

<論 文>

# 등온으로 가열되는 수평 평판위를 지나는 블라시우스 유동의 와류불안정성 해석

이 형 인\* · 최 창 균\*\* · 유 정 열\*\*\*

(1982年 8月 24日 授受)

## An Analysis on Vortex Instability of Blasius Flow over Isothermally Heated Horizontal Plates

H. I. Lee, C. K. Choi and J. Y. Yoo

### Abstract

The onset of longitudinal vortices in horizontal Blasius flow isothermally heated from below is studied analytically. The assumption that at the onset of thermal instability the thermal disturbances are confined within the thermal boundary layer is employed for the limiting case of large Prandtl number. Polynomial representations for the basic quantities obtained by the integral method of the boundary layer analysis have been used. Then the system of differential equations and boundary conditions for disturbance quantities is reformulated in a convenient form so that the solutions may be constructed as rapidly convergent power series. The critical buoyancy parameter  $Gr_x^*/Re^{*1.5}$  falls between 2 and 6, which is about one order of magnitude lower than the existing experimental values. It is also shown that the positions of the onset of instability can be closely predicted by the present theory.

### 1. 서 론

일정한 온도로 가열되고 있는 평판 위를 지나는 종류 경계층 유동에서 길이방향의 와동 롤(longitudinal vortex roll)들이 발생하는 현상은 최근에 많은 관심의 대상이 되고 있다. 이 문제에 대한 최초의 이론적인 결과는 Wu와 Cheng<sup>1)</sup>에 의하여 얻어졌는데, 그들은 기본 유동에 대하여 비평행 유동모형을 채택하였다.

즉, 기본 유동 및 온도 장의 유동방향(streamwise) 좌표에 따른 변화 뿐 아니라 교란 방정식에서 기본 유동의 횡류방향(transverse) 속도 성분까지도 고려하였다. 그러나 Wu와 Cheng의 결과에 대한 의문은 후일 밑으로부터 가열되는 물의 수평 블라시우스 유동에 대한 실험을 수행하였던 Gilpin, Imura와 Cheng<sup>2)</sup>에 의하여 제기되었으며, 더욱이, 동일한 형태의 유동의 선형 파동 불안정성을 연구하였던 Chen과 Mucoglu<sup>3)</sup>는 Wu와 Cheng의 이론적 결과의 부정확성을 지적하였다.

이와같이 반무한 영역에서 주어지는 문제들을 수치적으로 해석하는데 있어서는 방정식 자체의 복잡성과 아울러 경계층 외부의 자유 유동 구역에서 교란 양들

\* 서울대학교 기계공학과 대학원

\*\* 서울대학교 화학공학과

\*\*\*정회원, 서울대학교 기계공학과

에 대한 경계조건을 표시하는 데도 어려움이 따른다. 이를 극복하기 위하여 흔히 채택되고 있는 방법은 무한대에서의 경계조건을 어떤 유한한 거리만큼 떨어진 곳에서의 적절한 조건으로 대치시키는 것이다. 실제로 Wu와 Cheng<sup>1)</sup>은 이 방법을 채택하였으며 Hwang과 Cheng<sup>4)</sup> 및 Haaland와 Sparrow<sup>5)</sup>도 경사진 평판 위의 층류 자연대류 유동의 열적 불안정성에 대한 각각의 연구에서 유사한 방법들을 채택하였다.

이상의 모든 연구 결과들의 공통점은 교란 양들이 대체적으로 각각의 경계층에 한정된다는 것이다. 특히 Choi<sup>6)</sup> 및 Davis와 Choi<sup>7)</sup>는 액체막 유동에서의 세포 형태 대류 발생에 관한 연구에서 프란틀 수( $Pr$ )가 클 경우에(예를 들면,  $Pr > 6$ ) 열적 불안정성 발생점에서 온도 교란은 열 경계층에 한정된다는 가정하에 이론과 실험이 일치하는 좋은 결과를 얻었다. 이런 가정은 열 경계층 내에서 큰 역 온도 구배가 유지되는 다른 경우에도 적용될 수 있는 가정이라고 할 수 있다.

그러므로 이 연구의 목적은 Choi<sup>6)</sup> 및 Davis와 Choi<sup>7)</sup>의 개념을 더욱 확장함으로써 밑으로부터 가열되는 수평 블라시우스 유동의 와류 불안정성의 발생에 대하여 보다 실제적인 예측을 하는데 있다.

## 2. 열적 불안정성 문제의 구성

일정한 온도  $T_w$ 로 유지되는 수평 평판 위를 지나는 자유 유동 속도가  $U_\infty$ 이고 자유 유동 온도가  $T_\infty$ 인 층류경계층 유동을 고려한다. 부시네스크 가정에 따라 밀도 변화가 부력에 기여하는 경우만을 제외하고는 유체의 물성치들은 상수라고 가정한다. 그러면, 이 문제에 대한 출발점은 Fig. 1에 보여진 좌표계에 관한 다음의 방정식들이다(Fig. 1에서  $\delta_n$ 는 속도 경계층,  $\delta_T$ 는 열 경계층을 표시한다) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - g\beta(T - T_\infty) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \tag{3}$$

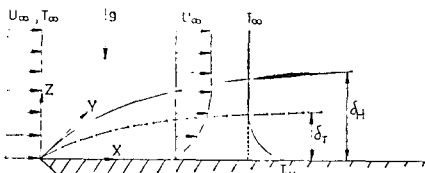


Fig. 1 Coordinate system for laminar boundary layer flow over a horizontal isothermal plate.

