Wiener-Hopf 方法(II)

李 斗 星
<建國大學校・工博>

前稿*에서는 후리에변환에 의하여 그 解를 구할 수 있는 문제중 Wiener-Hopf 方法의 사용을 要하는 문제들에 대하여 고찰하였고 예제들의 해를 구하므로서 그 해석 방법을 알아 보았다. 본 강좌에서는 적분방정식의 核을 그 因數가 初等函數인 다른 核으로 대체하여 근사해를 구하는 방법과 마지막으로 dual 적분방식을 다루고 Wiener-Hopf 方法에 대한 강좌를 끝내고저 한다.

4. 近似核의 使用

많은 科學的 調査의 目的은 硏究하는 現像의 巨視的 特徵을 어떻게 正確하게 表現하느냐에 있다. 普通 이와같은 硏究에 있어서는 細細한 數値的 正確性 보다 問題解析의 容易가 더 重要하며 有用한 近似란 不必要하게 자세한 數値를 얻지 못할지라도 問題의 해석을 간단한 方向으로 이끌 수 있는 것이라고 할 수 있다. 후리에變換과 Wiener-Hopf 方法을 使用하여 解를 얻을 수 있는 問題들이 바로 이러한 類型의 問題들인 것이다. 이런 問題의 相當數에 있어서 그 解가 簡單치 않은데 그 이유는 積分方程式의 核(kernel)의 積分變換의 因數가 매우 複雜하기 때문이다. 講座(I)에서 본 바와 같이 Wiener-Hopf 의 functional equation 은 積分方程式과 等價이고 이 식의 核의 積分變換은 반드시 몫으로 分解해주어야 한다.

이 核을 그의 重要한 特徵들과 같은 特徵(예컨데 積分區間內에서의 特異點, 面積 및 最初 몇개의 모우멘트)을 가진 다른 核으로 代替하였을 때 여기서 얻어지는 解는 原問題의 解의 重要한 特徵들을 再現시키리라고 豫見할 수 있다. 代替된 核에서 만일 積分變換에 依한 因數가 初等函數들이라면 그 解는 매우 간단하게 얻을 수 있을 것이다. 이 節에서는 이 核代替의 方法을 使用하여 몇개의 例題를 다루고 더 많은 計算을 하여 얻어진 原問題의 解와 比較하여 이 방법이 有效한 方法임을 보이고저 한다. 代替된 核이 原核과 同一한 特異點, 同一한 面積 및 同一한 1차모우멘트를 가질 때 앞에서 言及한 目的이 이루어진다. 물론 모우멘트를 더 많이 一致시킬 수 있을 때 더 정확한 結果를 얻을 수 있을 것이다.

첫째 例로 非粘性의 非壓縮性流體가 平板위를 흐르는 問題를 생각하자. 時間이 零일때 平板의 溫度를 갑자기 올렸다 하자. 無次元의 數式으로 이 問題는

$t>0$ 이고, D 안에서 $\Delta\theta-\theta_x-\theta_t=0$ (4-1)

를 滿足시키는 $\theta(x, y, t)$를 구하는 것과 같다. (윗 式에서 D는 xy 平面上의 半直線 $y=0$, $x>0$의 外部領域이고 첨자들은 偏微分을 뜻한다.) $t<0$에 대하여는 모든 點에서 $\theta=0$이다. $t>o$일 때는 $I_m(x+iy)^{1/2}\to\infty$임에 따라 $\theta\to 0$이다. 半直線上에서는 $x>0$에 대하여 $\theta(x,0,t)=h(t)$이고 여기서 $h(t)$는 單位階段函數이다.

式 (4-1)을 x에 대하여 후리에變換과 t에 대하여 라플라스變換을 各各 取하여 解를 求하면

---
* 大韓機械學會誌 第22卷 第3號, pp. 214~222

다음과 같다.

$$\Theta(\xi, y, s)=A(\xi, s) \ \exp(-|y| \sqrt{\xi^2-i\xi+s}) \tag{4-2}$$

위에서 $A(\xi, s)$는 未知의 函數이다.

$$f(x, t)=\theta_y(x, 0+, t)-\theta_y(x, 0-, t) \tag{4-3}$$

로 定義하면 $f(x,t)$는 $t<0$에 대하여 零이 되므로 $F(\xi, s)$는 $F_+(\xi, s)$로 써줄 수 있다. 또한 $v(x, t)$를 다음과 같이 定義하자.

$$\theta(x, 0, t)=h(x)h(t)+v(x, t)$$

그러므로 $v(x, t)$는 $x<0$와 $t>0$에 대하여만 零이 아니다. 따라서 $V(\xi, s)$는 $V_-(\xi, s)$ 函數이다. 첨자 $+$와 $-$는 물론 ξ-平面에 대한 것이다.

