

<論 文>

直4角 插入物로 充填된 有限平板의 應力解析

趙 宣 彙\* · 金 起 植\*\*

(1982年 7月 12日 接受)

Stress Analysis of the Finite Plates with Rectangular Inserts

Sun-Whi Cho and Ki Sik Kim

Abstract

This paper attempts to predict the stress concentration around the corner of rectangular inserts of different material of mechanical properties from the base material of the finite rectangular plate. The problem is analyzed through the FEM and photo-elastic experiment with the inclination angle of the insert as variable parameters.

According to the experiments and the numerical analysis, the maximum stress concentration occurs at the point of tangential discontinuity of a insert. When the lain insert or opening was so inclined that the distance from the free end of the plate to a corner became minimum, the maximum stress concentration factor was found.

1. 序 論

구멍이 있는 平板, 構造物의 구멍 附近의 應力集中 現象에 對하여는 많은 研究가 行하여져 왔다. 特히 Muskelishivili 나 Savin 等이 광범위하게 이와 관련된 問題를 다루었다.<sup>1),2)</sup>

구멍 또는 홈, 노치, 필렛 等의 주위에서의 應力分布에 對하여는 實驗的인 方法과 理論的인 方法으로 많은 研究가 이루어졌으나 中空形이 아닌 插入形으로서 그 모양이 各各 다른 插入物을 갖는 平板의 應力解析에 對한 報文은 적다.

特히 Muskelishivili는 圓形 및 橢圓形의 剛體가 插入된 平板의 應力分布 및 母材와 材質이 같은 圓形插入物이 堅固하게 끼워졌을 경우에 對하여 理論的인 方法으로 解析하였다.<sup>1)</sup>

最近에는 母材와 材質이 다른 插入物이 있는 平板에 對한 研究가 行해졌다. Feingold, Mirza 等이 이와 같은 경우에 對하여 光彈性實驗을 하였으며<sup>3)</sup>, 直4角形

插入物이 있는 경우에 對하여는 實驗的인 方法으로 解析이 이루어졌다.<sup>4)</sup>

直4角形 插入物이 있는 問題는 4角形 구석에서의 接線不連續(tangential discontinuity) 및 插入物과 母材 境界에서의 應力不連續 때문에 理論的인 解析이 매우 어려우며 따라서 實驗的인 方法이나 數值 解析의 方法에 依存하는 경우가 많다.

本 論文에서는 直4角形 插入物이 있는 直4角形 有限 平板이 단순 引張을 받을 때, 구멍주위, 特히 구석 附近의 應力集中 現象에 대하여 有限要素法으로 數值的 計算을 하고 이 數值解析의 結果와 光彈性實驗을 通하여 얻어진 實驗結果를 比較 檢討하였다.

母材의 材質로서는 영率  $E=280 \text{ kg/mm}^2$ , 프와송비  $\nu=0.37$ 의 光彈性 實驗用 에폭시수지(epoxy resin)을 取했으며 插入物의 材質로는  $E=0.84 \text{ kg/mm}^2$ ,  $\nu=0.4$ 의 에폭시러버(epoxy rubber)를 擇하였다.

Fig. 1과 같은 模樣의 試驗片이 單純引張을 받는 경우에 對해서만 다루었으며, 插入物이 母材와 이루는 角을 變化시켜 가면서 이 角의 變化에 따른 應力集中係數의 變化를 考察하였다.

\* 正會員, 서울大學校 機械設計學科

\*\*서울大學校 大學院

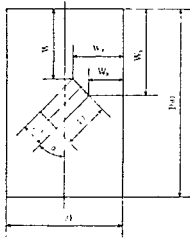


Fig. 1 Geometry of specimen.

有限要素法에 의한 數值解析은 Fig. 1에서 挿入物이 母材와 이루는 角  $\alpha$ 가  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 인 경우에 對하여 遂行하였고, 光彈性 實驗에서는 挿入物의 기울기가  $0^\circ$  및  $45^\circ$ 의 경우에 對하여 實施하였다.