통상적인 경계층 가정에 따라, 기본 유동 및 온도에 대한 지배 방정식들은 층류 강제대류 유동 문제의 형태로 얻어진다.<sup>1,8)</sup> :

$$\frac{\partial U_b}{\partial x} + \frac{\partial W_b}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

$$U_b \frac{\partial U_b}{\partial x} + W_b \frac{\partial U_b}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 U_b}{\partial z^2}, \tag{5}$$

$$U_b \frac{\partial T_b}{\partial x} + W_b \frac{\partial T_b}{\partial z} = \kappa \frac{\partial^2 T_b}{\partial z^2} \tag{6}$$

블라시우스의 상사 변수  $\eta = z \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$ , 무차원 유동 함수  $f(\eta) = \psi(x, z) \sqrt{\nu x U_\infty}$  및 무차원 온도차  $\bar{\theta}(\eta) = \frac{T_b(x, z) - T_\infty}{T_w - T_\infty}$  를 도입하면,  $U_b = U_\infty f'(\eta)$ ,  $W_b = \sqrt{\frac{U_\infty \nu}{x}} \frac{\eta f' - f}{2}$  가 되고, 위의 문제는 다음과 같은 방정식들과 경계조건들로 표현될 수 있다.

$$f'''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \tag{7}$$

$$\bar{\theta}'' + \frac{1}{2} Pr f \bar{\theta}' = 0 \tag{8}$$

$$f(0) = f'(0) = \bar{\theta}(\infty) = 0, f'(\infty) = \bar{\theta}(0) = 1 \tag{9}$$

물론 이 방정식들의 해들은 잘 알려진 블라시우스의 속도분포와 풀하우젠의 온도분포를 나타낸다.

선형 안정성 해석을 위하여 중립안정성에 대하여는  $y$ 와  $z$ 만의 함수로 취해지는 교란 양들을<sup>4,5)</sup> 기본 양들에 중첩시킨다.<sup>4)</sup> :

$$\begin{aligned} u &= U_b(x, z) + u'(y, z) \\ v &= v'(y, z) \\ w &= W_b(x, z) + w'(y, z) \\ T &= T_b(x, z) + T'(y, z) \\ P &= P_b - \rho g z + P'(y, z) \end{aligned} \tag{10}$$

위의 표현들을 식 (1), (2), (3)에 내입하고 기본 양들에 의하여 만족되는 부분, 즉, 식 (4), (5), (6)을 제한 후에, 선형 안정성 이론을 적용하면 다음과 같은 교란 방정식들이 얻어진다.<sup>4)</sup> :

$$\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{11}$$

$$u' \frac{\partial U_b}{\partial x} + w' \frac{\partial U_b}{\partial z} + W_b \frac{\partial u'}{\partial z} = \nu \nabla_z^2 u' \tag{12}$$

$$W_b \frac{\partial v'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial y} + \nu \nabla_z^2 v' \tag{13}$$

$$\begin{aligned} u' \frac{\partial W_b}{\partial x} + W_b \frac{\partial w'}{\partial z} + w' \frac{\partial W_b}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z} \\ &+ \nu \nabla_z^2 w' + \beta g T' \end{aligned} \tag{14}$$

$$u' \frac{\partial T_b}{\partial x} + w' \frac{\partial T_b}{\partial z} + W_b \frac{\partial T'}{\partial z} = \kappa \nabla_z^2 T' \tag{15}$$

여기서  $\nabla_z^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  을 나타낸다. 압력 항들을 소

거시키기 위하여  $\partial^2(14)/\partial y^2 - \partial^2(13)/\partial y \partial z$ 의 계산을 수행하고 연속 방정식 (11)을 고려하면, 위의 다섯 개의 미분방정식들은 세 개의 미분방정식들로 축소될 수 있다. 이 방정식들은 무차원화시키기 위하여 다음과 같은 무차원수 및 무차원 변수들을 도입한다.

$$Pr = \nu/\kappa, Re_x = U_\infty x/\nu, Gr_x = g\beta(T_w - T_\infty)x^3/\nu^2, \\ Ra = g\beta(T_w - T_\infty)L^3/\nu\kappa, \bar{Ra} = Ra^{1/4},$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L} Ra^{1/4}, \frac{z}{L} Ra^{1/4}\right),$$

$$(\bar{U}_b, \bar{W}_b) = \left(\frac{U_b L}{\kappa Ra^{1/2}}, \frac{W_b L}{\kappa Ra^{1/4}}\right),$$

$$(\bar{U}', \bar{W}') = \left(\frac{u' L}{\kappa Ra^{1/2}}, \frac{w' L}{\kappa Ra^{1/4}}\right),$$

$$\bar{\theta}' = \frac{T'}{T_w - T_\infty},$$

여기서  $L$ 은 열 경계층 두께  $\delta_T(x)$ 에 비해하는 임의의 특성길이이다. 이제 무차원화된 교란 방정식들은 최종적으로 다음과 같이 쓰여진다:

