◀技術報告▶

三角휜 熱傳達의 數値解析

全 相 鳴*, 權 寧 弼**

Numerical Analysis in Heat Transfer of a Triangular Fin

Chun Sang Myung , Kwon Young Pil

ABSTRACT

One - dimensional approximation for fin problems is widely used in current texts and industrial practice. The errors caused by *this approximation* is *analys*ed for a longitudinal triangular fin by the numerical solution of two - dimensional fin equation.

Two- dimensional solution is obtained by the finite element method and compared with the one - dimensional esact solution. The results show that total heat transfer and fin efficiency are overestimated by the one - dimensionl approximation. The factors which cause these errors are the Biot number (Bi) and the ratio of fin length to half the thickness (L/a). When Bi is smaller than 1.0 these errors are smaller than 10%, but when Bi is larger than 5.0 they are a few ten percents. Fin efficiency obtaned by one - dimensional and long fin assumption is valid only when Bi is small and L/a is large.

* Nomenclature *

a = half the thickness at the base

A = fin cross section area

$Bi = ha/k$: Biot number

$Bi^* = h^* a/k$

h = heat transfer coefficient

$h^* = h\sqrt{1+(a/L)^2}$

I_0 = Zero - order modified Bessel function

I_1 = First- order modified Bessel function

k = *thermal conductivity*

L = fin length

* 崇田大 大學院 機械工學科

** 正會員, 崇田大 機械工學科 助教授

Q = total fin heat transfer rate
T = temperature
T_0 = temperature at the fin base
T_∞ = temperature
$\theta = T - T_\infty$
$\theta_0 = T_0 - T_\infty$
η = fin efficiency
* subscription
1 = 1 dimension
2 = 2 dimension

1. 緖 論

휜(fin)은 熱傳達장치에서 傳熱表面積을 擴大하여 對流열저항을 줄이기 위한 것으로서 각종 熱交換機에 널리 응용되고 있다. 휜에서의 溫度分布, 熱傳達量 및 휜効率의 解析은 휜을 이용한 열전달장치의 설계 및 成能豫測을 위하여 必須的이다.

휜에는 longitudinal fin, radial fin, spine fin등이 있으며 휜의 단면의 형상에 따라서 여러가지의 휜으로 분류할 수 있다. 이러한 휜을 통한 熱傳達을 解析하려면 溫度分布를 구해야 하는데 휜의 길이가 두께에 비하여 매우 길어서 임의의 단면에서의 溫度가 均一하다는 가정하의 一次元解析으로 熱傳達量이나 휜効率이 여러 휜에 대하여 구하여 졌다.

이러한 一次元 가정은 실제의 휜응용에서 대부분 만족되나 휜표면에서 對流熱抵抗에 비하여 휜 내부의 傳導熱抵抗이 커지는 경우에는 1차원 가정에 의한 오차가 커지기 때문에 二次元解析이 必要해진다. R.K. Irey[1]는 원형휜에 대하여, M. Levitsky[2]는 여러가지 휜에 대하여 2차원 휜방정식을 풀어서 二次元解析으로 열전달량을 구하고 一次元解析과의 오차를 구하였다.

本 論文에서는 3각형 단면의 longifudinal fin인 三角휜에서의 열전달에 관하여 溫度分布 熱傳達量, 휜効率등을 二次元解析으로 구하고 一次元解析의 結果와 비교 평가하였다. 解析에 있어서 設定한 가정은 다음과 같다.

(1) 휜바탕(base)에서 溫度는 均一하며 휜 주위의 유체온도도 일정하다.

(2) 휜의 材料는 균질이며 熱傳導係數는 일정하고 溫度와 무관하다.

(3) 휜表面에서의 열전달은 對流에 의할 뿐이며 열전달계수는 전표면에서 균일하다.

一次元解析은 解析的으로 계산하였으나 二次元解析은 해석적으로 구할 수 없기 때문에 有限要素法(finite element method)를 이용하여 數値解析으로 구하였다.

2. 一次元解析

그림 1에 보인 것과 같은 삼각휜에서 휜의 바탕을 원점으로 한 x좌표와 휜축을 기점으로 한 y좌표를 잡을 때, 一次元解析이란 휜에서의 溫度 T를 x만의 함수로 가정하는 것을 말한다 휜에서의 溫度分布에 대한 미분방정식은 그림 1의 미소요소에서의 정상상태 열평형을 생각함으로서 구할 수 있다.

x에서 熱傳導에 의하여 들어오는 열량과 $x+dx$에서 열전도에 의하여 미소요소를 나가는 열량의 차이는

$$dQ_{in} = k\frac{d}{dx}\left[A(x)\frac{dT}{dx}\right]dx \qquad (1)$$

熱對流에 의하여 미소요소로부터 주위로 나가는 열량은

$$dQ_{out} = 2h\sqrt{1+\left(\frac{a}{L}\right)^2}\,(T-T_\infty)\,dx$$

$$= 2h^*\theta\,dx \qquad (2)$$

미소요소로 들어오는 열량과 나가는 열량은 내부에서 熱發生이 없는 경우, 같아야 하므로 식(1)

(2)를 같이 놓고, $A(x)=2a(L-x)/L$ 및 Biot 수를 이용하여 나타내면 다음과 같은 미분 방정식을 얻는다.

$$(L-x)\frac{d^2\theta}{dx^2}-\frac{d\theta}{dx}-Bi^*\frac{L}{a}\theta=0 \tag{3}$$