2. 有限要素法에 의한 解析

2.1. 프로그램概要

本 論文에서 使用한 有限要素 프로그램은 Hinton, Owen<sup>5)</sup> 프로그램을 部分的으로 수정하여 利用하였다. 프로그램에서 使用한 要素는 8個의 節點을 가진 節點即, 이 數可變要素(isoparametric element)이고, 各 節點은 各各  $x$  및  $y$  方向의 변위  $u, v$ 의 自由度를 가지며 따라서 各 要素는 16個의 自由度를 갖는 것이 된다. 절점수 가변 요소에 對해서는 Zienkiewicz에 依하여 상세하게 다루어진 바 있다.<sup>6)</sup>

여기서는 가우스 적분 차수(Gaussian integration order)를 3으로 하여 Fig. 2에서 ●로 表示된 바와같이  $\xi, \eta$  값이 各各  $-\sqrt{0.6}, 0, \sqrt{0.6}$ 이 되는, 要素 마

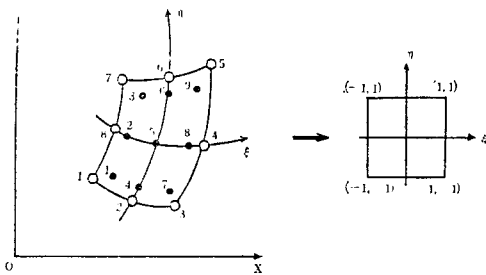


Fig. 2 Orientation of local axis  $\xi, \eta$ , and order of Gauss point and nodal numbering.

다 9個의 標本點(sampling point)을 取하여 이에 對한 應力 값을 求하였다.

이 때 完成된 프로그램의 異常 有無를 確認하기 爲하여 單純引張을 받는 4角形 平板에 對하여 各各 다른 應力를 入力시켜서 應力를 求하고 이들이 同一結果임을 確認하도록 하였다.

2.2. 挿入物이 있는 平板의 解析

一般的으로 平面應力를 다루는 問題에 있어서 모서리에서 應力不連續이 있는 경우 그 모서리에 인접한 點의 應力는 그 點과 모서리 사이의 距離를  $r$ 이라 하면, 대체로  $1/\sqrt{r}$ 에 비례한다고 알려져 있다. 따라서 本 問題의 경우 應力기울기(stress gradient)는 平板의 짧은 변이 긴 변보다 크다는 것을 알 수 있다.

應力기울기 및 應力集中이 크다고 예상되는 구멍 모서리 附近은 要素를 조밀하게 나누었으며, 여기서 멀어질수록 크게 나누었다. 여기서 適用한 概括적인 메

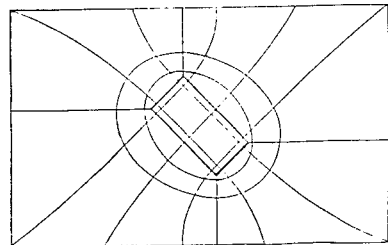


Fig. 3 Discretization of mesh in case of unsymmetric insert.

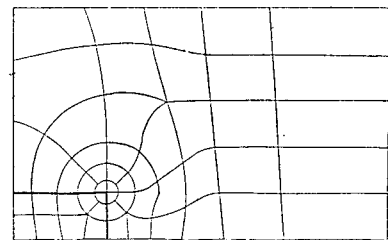


Fig. 4 Discretization of mesh in case of symmetric insert.

쉬 模樣을 Fig. 3 및 Fig. 4에 表示하였다. 挿入物이  $0^\circ$  또는  $90^\circ$ 로 기울어진 경우에는 대칭성을 利用하여 平板의 1/4 만을 取하여 計算하였으며, 그 밖의 경우에는 平板 全體에 對하여 計算을 수행하였다.

Hinton과 Owen<sup>5)</sup>에 依하여 作成된 프로그램을 活用함에 있어서 全 프로그램을 通하여, 最大 節點數를 200, 最大 要素數를 70, 最大 境界節點數를 80, 最大 프론트幅(front with)을 100으로 擴張하였고, 이에 따른 變數의 DIMENSION의 크기도 조절하였다. 入出力 裝置番號(unit number)를 COMMON文에서 指定하였다.