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial \bar{W}_b}{\partial \bar{x}} + \bar{W}_b \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{\nabla}^2 \bar{w}' + \frac{\partial \bar{W}_b}{\partial \bar{z}} \bar{\nabla}^2 \bar{w}' \right) \\ = \bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \bar{w}' + \bar{Ra} \frac{\partial^2 \bar{\theta}'}{\partial \bar{y}^2} \quad (16)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \bar{u}' \frac{\partial \bar{U}_b}{\partial \bar{x}} + \bar{W}_b \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{z}} + \bar{w}' \frac{\partial \bar{U}_b}{\partial \bar{z}} \right) = \bar{\nabla}^2 \bar{u}' \quad (17)$$

$$\bar{u}' \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial \bar{x}} + \bar{W}_b \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial \bar{z}} + \bar{w}' \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial \bar{z}} = \bar{\nabla}^2 \bar{\theta}' \quad (18)$$

여기서  $\bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}$ 을 나타낸다.

우리는 몇 가지 기준의 연구 결과들을 토대로 하여  $Pr \rightarrow \infty$  극한 경우에 대하여 검토하고자 한다.

우선 Hwang과 Cheng<sup>42</sup>의 결과를 들 수 있는데, 그들은  $Pr$ 이 증가함에 따라 임계 레이리수( $Ra^*$ )와 그에 상응하는 임계 파수( $a^*$ )는  $Pr$ 에 약하게 의존하는 함수들의 형태로서 증가한다는 것을 보고하였다. 다음으로는 공기-물 막 유동( $Pr \approx 6$ )에서의 세포 형태 대류 발생에 관한 연구를 수행하였던 Choi<sup>63</sup> 및 Davis와 Choi<sup>72</sup>의 연구 결과들인데, 그들은 무한대의  $Pr$ 에 대한 이론치들이  $Pr \sim 7$ 에 대한 실험치들과 잘 일치하는 것을 보였다. 더욱이, Davis, Choi와 Bonano<sup>69</sup>는 공기-클리세롤 용액( $Pr \approx 200$ )에서의 세포 형태 대류 발생에 관한 실험적 연구에서  $Pr > 6$ 에 대하여는  $Pr$ 에 따른 임계치들의 변화가 거의 없다는 것을 확인하였다. 그러므로  $Pr$ 이 무한대로 됨에 따라 식 (16)과 (17)에서  $1/Pr$ 을 포함하는 항들은 무시될 수 있으며<sup>42</sup> 다음과 같은 새로운 교란 방정정식들을 세울 수 있다:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \bar{w}' + \bar{Ra} \frac{\partial^2 \bar{\theta}'}{\partial \bar{y}^2} = 0, \quad (19)$$

$$\bar{\nabla}^2 \bar{u}' = 0 \quad (20)$$

$$\bar{u}' \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial \bar{x}} + \bar{W}_b \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial \bar{z}} + \bar{w}' \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial \bar{z}} = \bar{\nabla}^2 \bar{\theta}' \quad (21)$$

$\bar{z}=0$ 와  $\infty$ 에서  $\bar{u}'=0$ 이어야 한다는 조건을 고려하면 식 (20)으로부터 쉽사리  $\bar{u}' \equiv 0$ 임을 알 수 있다. 이는 열적 불안정성 발생점에서 규칙적인 길이 방향 와동이 나타난다는 실험적인 관찰과도 일치하는 사실이다.

교란 양들은 통상적인 방법에 따라 다음과 같은 정규형식(normal mode)으로 표시한다:

$$\bar{w}' = \bar{w}'(\bar{y}, \bar{z}) = \bar{w}(\bar{z}) \exp(i\bar{a}\bar{y}), \\ \bar{\theta}' = \bar{\theta}'(\bar{y}, \bar{z}) = \bar{\theta}(\bar{z}) \exp(i\bar{a}\bar{y}) \quad (22)$$

여기서  $\bar{W}$ 와  $\bar{\theta}$ 는 무차원 교란의 진폭들을 나타내며,  $\bar{a} = a/\bar{Ra}$ ,  $a = 2\pi L/\lambda$ 는 별도로 정의되는 파수,  $\lambda$ 는 파장을 나타낸다. 식 (22)와  $\bar{u}'=0$ 를 고려하면 교란 방정식들과 경계조건들은 다음과 같은 형태로 쓰여진다:

$$(\bar{D}^2 - \bar{a}^2)^2 \bar{w} = \bar{a}^2 \bar{Ra} \bar{\theta}, \quad (23)$$

$$[(\bar{D}^2 - \bar{a}^2) - \bar{W}_b \bar{D}] \bar{\theta} = \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{z}}, \quad (24)$$

$$\bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = \bar{\theta} = 0 \text{ at } \bar{z}=0 \text{ and } \infty \quad (25)$$

여기서  $\bar{D}$ 는  $\bar{z}$ 에 대한 미분을 나타낸다.