Wiener-Hopf 問題는 다음과 같다.

$$-\frac{F_+(\xi, s)}{2\sqrt{\xi^2-i\xi+s}}=-\frac{1}{i\sqrt{2\pi}\ s\xi} + V_-(\xi, s) \tag{4-4}$$

ξ平面위에서 逆變換路線은 原點위와 點 $\xi=ir_+$ 밑을 通過해야 한다. 여기서

$$r_+=1/2+\sqrt{1/4+s}$$
$$r_-=1/2-\sqrt{1/4+s} \tag{4-5}$$

이다. 式 (4-5)를 使用하여 式 (4-4)에서 $(\xi^2-i\xi-s)^{-1/2}$의 初等分解를 해주면 다음의 式을 얻는다.

$$-\frac{F_+(\xi, s)}{2\sqrt{\xi-ir_-}}+\frac{\sqrt{-ir_+}}{i\sqrt{2\pi}\ s\xi} =\frac{\sqrt{-ir_+}-\sqrt{\xi-ir_+}}{i\sqrt{2\pi}\ s\xi}+\sqrt{\xi-ir_+} \cdot V_-(\xi, s) \tag{4-6}$$

따라서

$$F_+(\xi, s)=\frac{2\sqrt{-ir_+}\ \sqrt{\xi-ir_-}}{i\sqrt{2\pi}\ s\xi} \tag{4-7}$$

이다. 무차원열전달율 $\theta_y(x, 0+, t)$는 $1/2 f(x, t)$이고 윗 式에서 공식

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{-r_- -i\xi}}e^{-i\xi u}\ d\xi =\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\ \dfrac{e^{r_- u}}{\sqrt{u}}, & u>0\\ 0, u<0\end{cases}$$

와 Faltung의 定理 즉

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)\ G(\xi)e^{-i\xi x}\ d\xi =\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du$$

를 사용해 주면 $\theta_y(x, 0+, t)$의 t에 關한 라플라스變換은 다음과 같다.

$$-\frac{1}{\sqrt{s}}+\frac{1}{\sqrt{r_+}}\left(\frac{1}{\sqrt{-r_-}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot\left\{-\int_0^{\infty} h(x-u)\ \frac{e^{r_- u}}{\sqrt{u}}\ du +\frac{1}{r_-}\frac{e^{r_- x}}{\sqrt{x}}\right\}\right)$$

따라서 윗 式의 라플라스역변환을 取하면

$$\theta_y(x, 0+, t)=-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}+\frac{1}{2\pi i\sqrt{\pi}} \cdot\int_x^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)du \cdot\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\exp\left[st-\left(\sqrt{s+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)u\right]}{\left(\sqrt{s+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^{1/2}}ds \tag{4-8}$$

이 된다. $x>0$인 모든 값에 대하여 $t\to\infty$일 때 漸近擧動을 구하기 위하여 $t\to\infty$일 때의 값은 $s\approx 0$일 때의 값에 대응하는 사실과 $\frac{u}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-u^2/4t^2}$의 라플라스변환이 $e^{-u\sqrt{s}}$인 것을 사용한다. 式 (4-8)에서 變數變換 $u=2\sqrt{t}\,\eta+t$를 해주면 근사적으로

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot\int_{\frac{x-t}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\eta^2}\ d\eta$$

이고 결국

$$\theta_y(x, 0+, t)\sim-\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\operatorname{erfc}\left(\frac{t-x}{2\sqrt{t}}\right) -\frac{1}{2\sqrt{\pi x}}\operatorname{erfc}\left(\frac{x-t}{2\sqrt{t}}\right) \tag{4-9}$$

이 된다.

따라서 $x-t\gg 2\sqrt{t}$이면 $\theta_y(x, 0+, t)\sim -(\pi t)^{-1/2}$이고 $t-x\gg 2\sqrt{t}$이면 $\theta_y(x,\ 0+,\ t)\sim -(\pi x)^{-1/2}$이다.

이제 이 問題의 近似解析에 대하여 考察해 보자. $f(x, t)$의 라플라스變換을 $\Phi(x, s)$로 表示하면 式 (4-4)는 아래와 같은 $\Phi(x, s)$에 대한 적

분방정식으로 써줄 수 있다.

$$\frac{1}{s}=\int_0^\infty k(x,x',s)\Phi(x',s)dx',\quad x>0 \qquad (4\text{-}10)$$

여기서

$$k(x,s)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-i\xi+s}} \qquad (4\text{-}11)$$

이다.