SUBROUTINE INPUT에서 매 문제마다 入力하도록 되어 있는 데이터中, 여러 問題에 重複되는 部分은 主 프로그램에서 한번 만 入力하여 계속 使用함으로써 入力時間을 줄일 수 있도록 하였다.

여러 問題를 同時에 解析하기 爲하여 問題數만큼의 NSET를 指定하도록 하였고, 마지막 데이터 카이드의 80번 行에 1을 充公하여 SUBROUTINE ECHO에서 이를 入力하여 프로그램을 終了할 수 있도록 하였다.

기타 IBM 360/370 계산기에 使用될 수 없는 文章은 적합한 文章으로 修正하였다.

### 2.3. 有限要素法에 依한 計算의 結果

Fig. 5~Fig. 10은 그림에 表示된 綫을 따라 計算된 主應力 값의 變化를 나타낸 것이다.

挿入物의 기울기  $\alpha$ 가  $45^\circ$ 인 Fig. 7과 Fig. 8의 값들을 비교하여 보면, 原點이 自由端으로부터 가까운 Fig. 7의 경우에 훨씬 더 큰 應力集中이 나타난다는

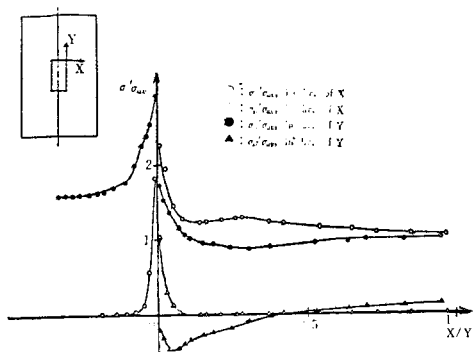


Fig. 5 Principal stresses in direction of X and Y.

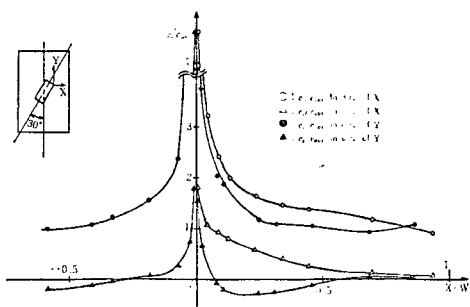


Fig. 6 Principal stresses in direction of X and Y.

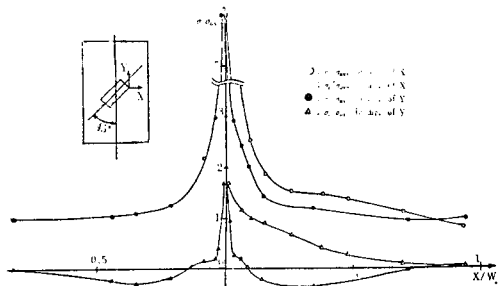


Fig. 7 Principal stresses in direction of X and Y.

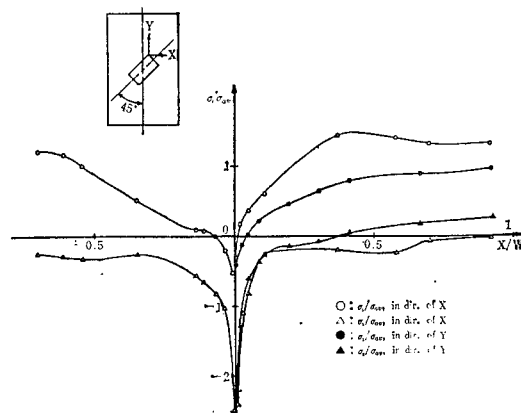


Fig. 8 Principal stresses in direction of X and Y.