위 문제의 해를 구하는데 있어서 불안정성의 발생점에서 온도 교란은 열 경계층  $\delta_T(x)$ 내에만 한정된다는 가정에 중점을 두기로 한다. 이 가정의 타당성은 이미 서론의 마지막 부분에서 설명된 바와 같이 Choi<sup>63</sup> 및 Davis와 Choi<sup>72</sup>에 의하여 입증되었다. 그러므로 임의의 특성길이  $L$ 로서  $\delta_T(x)$ 를 지정하여 새로운 무차원 변수  $\zeta = z/\delta_T(x)$ 를 도입함으로써 편의상 다음과 같이 표시한다:

$$\bar{w}(\bar{z}) = \begin{cases} w_i(\zeta) & \text{for } \zeta \leq 1, \\ w_0(\zeta) & \text{for } \zeta > 1 \end{cases}$$

$$\bar{\theta}(\bar{z}) = \theta(\zeta)$$

$$\bar{\theta}(\eta) = \theta(\zeta).$$

이제  $\zeta > 1$ 에 대하여  $\theta=0$ 을 고려하고  $\zeta \leq 1$ 에 대하여는 식 (23)과 (24)를 결합함으로써 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$[(D^2 - a^2) - WD](D^2 - a^2)^2 w_i = a^2 Ra D \theta w_i \\ \text{for } \zeta \leq 1 \quad (26)$$

$$(D^2 - a^2)^2 w_0 = 0 \text{ for } \zeta > 1 \quad (27)$$

$$w_i = D w_i = (D^2 - a^2)^2 w_i = 0 \text{ at } \zeta = 0 \quad (28)$$

$$w_i - w_0 = D^n w_i - D^n w_0 = 0 \quad (n=1, 2, 3, 4) \text{ at } \zeta = 1 \quad (29)$$

$$w_0 = D w_0 = 0 \text{ as } \zeta \rightarrow \infty \quad (30)$$

여기서  $D$ 는  $\zeta$ 에 관한 미분을 나타내며,  $W = W_b/(\kappa/$

$\delta_r$ )는 무차원화된 기본 유동의 횡류 성분이다. 추가적으로 설정된 경계조건 (29)는 열 경계층의 바깥 가장자리 즉  $\zeta=1$ 에서 속도, 응력 및 온도가 연속이라는 가정에 근거를 두고 있다. 본 연구에서는 위의 고유치 문제의 해로서  $Ra^*$ 와  $a^*$ 의 값을 구하고자 한다.

### 3. 해 법

경계조건 (28)~(30)을 만족시키는 상미분방정식 (26)과 (27)의 해를 구하는데 있어서는 식 (7)~(9)로부터 얻어지는 기본 유동장에 대한 정보가 요청된다. 본 연구에서는 이들에 대한 엄밀해를 사용하는 대신에 경계층해석의 적분방법으로부터 얻어지는 3차 또는 4차의 근사 다항식들을 사용하도록 한다.<sup>10)</sup> 이 방법의 장점은 상미분방정식 (26)과 (27)의 해를 복잡한 수치해법보다는 해석적이며 단순한 급수해법으로 구할 수 있게 한다는 것이다. 본 연구에서 사용된 다항식의 형태들이 Table 1에 표시되어 있는데, Case I은 3차 근사 다항식, Case II는 4차 근사 다항식이 사용되는 경우를 나타낸다. 식 (26)으로부터 열 경계층 내에서는 기본 유동의 횡류 성분만이 필요하며, 적분 해법에

**Table 1** Approximating polynomials used in the integral method and resulting boundary layer thicknesses, where  $\zeta_H = \frac{z}{\zeta_H}$  and  $\zeta = \frac{z}{\zeta_r}$ .

	$\frac{U_b}{U_\infty}$	$1-\theta = \frac{T_w - T_b}{T_w - T_\infty}$	$\frac{\delta_H}{x} \sqrt{Re_x}$	$\frac{\delta_r}{\delta_H}$
Case I	$\frac{3}{2}\zeta_H - \frac{1}{2}\zeta_H^3$	$\frac{3}{2}\zeta - \frac{1}{2}\zeta^3$	4.64	$Pr^{-\frac{1}{3}}$
Case II	$2\zeta_H - 2\zeta_H^3 + \zeta_H^4$	$2\zeta - 2\zeta^3 + \zeta^4$	5.84	$Pr^{-\frac{1}{3}}$

서 연속방정식이 도입되었다는 사실들로부터 다음과 같이 무차원화된 기본 유동의 횡류 성분에 대한 다항식의 표현을 얻을 수 있다 :

$$W = \frac{W_b}{\frac{\kappa}{\delta_r}} = \begin{cases} \frac{1}{2}(4.64)^2 \left( \frac{3}{4}\zeta^2 - \frac{3}{8}Pr^{-\frac{2}{3}}\zeta^4 \right) & \text{for Case I} \\ \frac{1}{2}(5.84)^2 \left( \zeta^2 - \frac{3}{2}Pr^{-\frac{2}{3}}\zeta^4 + \frac{4}{5}Pr^{-1}\zeta^5 \right) & \text{for Case II} \end{cases}$$