式 (4-10)에서 $k(x,s)$ 대신 어떤 다른 核 $k_1(x,s)$를 代入하여서 얻어지는 해는 原方程式의 解와 다를 것은 자명하자. 그러나 $k_1(x,s)$ 곡선 밑의 面積과 특이점 $(x=0)$ 및 最初 몇개의 모우멘트

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^n k_1(x,s)dx$$

들이 $k(x,s)$에 대한 것들과 일치한다면 代替問題의 解는 原問題의 解와 매우 近似하리라는 것도 明白하다. k_1의 이같은 모우멘트들이 매우 작은 s의 값(따라서 큰 값의 時間)에 대해서만 k의 그 값들에 近似하다면, $f_1(x,t)$(代替問題의 解)는 $f(x,t)$의 時間變數에 대한 매우 좋은 漸近어림값을 줄 것이다.

$$K(\xi,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}k(x,s)dx$$

로 부터 $k(x,s)$의 面積 그리고 모우멘트들은 各各 $K(0,s)$, $K_\xi(0,s)$, $K_{\xi\xi}(0,s)$ 等에 비례하므로 위에서 말한 값에 대하여 $k(x,s)$에 가까운 값을 갖는 $k_1(x,s)$를 선택하기란 간단한 일이다. 이같은 선택을 함에 있어서 K보다 K_1이 훨씬 더 쉽게 분해될 수 있도록 함이 보통이다. 이 예제에 있어서는 K가 이미 쉽게 分解될 수 있으므로 K_1을 $\Phi_1(x,s)$가 쉽게 逆變換될 수 있도록 택한다.

$$K_1(\xi,s)=-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(\xi^2-i\xi+s+i\xi s)^{-1/2}$$

로 擇하면 K에 대한 K_1의 面積 및 最初의 두 모우멘트들의 비는 각각 1, $1-s$, $(1+\frac{4}{3}s-s^2)(1+\frac{4}{3}s)$이 됨을 알 수 있다. $k_1(x,s)$와 $k(x,s)$의 특이점들은 같다. $f_1(x,t)$는 정확히

$$f_1(x,t)=\begin{cases}-2(\pi t)^{-1/2}, & x>t\\ -2(\pi x)^{-1/2}, & t>x\end{cases}$$

이며 原함수

$$f(x,t)=2\theta_y(x,0+,t)$$

의 큰값의 t에 대한 擧動과 一致한다. 흥미로운 것은 만일 原問題를 水平的 擴散을 무시하고 즉 $\theta_{yy}-\theta_x-\theta_t=0$로 하여 해석하였더라면 그 解로 윗 식과 똑같은 $f(x,t)$를 얻었으리라는 점이다.

核代替가 有效한 또 다른 例로 다음 문제를 생각하자.

$x>0$에 대하여

$$1=\int_0^\infty k(x-y)g(y)dy \qquad (4\text{-}12)$$

이고, 위에서

$$k(x)=\frac{1}{\pi}R_e[e^{ix}Ei(ix)] \qquad (4\text{-}13)$$

이며 $E_i(x)$는 講座(I)의 式 (2-2)로 정의된 指數積分(exponential integral)이다. $k(x)$의 후리에變換은 $\sqrt{1/2\pi}(1+|\xi|)^{-1}$이다. 核 $k(x)$의 특이점은 $x=0$에 있고 그 面積과 1차모우멘트는 각각 1과 零이다. 또 2차모우멘트는 存在하지 않는다. 式(4-12)로 부터 얻게되는 Wiener-Hopf 문제는

$$N_-(\xi)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{1}{-i\xi}$$
$$=(1+|\xi|)^{-1}G_+(\xi) \qquad (4\text{-}14)$$

이고, 위에서 N_-는 $x<0$에 대하여 그 값이 零인 미지함수 $n(x)$의 후리에變換이고, 또 $G_+(\xi)$는, $x>0$에서는 $g(x)$와 一致하고 $x<0$에서는 零이 되는 函數의 變換이다. Wiener-Hopf 方法을 適用하기 위해여 核의 적분변환을 분해해 주어야 한다. 이 인수들을 구하기 위해서 講座(I)에서 취급한 核분해방법을 사용한다. 즉 $K(\lambda)=\frac{L_+(\lambda)}{M_-(\lambda)}$에서 $\ln L_+(\lambda)=R_+$로 놓으면 R_+는 $|\xi|$를 $\sqrt{\xi^2+\varepsilon^2}$로 바꾸어 주고 극한과정을 취하여 얻을 수 있다. 즉 $R_+(\lambda)$는

$$R_+(\lambda,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+\alpha i}^{\infty+\alpha i}\frac{\ln(1+\sqrt{z^2+\varepsilon^2})}{z-\lambda}dz$$

을 먼저 구한 後 ε을 영에 접근시키므로 얻을 수 있다. 지금 $\alpha=0$으로 취할 수 있으므로

$$R'_+(\lambda,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{z^2+\varepsilon^2})}{(z-\lambda)^2}dz$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{zdz}{(1+\sqrt{z^2+\varepsilon^2})\sqrt{z^2+\varepsilon^2}(z-\lambda)}$$

이다. 위에서 prime은 λ에 대한 미분을 의미한다. 윗 식에서 $z=\frac{\varepsilon}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$로 치환하면

$$R_+'(\lambda,\varepsilon)=\frac{1}{\pi i\varepsilon}\cdot\int_0^\infty \frac{(x^2-1)dx}{\left(x^2+2\frac{x}{\varepsilon}+1\right)\left(x^2-2\frac{\lambda}{\varepsilon}x-1\right)}$$

