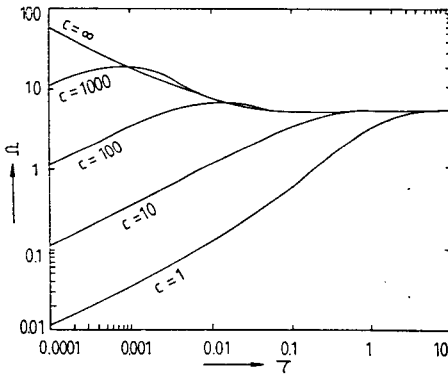


Fig. 7 Base heat flux with variation of  $C$  for  $m=1$  and  $r_b/r_a=0.5$

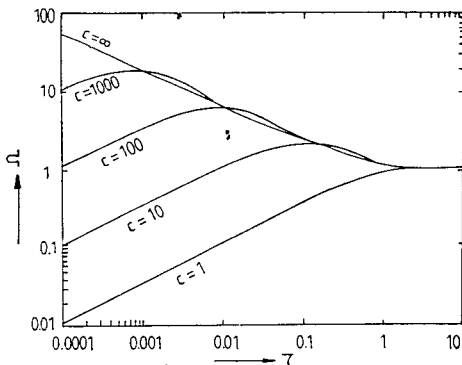


Fig. 8 Base heat flux with variation of  $C$  for  $m=5$  and  $r_b/r_a=0.5$

1000까지 各各의 경우에  $\tau \leq \frac{0.1}{c}$ 에서 無次元熱流束의 값은  $m$ 의 값에 關係없이 一定하고, 단지  $c$ 에 좌우된다. 이때  $\Omega$ 의 값은 약  $1.13c\tau^{1/2}$ 의 값을 갖는다.  $\Omega$ 가 最大가 되는 極點을 지난 後에는 各各의  $m$ 의 값에서  $c=\infty$ 가 되는 曲線, 즉 핀 바탕의 溫度가 階段函數일 때의 熱流束에 收斂한다.

#### 4. 結 論

本 研究를 통하여 얻은 結論은 다음과 같다.

1. 圓筒핀에서 핀 바탕의 溫度가 階段函數일 때, 調和函數로 變換 때, 指數函數로 變換때의 各各의 경우를 Laplace 變換으로 구하였으며, 또한 時間이 작은 領域에서 收斂速度가 빠른 近似解를 함께 구하였다.
2. 짧은 圓筒핀에서는 定常狀態에 도달하는 實時間은 핀의 길이의 增加와 더불어 增加하며,  $m$ 이 2 이상이면 無限핀으로 看做할 수 있다.
3. 짧은 핀의 경우 圓筒핀은 같은 길이의 直線핀에서보다 定常狀態에 도달하는데 많은 時間이 必要한 반면에 無限핀에서는 定常狀態에 도달하는 時間은  $r_b/r_a$ 의 값과 無關하다.
4. 핀 바탕의 溫度가 調和函數로 變換때 本 論文에서 얻은 持續解는 陽函數型으로 나타나 있기 때문에  $A_{ziz}^{(8)}$ 가 구한 陰函數型인 持續解보다 使用하기가 便利하다.
5. 핀 바탕의 溫度가 指數函數의 으로 增加할때 熱流束은 약  $\tau = \frac{1}{c}$ 에서 極點을 갖고, 그 極點을 지난 後에는 各各의  $m$ 의 값에서  $c=\infty$ 가 되는 曲線에 收斂한다. 특히  $\tau \leq \frac{0.1}{c}$ 에서 熱流束의 近似값은  $\Omega = 1.13c\tau^{1/2}$ 을 얻었다.

#### 附 記

이 論文은 1981年度 文敎部 學術研究助成費에 의하여 研究되어진 것이다. 文敎部の 支援에 深心한 謝意를 表한다.