그러므로,  $Pr \rightarrow \infty$ 가 됨에 따라  $W$ 는 다음과 같이 추산 될 수 있다.

$$W = c\zeta^2, \quad c = \begin{cases} 8.074 & \text{for Case I} \\ 17.053 & \text{for Case II} \end{cases} \quad (31)$$

이제, 상미분방정식 (26)과 (27)의 계수들이 다항식들로 표시되었으므로, Sparrow 등<sup>11)</sup>의 방법을 적용함

으로써 멱급수 형태의 일반해를 구할 수 있다.

$$w_i = \sum_{j=0}^5 C_j f_j(\zeta) \quad (32)$$

$$w_0 = C_6 \exp(-a\zeta) + C_7 \zeta \exp(-a\zeta)$$

여기서  $C_j$ 는 임의의 상수이며,  $f_j(\zeta)$ 는 급속히 수렴하는 멱급수들이다.

$$f_j(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} (Ra, a) \zeta^n \quad (j=0, 1, 2, \dots, 5) \quad (33)$$

급수의 계수들은  $n \leq 5$ 에 대하여는 다음과 같이 규정될 수 있으며,

$$b_{-3}^{(j)} = b_{-2}^{(j)} = b_{-1}^{(j)} = 0,$$

$$b_n^{(j)} = \delta_{nj} \text{ for } n=0, 1, 2, \dots, 5,$$

$n \geq 6$ 에 대해서는 식 (26)으로부터 생성되는 순환 공식을 따라서 보다 낮은 차수의 계수들에 관하여 다음과 같이 결정될 수 있다 :

$$b_n^{(j)} = \frac{1}{n(n-1)} \left\{ 3a^2 b_{n-2}^{(j)} + \frac{1}{(n-2)(n-3)} \left[ -3a^4 b_{n-4}^{(j)} + \left\{ \frac{1}{(n-4)(n-5)} a^6 b_{n-6}^{(j)} \right\} \right] \right. \\ \left. + c \frac{(n-7)}{n(n-1)(n-2)} \left\{ (n-6)b_{n-3}^{(j)} + \frac{1}{(n-3)(n-4)} \left[ -2a^2(n-6)b_{n-5}^{(j)} + \frac{a_4}{(n-5)} b_{n-7}^{(j)} \right] \right\} \right. \\ \left. + \begin{cases} \frac{3}{2} a^2 Ra \frac{a(n-6)!}{n!} (-b_{n-6}^{(j)} + b_{n-8}^{(j)}) & \text{for Case I} \\ 2a^2 Ra \frac{(n-6)!}{n!} (-b_{n-6}^{(j)} + 3b_{n-8}^{(j)} - 2b_{n-9}^{(j)}) & \text{for Case II} \end{cases} \right.$$

상수들  $C_j$  ( $j=0, 1, \dots, 7$ )는 경계조건을 만족시키도록 결정된다. 벽면, 즉,  $\zeta=0$ 에서의 경계조건으로부터는 다음을 얻는다.

$$C_0 = C_1 = 0 \text{ and } C_4 = \frac{a^2}{6} C_2. \quad (34)$$

경계층 바깥 가장자리, 즉,  $\zeta=1$ 에서는 5개의 상수들  $C_2, C_3, C_5, C_6$  및  $C_7$ 에 관하여 5개의 대수식을 얻음으로써 모두는 0이 아닌 값을 갖기 위하여는 다음과 같은 행렬식의 값이 0이 되어야 한다는 조건을 얻는다.

$$\begin{vmatrix} -\{f_2(1) + \frac{a^2}{6}f_4(1)\} & -f_3(1) & -f_5(1) & e^{-a} & e^{-a} \\ -\{f_2'(1) + \frac{a^2}{6}f_4'(1)\} & -f_3'(1) & -f_5'(1) & -ae^{-a} & -(a-1)e^{-a} \\ -\{f_2''(1) + \frac{a^2}{6}f_4''(1)\} & -f_3''(1) & -f_5''(1) & a^2e^{-a} & a(a-2)e^{-a} \\ -\{f_2'''(1) + \frac{a^2}{6}f_4'''(1)\} & -f_3'''(1) & -f_5'''(1) & -a^3e^{-a} & -a^2(a-3)e^{-a} \\ -\{f_2^{IV}(1) + \frac{a^2}{6}f_4^{IV}(1)\} & -f_3^{IV}(1) & -f_5^{IV}(1) & a^4e^{-a} & a^3(a-4)e^{-a} \end{vmatrix} = 0 \quad (35)$$

여기서 프라임은  $\zeta$ 에 관한 미분을 표시한다. 이것은 고유치 문제로서, 개별적인  $a$ 의 값에 대하여 식 (35)를 만족시키는  $Ra$ 의 값이 고유치로서 쉽게 계산될 수 있음을 알 수 있다.

$Ra$ 대  $a$ 의 도표, 즉, 중립 안정성 곡선이 얻어지면  $Ra$ 의 최저치가 찾아질 수 있다. 이 최저 고유치 및 상응하는 파수는 불안정성의 발생에 해당하는 임계치들로서, 이들에 대한 고관 양들의 분포가 임의의 배수까지 계산될 수 있다.