윗 적분을 부분분수로 분해하면

$$R_+'(\lambda)=\frac{\varepsilon}{2\pi i}\int_0^\infty\left[\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\varepsilon^2}}\cdot\left(\frac{A}{\varepsilon x-\lambda-\sqrt{\lambda^2+\varepsilon^2}}+\frac{B}{\varepsilon x-\lambda+\sqrt{\lambda^2+\varepsilon^2}}\right)-\frac{C}{\varepsilon x+1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}+\frac{D}{\varepsilon x+1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right]dx$$

여기서, 각각

$$A=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\varepsilon^2}+1},\quad B=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\varepsilon^2}-1},$$

$$C=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}+\lambda},\quad D=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}-\lambda}$$

위에서 적분을 행하고 ε을 零에 접근시키면

$$R_+'(\lambda)=\frac{1}{\pi i}\;\frac{\ln\lambda}{1-\lambda^2}-\frac{1}{2(\lambda+1)}$$

이 된다. 따라서,

$$\ln L_+=R_+(\lambda)=\frac{1}{\pi i}\int_0^\lambda\frac{\ln z}{1-z^2}dz-\ln\sqrt{1+\lambda^2}$$

이고 $\ln M_-$도 마찬가지로 구할 수 있다. 따라서 $\frac{1}{1+|\xi|}$은 다음과 같이 분해된다.

$$\frac{1}{1+|\xi|}=\left[\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\exp\left(\frac{1}{\pi i}\int_0^\xi\frac{\ln z\,dz}{1-z^2}\right)\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\exp\left(-\frac{1}{\pi i}\int_0^\xi\frac{\ln z}{1-z^2}dz\right)\right]\quad(4\text{-}15)$$

위에서 처음인수는 상부평면$(-\pi/2<\arg z<3\pi/2)$에서, 또 둘째번 인수는 下部平面 $(-3\pi/2<\arg z<\pi/2)$에서 각각 正則이다. 이 두 因數를 각각 $C_+(\xi)$, $C_-(\xi)$로 表示하면 式 (4-14)는

$$\frac{N_-(\xi)}{C_-(\xi)}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{1}{-i\xi}\left(\frac{1}{C_-(\xi)}-\frac{1}{C_-(0)}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{1}{i\xi}\;\frac{1}{C_-(0)}+G_+(\xi)C_+(\xi)$$

이므로, 따라서

$$G_+(\xi)=\frac{1}{-i\sqrt{2\pi}\,\xi}\;\frac{1}{C_+(\xi)}\;\frac{1}{C_-(0)}\quad(4\text{-}16)$$

이 된다. 위에서 逆변환노선은 원점위로 오목하게 해 주어야 한다. 따라서 陽의 큰값에 대하여(작은 ξ값일 때 이므로) $g(x)\sim1+0(1/x)$이고 陽의 작은 x값에 대하여(큰 ξ값일 때) $g(x)\sim 1/\sqrt{\pi x}$이 된다.

이제 式 (4-13)로 주어진 본래의 核 $k(x)$를 다음의 式으로 근사시키자.

$$k_1(x)=\frac{1}{\pi}K_0(|x|)\quad(4-17)$$

위에서 $K_0(x)$는 零位의 modified Bessel 函數이다. 이 변경된 核은 본래의 核과 같은 特異點(原點)과 1차모우멘트를 가지나 2차모우멘트는 存在하지 아니하는 대신 1이다.

式 (4-12)에서 $k(x)$를 $k_1(x)$로 置換한 식의 解를 $g_1(x)$라 하고 그 후리에 變換을 $G(\xi)$라면 Wiener-Hopf 문제는

$$N_-(\xi)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{1}{-i\xi}=\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}G_+(\xi)$$

이고 이식은 다시

$$\left[N(\xi)\sqrt{1+i\xi}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{\sqrt{1+i\xi}-1}{-i\xi}\right]_- -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{1}{i\xi}=\frac{G_+(\xi)}{\sqrt{1-i\xi}}$$

이므로 따라서

$$G_+(\xi)=-\frac{\sqrt{1-i\xi}}{\sqrt{2\pi}\;i\xi}$$

이 된다. 이제 윗 식에서 式 (4-7)의 다음에 나타나는 公式을 적용해 주면

$$g_1(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}+\operatorname{erf}\sqrt{x}\quad(4\text{-}18)$$

을 얻는다. 따라서 큰 x에 대하여는 $g_1(x)\sim 1+0(e^{-x}/\sqrt{x})$이고 작은 x에 대하여는 $g_1(x)\sim 1/\sqrt{\pi x}$이다.