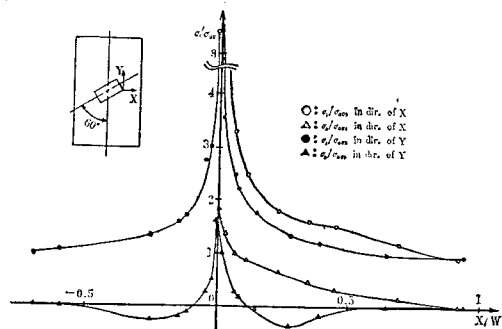


Fig. 9 Principal stresses in direction of X and Y.

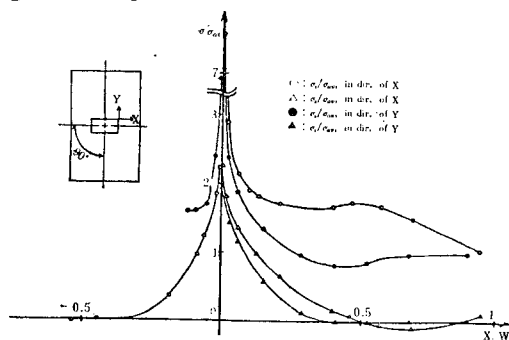


Fig. 10 Principal stresses in direction of X and Y.

것을 알 수 있으며, 이 점은 最大應力集中이 發生하는 點이 된다.  $\alpha=30^\circ$  및  $\alpha=60^\circ$ 의 경우에도 같은 結果로 나타나며 따라서  $\alpha=30^\circ$  및  $\alpha=60^\circ$ 인 경우, Fig. 6 및 Fig. 9에서는 自由端으로부터의 距離가 最小가 되는 不連續點으로부터 出發하는 綫을 따라 計算된 應力集中값 만을 나타내었다.

Fig. 5~Fig. 10에서 보는 바와 같이 구석에 있어서 는 특이성(singularity)의 性質이 明確함을 알 수 있다. 따라서 메쉬를 더욱 微細하게 나누면 구석 附近의 應

力값을 보다 正確하게 求할 수 있으나 計算量이 막대하게 增加하므로 制限하였다.

Fig. 5~Fig. 10에서 구멍모서리의 座標를  $X=0$ ,  $Y=0$ 으로 잡고, Fig. 1에서와 같이  $W_x$ ,  $W$ ,를 定하여,  $X/W_x$ ,  $Y/W$ ,로 되는 無次元 變數를 取하여 橫軸으로 定하였다.

縱軸은 應力集中係數를 나타내는 것이고, 여기서는 平均應力  $\sigma_{av}$ 로 各點에서의 主應力 값을 나누어 無次元의 값으로 하였다. 이 때 平均應力  $\sigma_{av}$ 는 하중 方向에 直角인 斷面의 面積으로 하중을 나눈 값이다.

이렇게 하여 얻어진 Fig. 5 및 Fig. 7은 다음의 光彈性 實驗에 依한 結果와 比較檢討하였다.

### 3. 光彈性 實驗

#### 3.1. 實驗裝置 및 實驗方法

##### (가) 實驗裝置

여기서 使用된 實驗機器는 Rikenkeiki社製, PA-420形으로서 420mm의 偏光板 2個와 1/4波長板 2個의 光學裝置를 가진 산란형(diffused type)이다.

##### (나) 試驗片의 準備

使用된 에폭시 光彈性 母材의 機械的 性質은 前述한 바와 같이 영率  $E=280\text{kg/mm}^2$ , 프와송비  $\nu=0.37$ 이고, 두께가 6mm인 平板을  $100 \times 178\text{mm}$ 로 加工하였다. 이 때 加工作業에 依한 잔류應력이 생기지 않도록 特別히 배려하였으며, 23,000rpm의 엔드 밀링機(end milling machine)으로 正確하게 加工하였다. 다음에 이 板의 中心에 直徑3mm의 drill로 구멍을 뚫고, 可能한 限 加工應력이 남지 않도록 삭소잉머신으로 가장자리 5mm 이상의 여유를 두고 加工한 後, 엔드밀로 1/20mm의 誤差의 범위에서 나머지 部分을 切削하였다. 4角形의 구석은 눈이 가는 3角錐 및 톱줄을 使用하여 加工하였다.