4. 결과 및 토의

Fig. 2에는 I과 II의 경우에 대한 중립 안정성 곡선들이 그려져 있는데, 하첨자 'a'는 단순히  $W=0$ 을 가정함으로써 얻어진 해석적인 결과이고, 'b'는  $W=c\zeta^2$ 에 대한 결과를 나타낸다. 각각의 경우에 대하여 와동 물들이 최초로 출현하는 임계 레이리수  $Ra^*$  및 상응하는 임계 파수  $a^*$ 를 찾을 수 있다. 결과적으로, 길이방향 와동의 발생점에서 그라스호프수 ( $Gr_x^*$ )에 대한 레이놀즈수 ( $Re_x^*$ )의 효과는 다음 관계식들로부터 연구될 수 있다:

$$\frac{Gr_x^*}{Re_x^{*1.5}} = \begin{cases} \{Ra^*/(4.64)^3\} \text{ for Case I} \\ \{Ra^*/(5.84)^3\} \text{ for Case II} \end{cases} \quad (36)$$

임계치들에 대한 결과들이 Table 2에 열거되어 있다.

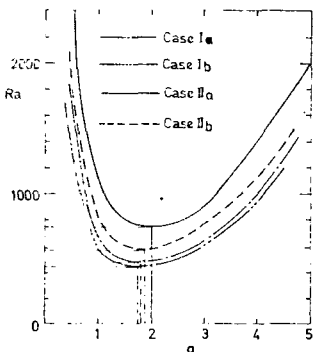


Fig. 2 Neutral stability curves based on different forms of basic velocity and temperature profiles.

특히 Fig. 3에는 (36)의 관계식들이 다른 연구가들의 결과와 비교되어 있다. 우선 프란틀수 7의 값에 대한 Wu and Cheng<sup>1)</sup>의 이론적인 결과와 Gilpin 등<sup>2)</sup>의 실험적인 결과는 매우 잘 일치하는 것으로 보이는데, 이는 오히려 뜻밖의 의심스러운 결과라고 볼 수 있다. 왜냐하면, Gilpin 등<sup>2)</sup>에 의하여 지적되었고 또 일반적으로도 알려져 있는 바와 같이 이론적인 임계치들은

Table 2 Critical values corresponding to the onset of vortex rolls, which are based on different forms of basic velocity and temperature profiles.

Critical number		$a^*$	$Ra^*$	$\frac{Gr_x^*}{Re_x^{*1.5}}$
I a	$W=0$	1.88	584	5.85
I b	$W=c\zeta^2$	1.76	438	4.38
II a	$W=0$	1.95	739	3.71
II b	$W=c\zeta^2$	1.82	485	2.44

<sup>o</sup> refer to Table 1.

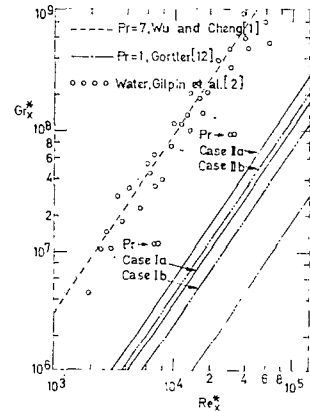


Fig. 3 Correlations between the Grashof number and the Reynolds number for the point of onset of longitudinal vortex rolls.

실험에서 관찰될 수 있는 임계치들보다 통상 낮아야 하기 때문이다. 다시 말하면, 최초에 무한소의 고관들이 실험적으로 탐지될 수 있기 위하여는 어느 정도 유한한 크기로 성장하여야 하기 때문이다. 반면에, 현재의 연구로부터 예측된 이론적인 발생점들이 Gilpin 등의 실험 자료들보다 약 한 크기 순위(one order of magnitude)만큼 작다는 사실은 매우 흥미로운 결과라고 할 수 있다. 이는 또한 본 연구가 규칙적인 길이방향 와동의 발생에 해당되는 임계치들에 대하여 좋은 상한치들을 제공해 주는 것으로도 믿어진다. 본 연구에서의 임계치들이  $Pr=1$ 에 대한 Görtler<sup>12)</sup>의 이론적인 결과보다 위에 위치한다는 점은 이와같은 사실의 타당성을 더욱 입증하는 것이다. 참고적으로, Fig. 3에서는 송출( $W=c\zeta^2$ )이 관계될 때, 기본 횡류 속도는 불안정화 효과를 나타낸다는 것과, 기본 횡류 속도를 포함시킴으로 인한 임계치들의 변화는 기본 유동 및 온도 장에 대하여 상이한 근사식들을 사용함으로써 인한

임계치들의 변화보다도 작다는 것을 알 수 있다.