따라서 x의 크고 작은 값에 따른 $g_1(x)$의 擧動은 原問題의 해의 거동과 같고, 특이점이 2차모우멘트보다 더 重要한 核의 "幅"에 대한 기준이 되는 것 같다. 그러나 同次問題를 취급함에 있어서는 특이점 및 2차모우멘트를 둘다 유지하는 것이 正確性을 顯著하게 높인다. 近似核의 使用의 마지막 例로서 다음의 同次方程式을 생각한다.

$$\lambda\int_0^\infty k(x-t)f(t)dt=f(x) \tag{4-19}$$

위에서 (1) $k(x)=(1/\pi)$ $K_0(|x|)$ (modified Bessel 函數) (2) $k(x)=1/2$ $E_i(|x|)$[指數積分]인 때를 고찰한다. 分解를 해주어야 하는 후리에적분 변환함수는 각각

(1) $\dfrac{\lambda}{\sqrt{\xi^2+1}}-1$

(2) $\dfrac{\lambda \text{arc tan}\,\xi}{\xi}-1$ (4-20)

이다.

(1)에 대한 첫째 近似로서

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\xi^2+1}}-1=\frac{\lambda^2-1-\xi^2}{\sqrt{\xi^2+1}(\lambda+\sqrt{1+\xi^2})}$$
$$\cong\frac{\lambda^2-1-\xi^2}{\sqrt{\xi^2+1}\sqrt{\xi^2+(1+\lambda)^2}} \tag{4-21}$$

로 取할 수 있다. 이 近似는 原核의 面積 및 特異點을 유지한다. 더 좋은 근사는 다음과 같다.

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\xi^2+1}}-1\cong\frac{(\lambda^2-1-\xi^2)(\xi^2+\beta^2)}{\sqrt{\xi^2+1}\sqrt{\xi^2+\alpha^2(\xi^2+\gamma^2)}} \tag{4-22}$$

위에서 α, β, γ는 面積과 2차 모우멘트가 유지되도록 決定해야 한다. 따라서 셋中 하나는 任意로 取할 수 있으나 根이나 特異點이 實軸 가까이 있지 않도록 해야 한다. 고유함수(eigenfunction)의 主된 특징에 영향을 주지 않도록 假特異點의 位置를 정하는 것이 가장 바람직한 것은 명백하다. $\alpha=1$로 取함이 편리하고 따라서

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\xi^2+1}}-1\cong\frac{(\lambda^2-1-\xi^2)(\xi^2+2)}{(\xi^2+1)[\xi^2+2(\lambda+1)]} \tag{4-23}$$

式 (4-19)의 解는 정확한 核을 사용하거나 또는 近似核中의 하나를 사용하거나 다음과 같다.

$$f(x)=\sin\,p(x+q)+0(e^{-x}) \tag{4-24}$$

위에서 p와 q는 λ에만 관련된 상수이다. 表1에 엄밀해를 사용하였을 때와 근사식 (4-21)과 (4-23)을 사용하였을 때의 q 값을 비교하였다. 表2의 경우에도 같은 형의 근사를 사용해줄 수 있다. 즉

表 1

λ	k	q(엄밀해)	q[式 (4-21)]	q[式 (4-23)]
1	0	0.817	0.75	0.793
1.02	0.2	0.814	0.742	0.78
1.12	0.5	0.797	0.697	0.720

$$\lambda\frac{\text{arc tan}\,\xi}{\xi}-1\cong\frac{(p^2-\xi^2)(\xi^2+\beta^2)}{(\xi^2+\alpha^2)(\xi^2+\gamma^2)} \tag{4-25}$$

로 써주자. 위에서 $p^{-1}\text{arctan}\ p=1/\lambda$이다. 面積과 2차모우멘트를 유지하기 위하여 $\alpha^2=1$, $\beta^2=(1-\lambda R)p/(R-1/5)$, $\gamma^2=(1-\lambda R)/[\lambda(R-1/5)]$, $R=1/3-1/5p^2$로 取한다. 式 (4-24)의 q 값을, 엄밀해를 사용하였을 때와 근사식 (4-25)를 사용하였을 때, 比較한 것을 表2에 보인다.

表 2

λ	p	q (엄밀해)	q[式 (4-25)]
1	0	0.710	0.67
1.013	0.2	0.701	0.67
1.053	0.4	0.676	0.664

5. Dual 積分方程式

여기까지 고찰한 問題들과 특징이 비슷한 問題들은 또 dual 積分方程式으로 기술될 수 있다. 例로서 Sommerfeld 廻折問題를 생각하자.

그림 1에 보인 바와 같이 平面波

$$\varphi_i=e^{-ik(x\cos\theta+y\sin\theta)} \tag{5-1}$$

가 半平面 $x<0$, $y=0$, $-\infty<z<\infty$을 占有하는 板과 이루는 入射角이 θ라 하면 板에 의한 場의 變化는 $\varphi(x,y)$가 되므로 全場은

$$\varphi_T=\varphi_i+\varphi \tag{5-2}$$

로 주어지고 위에서 φ는

$$\Delta\varphi+k^2\varphi=0 \tag{5-3}$$

를 만족한다.