加工應력이나 過度한 熱發生을 막기 爲하여 모든 作業에서 切削 깊이와 feed는 可能한 限 작고 一定하게 하였으나 엔드 밀의 回轉數가 未洽하여 加工 殘留應力이 남아 있음을 確認할 수 있었다. 이 殘留應力을 제거하기 爲하여 熱處理를 하였으나 試片의 두께가 얇으므로 비교적 짧은 時間에도 풀림處理가 充分하게 이루어졌다.

熱處理 과정은 常溫에서  $100^\circ\text{C}$ 까지  $0.56^\circ\text{C}/\text{min}$  정도의 속도로 하고 여기서 13時間 지속시킨 후 常溫까지  $0.31^\circ\text{C}/\text{min}$  정도의 속도로 냉각하였고, 다음에 시간경과효과(time-edge effect)를 最小로 하기 위하여

$55^\circ\text{C}$ 의 溫度에서 48時間 동안 지속시키고 공냉하였다. 實驗은 熱處理 後 즉시 行하였다. 왜냐하면 熱處理 과정이 비교적 빠른 속도로 進行되었기 때문에 時間이 지남에 따라 殘留應力이 서서히 생겨날 수 있기 때문이다. 이 熱處理에는 引張試片 및 프린지 값(fringe value)의 測定을 위한 圓板도 같이 實施하여 熱處理 前後 및 實驗 後에 프린지 값 및 영率, 프와송비 등을 比較하였으나 거의 變化가 없었다.

插入物은 엔드 밀에 依하여 高速으로 加工하면 feed가 큰 境遇에도 거의 加工 應력이 생기지 않지만, 줄이나 샌드페이퍼로는 加工이 곤란하였다. 따라서 插入物은 수시로 母材의 구멍에 끼워가며 엔드밀로 加工하였다. 이때 加工 誤差는 1/20mm以內로 하여 插入物의 치수가 母板의 구멍보다 크지 않도록 插入物을 母

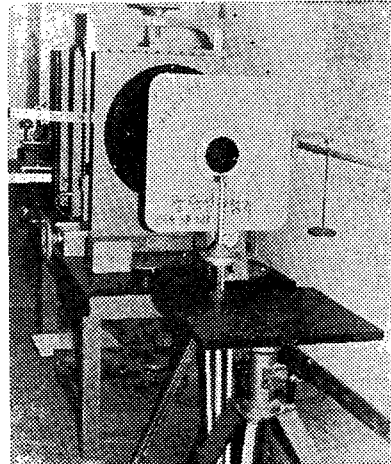


Fig. 11 Experimental equipment

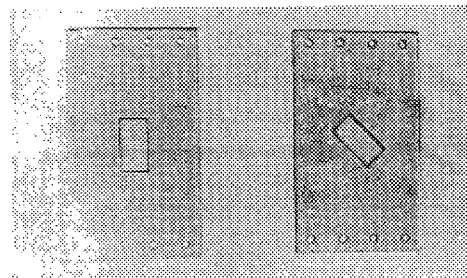


Fig. 12 Specimens with rectangular inserts of different properties.

板의 구멍에 끼워서 光彈性 實驗을 해가면서 加工하였다. 光彈性 實驗裝置 및 使用된 試驗片이 Fig. 11 및 Fig. 12에 各各 表示하였다.

母板과 插入物의 접착은 美國 Dynatro/Bondo Corp.社의 製品인 ERL-2774 Epoxy Glue resin과 트리에

틸렌·렘트리아민(triethylene-tetraamine)인 Epoxy Glue hardner의 混合物을 使用하였으며 接着劑가 充分히 굳은 後에 殘留應力이 없음을 確認할 수 있었다.