#### 附 錄

$e^{-f(R)\sqrt{m^2+s^2}}/s$ 와 같은 형의 Laplace 逆變換은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-f(R)\sqrt{m^2+s^2}}}{s}\right\} = \int_0^r e^{-m^2 t} \cdot L^{-1}\{e^{-f(R)\sqrt{s^2}}\} dt \quad (A-1)$$

Laplace 逆變換表에서



$$L^{-1}\left\{e^{-f(R)\sqrt{s}}\right\} = \frac{f(R)}{2\sqrt{\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{f^2(R)}{4t}} \quad (A-2)$$

이다. 式 (A-2)를 式 (A-1)에 代入하고

$$y = \sqrt{t}$$

로 놓으면 式 (A-1)은

$$\frac{f(R)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\tau}} \frac{e^{-m^2 y^2 - \frac{f^2(R)}{4y^2}}}{y^2} dy \quad (A-3)$$

이다. 윗 식에서

$$\eta = f(R)/(2y)$$

로 놓으면 式 (A-3)은

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{f(R)}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-\eta^2 - \left(\frac{m \cdot f(R)}{2}\right)^2 / \eta^2} d\eta \quad (A-4)$$

이다. 積分表<sup>(15)</sup>를 利用하면 (A-4)는

$$\frac{1}{2} \left[ e^{m \cdot f(R)} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{f(R)}{2\sqrt{\tau}} + m\sqrt{\tau} \right) + e^{-m \cdot f(R)} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{f(R)}{2\sqrt{\tau}} - m\sqrt{\tau} \right) \right] \quad (A-5)$$

이다. 따라서 式 (A-1)은

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-f(R)\sqrt{s}}}{s}\right\} = \frac{1}{2} \left[ e^{m \cdot f(R)} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{f(R)}{2\sqrt{\tau}} + m\sqrt{\tau} \right) + e^{-m \cdot f(R)} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{f(R)}{2\sqrt{\tau}} - m\sqrt{\tau} \right) \right] \quad (A-6)$$

이다.

### 參 考 文 獻

1. W.B. Harper and D.R. Brown, "Mathematical Equations for Heat Conduction in the Fins of Air Cooled Engines," NACA Report No. 158, pp.679-708, 1922.
2. M. Jakob, *Heat Transfer*, Vol. 1, John Wiley & sons, Inc., New York, 1949.
3. P.J. Schneider, *Conduction Heat Transfer*, Addison Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1955.
4. K.A. Gardner, "Efficiency of Extended Surfaces," Trans. ASME, Vol. 67, pp.621-631, 1945.
5. H.H. Keller and E.V. Somers, "Heat Transfer

- from an Annular Fin of Constant Thickness," J. Heat Transfer, Trans., ASME, Series C, pp. 151-156, 1959.
6. Melvin Avrami and J.B. Little, "Diffusion of Heat Through a Rectangular Bar and the Cooling and Insulating Effects of Fins, I. the Steady State," J. Applied Physics Vol. 13, pp.255-264, 1942.
7. A.J. Chapman, "Transient Heat Conduction in Annular Fins of Uniform Thickness," Chem. Eng. Symposium Series, Vol. 55, No. 29, pp. 195-201, 1959.
8. A. Aziz, "Periodic Heat Transfer in Annular Fins," J. Heat Transfer, Trans. ASME, Series C, Vol. 97, pp.302-303, 1975.
9. N. V. Suryanarayana, "Transient Response of Straight Fins," J. Heat Transfer, Trans. ASME, Series C, Vol. 97, pp.417-433, 1973.
10. R.K. Irey, "Errors in the One-Dimensional Fin Solution," J. Heat Transfer, Trans. ASME, Series C, Vol. 90, pp.175-176, 1968.
11. Levitsky, Myron, "The Criterion for Validity of the Fin Approximation," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 10, pp.1960-1963, 1972.
12. Lau, Wah, and C.W. Tan, "Errors in One-Dimensional Heat Transfer Analysis in Straight and Annular Fins," J. Heat Transfer, Trans. ASME, Series C, Vol. 95, pp.549-551, 1973.
13. J. Crank and I.B. Parker, "Approximate Method for Two Dimensional Problems in Heat Flows," Quart. J. Mech. & Appl. Math. Vol. 19, Part 2, pp.167-181, 1966.
14. I. N. Sneddon *The Use of Integral Transform*, McGraw-Hill, pp.184-190, 1972.
15. M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965.