전형적인 파장과 길이방향 와동의 발생점의 위치와의 상관 관계는 다음과 같이 얻어질 수 있다 :

$$\frac{x^*}{\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi(4.64)} a^* Pr^{\frac{1}{3}} \sqrt{Re_x^*} & \text{for Case I} \\ \frac{1}{2\pi(5.84)} a^* Pr^{\frac{1}{3}} \sqrt{Re_x^*} & \text{for Case II} \end{cases} \quad (37)$$

보다 현실적으로 기존의 실험 자료들과 비교하기 위하여는 유한한 값의  $Pr$ 에 해당하는  $a^*$ 의 값을 알아야 하겠으나, 여기서는 무한대의  $Pr$ 에 해당하는  $a^*$ 의 값을 사용하도록 한다. 왜냐하면, 식 (18)의 아래 부분에서 토의된 바와 같이  $a^*$ 에 대한  $Pr$ 의 영향은 특히  $Pr > 6$ 의 경우에는 대단하지 않다고 할 수 있기 때문이다. 그러므로 식 (37)에서  $6 < Pr < 10$ 의 범위에 대하여  $\frac{x^*}{\lambda} = (0.09 \sim 0.14) \sqrt{Re_x^*}$ 를 얻었는데, Gilpin 등은 그들의 실험 결과를  $\frac{x^*}{\lambda} = (0.16 \sim 0.31) \sqrt{Re_x^*}$ 로 외삽하였다. Fig. 4에서는 본 이론이 Gilpin 등의 실험결과 뿐 아니라 Wu와 Cheng의 이론 결과와도 비교되었다. 온도 차가 매우 작을 때, 즉, 선형 안정성 이론이 가장 적절하게 성립될 수 있을 때 본 이론이 Gilpin 등의 실험 자료들과 잘 일치한다는 사실은 매우 흥미로운 것이다.

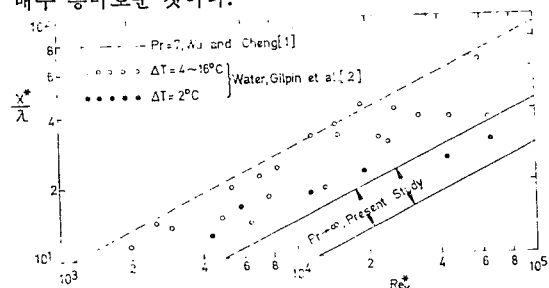


Fig. 4 Comparison between theory and experiment on the onset position of longitudinal vortices.

Fig. 5에는 본 해석이 동일한 형태의 유동에 대한 Chen과 Mucoglu<sup>3)</sup>의 평면 파형 안정성 해석과 비교되었다. 밑으로부터 등온으로 가열되는 수평 블라시우스 유동이  $4 \times 10^2 < Re_x^* < 10^5$ 까지의 범위에 대하여는 와동 물에 대하여 불안정하다고 할 수 있다. 더욱이,  $U_b$ 에 대한  $W_b$ 의 비는 항상  $Re_x^{1/2}$ 의 크기를 가짐으로, 위에서 언급된  $Re_x^*$ 의 범위 내에서 전자는 항상 후자보다 지배적임을 알 수 있다. 이로부터, 이미 Fig. 3에 대한 설명에서 언급되었던  $W_b$ 의 무시할만한 영향이 부분적으로 설명될 수 있다.

임계치들에 해당하는 교란 양들의 분포는, 식 (23) 및 (11)을 포함하는 다소 지루하지만 단순한 계산 후

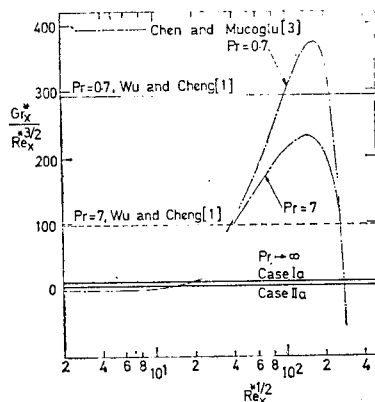


Fig. 5 Comparison of the onset conditions for vortex instability and wave instability of the horizontal Blasius flow heated from below.

에 임의의 배수까지만 구하여 진다. 왜냐하면 교란 양들의 진폭은 선형 안정성 이론으로부터는 결정될 수 없기 때문이다. Case II b에 대한 불안정성 발생점에서 교란 양들의 진폭  $\tilde{\theta}^*$ ,  $\tilde{v}^*$ ,  $\tilde{w}^*$ 의 분포가 Fig. 6에 보여졌는데, 교란의 최대 크기를 1로 취하였다. 추가적으로 동일한 경우에 대한 와동 물의 유선 형태가

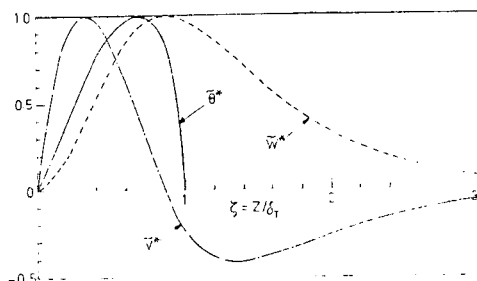


Fig. 6 Distributions of the amplitudes of the disturbances  $v^*$ ,  $w^*$ ,  $\theta^*$  for Case II b.