(다) 材料의 性質

使用한 에폭시 수지 및 에폭시 레버는 各各  $E=280\text{kg/mm}^2$  및  $\nu=0.37$  그리고  $E=0.84\text{kg/mm}^2$  및  $\nu=0.4$ 의 것이지만 이 값들을 그때 그때 確認하기 爲하여 每 實驗마다 영률, 프와송비 및 프린지 값 등을 測定하도록 하였다. Epoxy resin의 경우 實驗前 및 實驗後 測定하여 使用하였으나 epoxy rubber는 매우 軟質성이기 때문에 測定이 곤란하여 示方에 提示된 값  $E=0.84\text{kg/mm}^2$ ,  $\nu=0.4$ 를 利用하였다.

프린지 값은 圓板을 만들어 測定하였으며 그 값은 에폭시 수지 및 에폭시 레버가 各各  $f_c=1.28\text{kg/mm}$ ,  $0.00185\text{kg/mm}$ 이었다.

3.2. 實驗結果

實驗은 挿入物의 기울기가  $0^\circ$ 인 試驗片은  $80\text{kgf}$ 의 하중을 加하였고,  $45^\circ$ 의 試驗片은  $60\text{kgf}$ 의 하중을 加하였다. 各各의 경우에 對하여 등경선 및 등색선을 촬영하였으며, 등경선은  $10^\circ$  간격으로 촬영하였다.

촬영한 사진으로부터 主應力 값을 計算하는에는 剪斷차등법(shear-difference method)을 使用하였고 이를 위하여 Fig. 13라 같은 分割形式(grid system)을 利用하였다. 이 分割形式에서 보는 바와 같이 그리드의 길이  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ 의 값이 一定하지 않은 것은 등경선 촬영시  $10^\circ$  간격으로 촬영하였기 때문에 直線을 따라서 正確한 剪斷應力값을 얻을 수 없었기 때문이다.

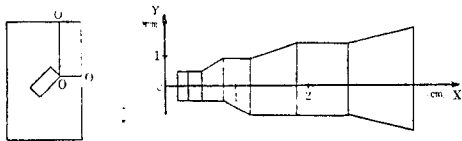


Fig. 13 Stress evaluation line and grid system for 45 deg. inclined insert at  $00'$ .

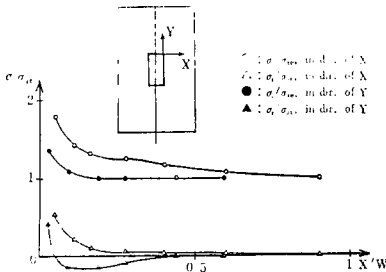


Fig. 14 Principal stresses in direction of X and Y.

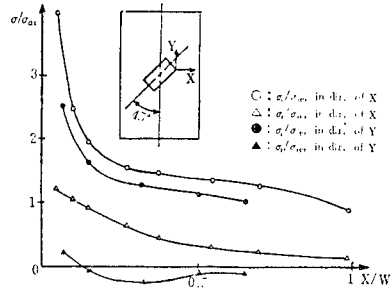


Fig. 15 Principal stresses in direction of X and Y.

이와 같이 剪斷差等法에 依하여 應力값을 求하여 Fig. 5~Fig. 10과 같은 방법으로 Fig. 14 및 Fig. 15에 表示하였다.

4. 結果 및 檢討

有限要素法에 依한 數值的 結果와 光彈性 實驗의 結果를 比較하기 위하여 Fig. 16 및 Fig. 17를 作成하였다. 여기서 보는 바와 같이  $45^\circ$  기울어진 삽입물이 있는 경우는 잘 일치하지만  $0^\circ$ 의 경우는 잘 일치하지 않고 있다. 이는 光彈性 解析時 分割을 상당히 거칠게 하였기 때문이라 생각된다. 한편 光彈性 實驗結果의 값을  $X/W_*$  또는  $Y/W_*$ 가  $0.05$ 보다 큰 값에 對해서만



Fig. 16 Principal stresses in direction of X and Y.