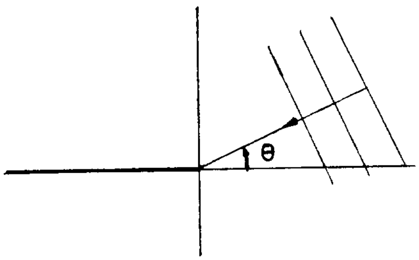

그림 1

이 問題에 있어서 板위에서 $\frac{\partial \varphi_T}{\partial y}$가 零이어야 하므로 $x<0$에 대하여

$$\varphi_y = ik(\sin\theta)e^{-ikx\cos\theta} \tag{5-4}$$

이어야 한다. 또 φ_y는 직선 $y=0$에서 연속이다. 方程式 (5-3)의 x에 대한 후리에 變換의 解는

$$\Phi(\lambda, y) = \begin{cases} A(\lambda)\exp(-y\sqrt{\lambda^2-k^2}), & y>0 \\ -A(\lambda)\exp(y\sqrt{\lambda^2-k^2}), & y<0 \end{cases} \tag{5-5}$$

이다. 위에서 φ_y의 連續性 즉 Φ_y가 직선 $y=0$에 따라서 연속임을 사용하였다. 式 (5-5)의 逆變換을 取할 때 逆變換路線은 分枝點 $\lambda=-k$에서는 위로 또 $\lambda=k$에서는 밑으로 各各 오목하게 해주어야 하고 λ가 實數로 k보다 큰 값일 때 $\sqrt{\lambda^2-k^2}$은 陽의 값으로 取해야 한다. [또는 分枝點들을 各各 $-k-i\varepsilon$, $k+i\varepsilon$ ($\varepsilon>0$)로 移動시키고 逆變換路線을 이 두 分枝點 사이에 놓여 있는 水平線으로 取할 수도 있다.]

式 (5-4)로 부터

$$-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{k\sin\theta}{\lambda-k\cos\theta} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \varphi_y(x,0)e^{i\lambda x}dx \tag{5-6}$$

[逆變換路線은 極 $\lambda=k\cos\theta$의 밑으로 通過해야 한다. 이것은 式 (5-4)의 오른편에 감퇴하는 項 $e^{\varepsilon x}$, $\varepsilon<0$을 導入하여 알 수 있다]. y가 위에서부터 혹은 밑으로 부터 零에 接近할 때 $\varphi(x,y)$의 極限값을 各各 $\varphi(x,0+)$와 $\varphi(x,0-)$로 表示하자. 따라서 $x>0$일 때는 $\varphi(x,0+)=\varphi(x,0-)$이다. 그러면 式 (5-5)로 부터

$$A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{i\lambda x}\varphi(x,0+)dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\lambda x}\varphi(x,0)dx$$

$$-A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{i\lambda x}\varphi(x,0-)dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\lambda x}\varphi(x,0)dx \tag{5-7}$$

이고 이 方程式들은

$$A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{i\lambda x}[\varphi(x,0+) - \varphi(x,0-)]dx \tag{5-8}$$

를 의미한다. 지금 式 (5-6)의 셋째 項을 $F_+(\lambda)$로 表示하고 式 (5-8)의 오른쪽 項을 $U_-(\lambda)$로 表示하면 Wiener-Hopf의 問題는 式 (5-6)과 (5-8)에서 $A(\lambda)$를 소거하면

$$-\sqrt{\lambda-k}\,\frac{U_-(\lambda)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{k\sin\theta}{\sqrt{\lambda+k}(\lambda-k\cos\theta)} + F_+(\lambda)\sqrt{x+k}$$

이 되고 윗 式에서 둘째 項에서

$$\frac{k\sin\theta}{\sqrt{\lambda+k}(\lambda-k\cos\theta)} = -\tan\frac{\theta}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda+k}} - \frac{\sqrt{\lambda+k}-\sqrt{k(1+\cos\theta)}}{\lambda-k\cos\theta}\right]_+ + \left[\frac{\sqrt{2k}\,\sin\frac{\theta}{2}}{\lambda-k\cos\theta}\right]_-$$

로 써줄 수 있으므로

$$\frac{U_-(\lambda)}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sqrt{2k}\,\sin\frac{\theta}{2}}{(\lambda-k\cos\theta)\sqrt{\lambda-k}}$$

이다. 따라서 式 (5-5)로부터

$$\varphi = \mp\frac{\sqrt{2k}\,\sin(\theta/2)}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(-i\lambda x\mp y\sqrt{\lambda^2-k^2})}{(\lambda-k\cos\theta)\sqrt{\lambda-k}}d\lambda \tag{5-9}$$

이다. 윗 式에서 上下의 부호들을 各各 $y>0$와 $y<0$에 대응한다. 앞에서 언급한 바와 같이 積分路는 $\lambda=k\cos\theta$와 $\lambda=k$의 밑으로 또 $\lambda=-k$의 위로 通過해야 한다. 그리고 $\sqrt{\lambda^2-k^2}$은 $\lambda>k$로서 λ가 實數일 때는 陽으로 取해야 한다.