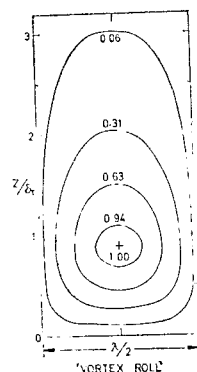


Fig. 7 Normalized stream line pattern of the vortex rolls at the onset of instability for Case II b.

Fig. 7에 주어졌는데, 물의 중심이 열 경계층 내에 위치한다는 점이 유의된다.

최종적으로, 밀도로부터 가열되는 수평 블라시우스 유동에서의 길이방향 와류 불안정성의 발생 기구를 보다 완전히 이해하기 위하여는  $Pr$ 의 효과가 고려되어야 한다는 점이 강조된다. 실제로, 본 연구의 기본 개념에 근거하여 입계치들에 대한  $Pr$ 의 효과를 고려하는 연구가 수행 중에 있다.

## 5. 결 론

밀도로부터 가열되는 수평 블라시우스 유동의 와류 불안정성에 대한 연구는 불안정성의 발생점에서 온도 교환들이 열 경계층 두께,  $\delta_T(x)$ 에만 한정된다는 가정 하에 큰  $Pr$ 의 극한 경우를 고려함으로써 적절히 설명될 수 있음이 보여졌다. 이는 또한 교란 방정식들 뿐 아니라 해당되는 경계조건들을 상당히 단순화된 형태로 표현하는 것을 가능케 하였다. 경계층 해석의 적분 방법으로부터 유도된 기본 유통 장에 대한 근사 다항식들을 추가적으로 사용함으로써 교란 속도의 횡류 성분을 맥급수 형태로 표시하는 것이 가능하였다.

중립 안정성 곡선은 경계조건들을 적용함으로써 얻어지는  $5 \times 5$  행렬식의 고유치들로부터 구하여졌으며, 이로부터 입계 레일리수 및 상응하는 입계 파수들이 얻어졌다. 본 연구에 의하여 예측된 이론적인 부력 매개변수  $Gr_x^*/Re_x^{*1.5}$ 는 Gilpin 등의 실험 자료보다 약한 크기 순위만큼 낮은 값들을 갖는데, 이는 본 연구의 타당성을 입증하는 좋은 근거가 된다. 또한 본 연구에 의하여 불안정성 발생 위치가 근사하게 예측될 수 있음이 보여졌는데, 이것은 선형 안정성 이론이 가장 적절하게 적용될 수 있는 경우에 대한 Gilpin 등의 실험 자료와 비교함으로써 확인되었다.

$4 \times 10^2 < Re_x^* < 10^5$ 의 범위 내에서, 밀도로부터 등온 가열되는 수평 블라시우스 유동은 파형 불안정성보다는 와류 불안정성에 속한다는 것이 밝혀졌다. 이는 Chen과 Mucoglu<sup>3)</sup>의 해석적인 연구 결과와 비교함으로써 입증되었는데, 실제로 실험적인 관찰과도 일치되는 것이다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단의 연구비 지원에 의하여 수행되었으므로 이에 심심한 감사의 뜻을 표합니다.

## 참 고 문 헌

1) R.S. Wu and K.C. Cheng, Thermal instability of

- Blasius flow along horizontal plates, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 19, pp.907-913, 1976.
- 2) R.R. Gilpin, H. Imura and K.C. Cheng, Experiments on the onset of longitudinal vortices in horizontal Blasius flow heated from below, *J. Heat Transfer*, Vol. 100, pp.71-77, 1978.
- 3) T.S. Chen and A. Mucoglu, Wave instability of mixed convection flow over a horizontal flat plate, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 22, pp.185-196, 1979.
- 4) G.J. Hwang and K.C. Cheng, Thermal instability of laminar natural convection flow on inclined isothermal plates, *Can. J. Chem. Eng.*, Vol. 51, pp.659-666, 1973.
- 5) S.E. Haaland and E.M. Sparrow, Vortex instability of natural convection flow on inclined surfaces, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 16, pp.2355-2367, 1973.
- 6) C.K. Choi, Thermal Convection in the Liquid Film of a Stratified Gas/Liquid Flow, Ph. D.thesis, Clarkson College of Technology, 1976.
- 7) E.J. Davis and C.K. Choi, Cellular convection with liquid-film flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 81, part 3, pp.565-592, 1977.
- 8) J.P. Holman, Heat Transfer, 4th edn., Appendix B, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1976.
- 9) E.J. Davis, C.K. Choi and E.J. Bonano, "Cellular convection with stratified gas-liquid flow" in Two-Phase Transport and Reactor Safety, eds. T.N. Veziroglu and S. Kakac, Hemisphere Pub., Washington, D.C. 1977.
- 10) H. Schlichting, Boundary-Layer Theory, 6th edn., p.192, p.291, McGraw-Hill, New York, 1968.
- 11) E.M. Sparrow, R.J. Goldstein and V.K. Jonsson, Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature profile, *J. Fluid Mech.*, Vol. 18, pp.513-528, 1963.
- 12) Von H. Görtler, Über eine Analogie zwischen den Instabilitäten laminarer Grenzschichtströmungen an konkaven Wänden und an erwärmten Wänden, *Ingenieur Archiv*, Vol. 28, pp.71-78, 1959.