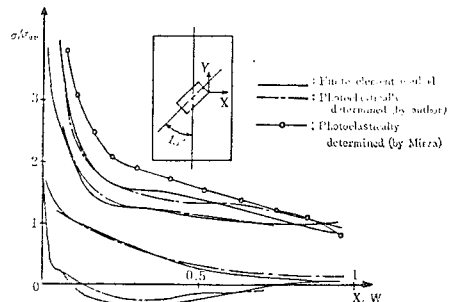


Fig. 17 Principal stresses in direction of X and Y.

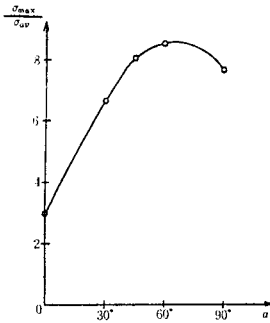


Fig. 18 Maximum stress concentration factor vs. insert angle.

求하였다. 이는 구석 근처에서의 높은 應力集中 때문에 正確한 프린지 次數를 얻기 힘들었기 때문이다. 實驗機器로서 여기서 使用한 산란형이 아닌 렌즈형(lens-type)을 使用하고, 편경(partial mirror) 등을 使用하여 프린지數를 더 正確히 읽을 수 있다면 나머지 값들도 有限要素法에 의한 값에 接近할 것이라 생각된다.

Fig. 17에는 參考로 Mirza<sup>4)</sup>가 求한 光彈性 實驗의 結果를 表示하였다. 그 값은 本論文의 結果와 상당한 차이를 보이고 있으나 그 理由는 Mirza가 使用한 試驗片의 짧은 변의 길이가 상대적으로 本論文의 試驗片보다 길어서 구멍의 구석으로부터 멀어짐에 따라 應力集中 係數의 變化가 작아져서 온 結果라고 생각된다.

Fig. 18에는 插入物이 母板과 이루는 角의 變化에 따른 最大應力集中 係數의 變化를 나타낸 것이다. Fig. 18에 依하면  $\alpha=60^\circ$  부근에서 最大값이 되었고, 이는 구석과 自由端의 距離가 가장 작을 때, 即,  $\alpha=63.4^\circ$  일때 最大 應力集中이 생긴다고 豫상된다.

## 5. 結 論

지금까지 별로 다루어진 바 없는 直4角形의 插入物을 가진 直4角形 有限平板의 應力集中 係數에 對하여 有限要素法으로 計算하고, 光彈性 實驗을 行하여 이들

結果를 比較 檢討한 結果 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

1) 最大 主應力은 自由境界(free boundary)로 부터 가장 가까운 곳에 있는 接線不連續點, 即, 插入物이 있는 附近의 구석으로부터 自由境界 까지의 距離가 가까운 곳에서 생긴다.

2)  $x$ 軸의 應力은 插入物의 기울기  $\alpha$ 가 커짐에 따라 自由境界 附近에서 급격히 감소하고, 이는 이 부분에서 굽힘 作用이생기고 있음을 알 수 있다.

3) 最大應力集中은 幾何學的으로 自由端과 插入物구석과의 距離가 插入物, 기울기  $\alpha$ 의 變化에 따라 다르게 되고, 이 距離가 가장 작게 되는  $\alpha=63.4^\circ$ 에서 最大가 된다.

## 參 考 文 獻

1. Muskelishvili, N.I., Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, P. Noordhoff Ltd., Groningen(1954).
2. Savin, G.N., Stress Concentration Around Holes, Pergamon Press Ltd., New York (1961).
3. Feingold, A., Mirza, S. and Malhotra, R.N., "Photoelastic Study of Stress Concentration in Rectangular Panels with Insert" Proc. Intl. Symp. on Exp. Mech. 34. 1-34.12, Waterloo (1972).
4. Mirza, S. and Ansari, K., "On Stress Concentration in Rectangular Plates Having Rectangular Inserts", Exp. Mech., 14(10), 412-416 (1974).
5. Hinton, E. and Owen, D.R.J., Finite Element Programming, Academic Press, London (1977).
6. Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company., Ltd London (1977).
7. Dally, J.W. and Riley, W.F., Experimental Stress Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill Inc. (1965).