이제 이 問題를 dual 적분방정식으로 기술한 다음 그 解를 구해보자. 이 적분방정식들은 쉽게 유도할 수 있다. 실제로 式 (5-8)로 부터 $A(\lambda)$는 $x>0$일 때 零이 되는 函數의 적분변환임을 알 수 있으므로, 따라서

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-i\lambda x}A(\lambda)d\lambda = 0, \quad x>0 \tag{5-10}$$

또 式 (5-6)으로 부터

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-i\lambda x}\sqrt{\lambda^2-k^2}\,A(\lambda)d\lambda = ik(\sin\theta)e^{-ikx\cos\theta}, \quad x<0 \tag{5-11}$$

式 (5-10) 및 (5-11)의 各各에서 적분노선은 $\lambda=-k$의 위로 또 $\lambda=k$의 밑으로 오목하게 해 주

어야 된다. 이제 당면한 과제는 式 (5-10) 및 (5-11)로 부터 $A(\lambda)$를 決定하는 일이다. 한 가지 方法은 分明하다. 즉 두개의 미지의 함수를 도입한 後($x<0$일 때 式 (5-10) 및 $x>0$일 때 式 (5-11)의 오른편에 각각 하나씩) 이 두 方程式의 후리에 변환을 取하여 $A(\lambda)$를 소거하는 法이다. 그러면 앞에서 해석한 바와 똑같은 Wiener-Hopf 문제를 얻게 된다.

이제 Wiener-Hopf 方法과 좀 다르나 이에 관련된 方法을 고찰하자. 이 方法을 설명함에 있어서 $\lambda=-k$와 $\lambda=k$에 있는 分枝點들이 實軸에서 약간 移動하여 原位置보다 各各 밑에와 위에 있다고 생각함이 편리하다. 그러면 적분노선은 새로운 분지점의 사이를 통과하는 임의의 수평직선으로 취하면 된다. 式 (5-10)으로 부터 $A(\lambda)$는 $x>0$에서 零이 되는 함수의 적분변환이므로 $A(\lambda)$는 어떤 下部半平面에서 正則이다. 더우기 하부半平面에서 $|\lambda|\to\infty$임에 따라 $|A(\lambda)|\to 0$이다. 지금 적분路線을 이 영역의 上限경계로 택할 수 있다고 가정한다. 다음에, $P(\lambda)$를 아직은 未定으로 적분路線의 윗쪽에서 正則이고 상부半평면에서 $|\lambda|\to\infty$임에 따라 $|P(\lambda)/\lambda|\to 0$이 되는 함수라 하자. 線積分에 의하여 만일 적분路線위에서

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\lambda^2-k^2}\,A(\lambda)=\frac{k\sin\theta}{2}$$
$$\frac{1}{\lambda-k\cos\theta}\;\frac{P(\lambda)}{P(k\cos\theta)} \qquad (5\text{-}12)$$

이 성립하고 적분路線이 $\lambda=k\cos\theta$에 있는 極의 밑으로 통과한다면 方程式 (5-11)이 만족됨을 본다. 따라서 만일 적분路線의 하부에서 正則인 적당한 함수 $A(\lambda)$와 적분路線의 상부에서 正則인 $P(\lambda)$를 발견하여 式 (5-12)가 路線 위에서 만족되게 할 수 있다면 式 (5-10)과 (5-11)의 해를 얻게 될 것이다. 방정식 (5-12)를

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A(\lambda)=\frac{k\sin\theta}{2\pi}$$
$$\cdot\frac{1}{P(k\cos\theta(\lambda-k\cos\theta)}\;\frac{P(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} \qquad (5\text{-}13)$$

로 써주면 명백히 $P(\lambda)$를 $\sqrt{\lambda+k}$로 取하면 된다. 왜냐하면 $P(\lambda)$는 路線의 윗쪽에서 正則이고 $A(\lambda)$는 路線의 아랫쪽에서 正則이기 때문이다. 式 (5-13)에 $P(\lambda)=\sqrt{\lambda+k}$를 대입하면 式 (5-9)의 전식으로 주어진 $A(\lambda)$를 얻게 되므로 역시 동일한 해를 얻게 된다. 일반적인 경우에 있어서 式 (5-13)과 유사한 방정식을 얻거나 이 방정식을 풀 수 있다는 보장은 없다. 그러나 적어도 이 方法이 유효한 특별한 경우에 있어서만은 Wiener-Hopf 方法이 要求하는 分解작업을 피할 수 있는 것이다.

式 (5-10) 및 (5-11)과 같은 한쌍의 적분방정식을 푸는 좀더 일반적인 방법은 convolution 정리의 성질을 이용하는 법이다. $a(x)$와 $n(x)$를 $-\infty<x<\infty$에서 정의된 우 함수라 하자.

$$I(x)=\int_{-\infty}^{\infty}N(\lambda)A(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}n(\xi)a(x-\xi)d\xi$$

로 정의한다. 만일 $x<0$에서 $n(x)=0$이고 $x>0$에서 $n(x)$이 정해져 있다면[이와같은 函數의 積分變換을 $N_+(\lambda)$로 表示한다. +부호는 어떤 上部半평면의 영역에서 正則임을 나타낸다]. $x<0$일 때 $I(x)$는 $x<0$일 때의 $a(x)$ 값에만 관계된다. 마찬가지로, $x>0$에서 $n(x)=0$이고[이 함수의 變換을 $N_-(\lambda)$로 表示한다] $x<0$에서 $n(x)$가 정해졌다면 $x>0$일 때 $I(x)$는 $x>0$일 때의 $a(x)$ 값에만 관계된다.

이 결과를 적용하는 例로 다시 式 (5-10)과 (5-11)을 생각하자. 아직 미정이나 이제 막 설명한 함수 $N_+(\lambda)$와 $N_-(\lambda)$를 사용하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}N_-(\lambda)A(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=0,\quad x>0$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}N^+(\lambda)[\sqrt{\lambda^2-k^2}A(\lambda)]e^{-i\lambda x}\,d\lambda$$
$$=\frac{-ik\sin\theta}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}n_+(\xi)$$
$$\cdot e^{-ik(x-\xi)\cos\theta}d\xi,\quad x<0, \qquad (5\text{-}14)$$

위에서 $n_+(\xi)$는 $N_+(\lambda)$의 역변환이다. 만일 N_+와 N_-를

$$N_-(\lambda)=N_+(\lambda)\sqrt{\lambda^2-k^2} \qquad (5\text{-}15)$$

로 결정하면 두 방정식 (5-14)의 왼편은 동일하

게 되므로 후리에逆變換에 의하여 해를 구할 수 있다. 그러나 여기서는 이것이 가능하지 못하다. 왜냐하면, N_+와 N_-는 各各 $x<0$에서와 $x>0$에서 零인 函數들의 變換이고 따라서 各各 $I_m\lambda\to+\infty$이고 $-\infty$일 때 零이 되어야 하기 때문이다. 따라서

$$N_+(\lambda)=(\lambda+k)^{-1/2} \qquad N_-(\lambda)=(\lambda-k)^{-1/2}$$

로 取한 후 방정식(5-14)의 첫째 식을 e^{ikx}로 곱하고 x에 관하여 미분하면 두 被積分函數는 같아진다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\lambda-k}A(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda$$

$$=\begin{cases}0 & x>0\\ -\dfrac{ik\sin\theta}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty}n_+(\xi)e^{-ik(x-\xi)\cos\theta}d\xi, & x<0\end{cases} \qquad (5\text{-}16)$$

위에서 $$n_+(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda+k}}$$

이다. 따라서 $A(\lambda)$는 式 (5-16)의 逆變換을 取하여 얻을 수 있다. 실제로

$$\sqrt{\lambda-k}\;A(\lambda)=\frac{-k\sin\theta}{(2\pi)^{3/2}(\lambda-k\cos\theta)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta+k}(\zeta-k\cos\theta)}$$

윗 式에서 積分路線은 $\zeta=-k$보다 위로 또 $\zeta=k\cos\theta$보다 밑으로 지나므로 留數의 정리에 의해서

$$A(\lambda)=\frac{-\sqrt{2k}\;\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{2\pi}(\lambda-k\cos\theta)\sqrt{\lambda-k}}$$

를 얻고 따라서 동일한 解 (5-9)를 얻는다. 이 방법의 특징은 경계조건이 임의의 함수로 주어진 Wiener-Hopf 형의 問題의 解에 대한 일반공식을 때때로 얻을 수 있다는 점이다.

이 강좌를 통하여 후리에變換方法중 비교적 현대에 속하고 교묘한 기술을 내포하고 있는 Wiener-Hopf 方法을 소개하였다. 이 방법은 그 근대적인 사용이 Wiener와 Hopf에 의하지만 실제로는 Carleman에 의하여 발견된 것으로 알려지고 있다. 이상 본 바와 같이 Wiener-Hopf 方法은 혼합경계치문제(mixed boundary value problem) 및 적분방정식을 해결하는 탁월한 방법중의 하나이다.

◇

大韓機械學會誌 投稿案內

本 學會 82年度 第2回 編輯委員會(82. 5. 7)의 決議에 의하여 앞으로 本 學會誌는 可能한 限 모두 國·漢文만을 使用하기로 하였읍니다.

技術用語는 大韓機械學會編 機械用語集을 基準하며, 불가피한 경우에는 한글로 음(音) 표시를 하고 괄호안에 原語를 쓰기로 하였읍니다. 投稿者의 많은 協調를 바랍니다.

投稿內容은 論說, 展望, 解說, 講座, 資料, 紹介, 座談會記錄, 紀行文, 見學 및 參觀記, 體驗談, 隨筆, 國內外뉴우스, 會員의 소리, 其他 등의 機械工學 및 工業에 관한 內容으로 되어있읍니다. 會員여러분의 많은 投稿를 바랍니다. (採擇된 原稿는 所定의 原稿料를 드립니다)