위 방정식의 일반해는[3]

$$\theta=C_1 I_0\left(2\sqrt{Bi^*\frac{L}{a}\left(\frac{L-x}{a}\right)}\right)$$

$$+C_2K_0\left(2\sqrt{Bi^*\frac{L}{a}\left(\frac{L-x}{a}\right)}\right) \tag{4}$$

이므로 경계조건 $\theta(0)=\theta_0$로부터 溫度分布에 대한 解는 다음과 같다.

$$\theta=\theta_0\frac{I_0\left(2\sqrt{Bi^*\frac{L}{a}\left(\frac{L-x}{a}\right)}\right)}{I_0\left(2\frac{L}{a}\sqrt{Bi^*}\right)} \tag{5}$$

휜에서의 열전달량은 바탕에서의 熱傳導에 의한 $-kA_0\,d\theta/dx\,|\,x=0$ 와 같으므로

$$Q_1=\frac{2k\sqrt{Bi^*}\ \theta_0 I_1\left(2\frac{L}{a}\sqrt{Bi^*}\right)}{I_0\left(2\frac{L}{a}\sqrt{Bi^*}\right)}$$

따라서 휜效率은

$$\eta_1=\frac{Q_1}{2Lh^*\theta_0}$$

$$=\frac{I_1\left(2\frac{L}{a}\sqrt{Bi^*}\right)}{\frac{L}{a}I_0\left(2\frac{L}{a}\sqrt{Bi^*}\right)} \tag{6}$$

긴 휜($a \ll L$)일 때는 $h^*=h$, $Bi^*=Bi$이므로 溫度分布, 熱傳達量 및 휜效率은 다음과 같아진다.

$$\theta=\theta_0\frac{I_0\left(2\sqrt{Bi\frac{L}{a}\left(\frac{L-x}{a}\right)}\right)}{I_0\left(2\frac{L}{a}\sqrt{Bi}\right)} \tag{7}$$

$$Q_1=\frac{2k\sqrt{Bi}\,\theta_0\ I_1\left(2\frac{L}{a}\sqrt{Bi}\right)}{I_0\left(2\frac{L}{a}\sqrt{Bi}\right)} \tag{8}$$

$$\eta_1=\frac{I_1\left(2\frac{L}{a}\sqrt{Bi}\right)}{\frac{L}{a}I_0\left(2\frac{L}{a}\sqrt{Bi}\right)} \tag{9}$$

3. 有限要素法에 의한 二次元解析

二次元 熱傳導 방정식은 내부에서 열발생이 없는 정상상태에서 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}=0$$

y축에 대하여 상하가 대칭이므로 윗부분만 생각할 때 경계조건은

$$\text{at } x=0 \qquad \theta=\theta_0$$

$$\text{at } y=0 \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}=0 \tag{11}$$

$$\text{at } y=-\frac{a}{L}x+a \qquad k\frac{\partial\theta}{\partial n}+h\theta=0$$

二次元 열전도 문제에서 몇몇 특수한 경계조건을 갖는 경우를 제외하면 解析的인 解를 얻는 것은 어렵다. 삼각휜의 2차원해석의 경우에도 위의 식의 해를 얻는 것이 아직 不可能하기 때문에 여기서는 有限要素法에 의한 數値的인 方法으로 解를 구하였다.

먼저 주어진 方程式 (10)과 境界條件 (11)을 만족하는 variation form을 구하고 3각형要素와 natural coordinate를 이용하여 node에서의 溫度를 미지수로 한 요소방정식을 구한 후, 이것을 총합하여 시스템 방정식을 만들고 Gauss 소거법에 의하여 node에서의 온도를 구하였다. 온도로부터 熱量보다 휜效率差를 계산하였다. 자세한 프로그램 과정은 문헌[4]을 참고하였다.

數値計算의 誤差를 줄이기 위하여 有限要素의 모형(model)은 要素내에서 온도의 변화가 1차원에 가깝게 되도록 기울기의 변화가 큰 곳에서는 요소를 작게 변화가 작은 곳에서는 요소를 크게하여 그림 2에 도시한 것과 같이 모형을 세웠다. 이렇게 하여 node의 수는 136, 요소의

수는 225개가 되었다.

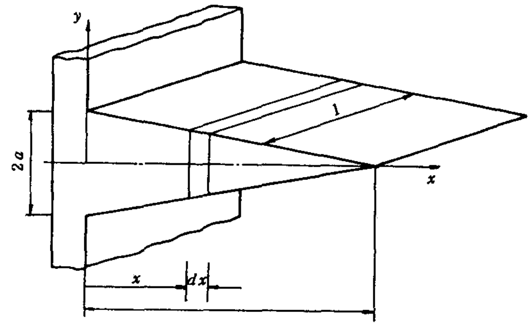

Fig 1. Longitudinal fin of Triangular Profile

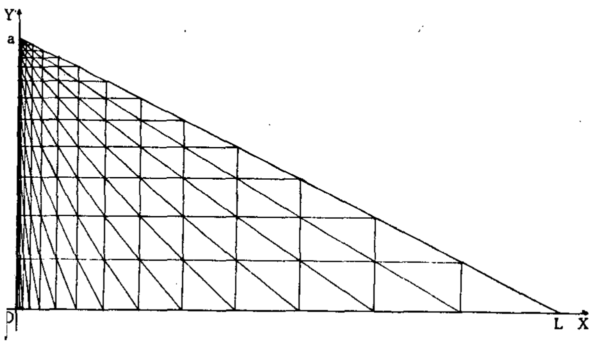

Fig 2. Finite Element Model

有限要素法에 의한 數値計算이 信頼性을 檢討하기 위하여 Wah Lau와 C.W. Tan[5]의 論文中 四角휜에 대한 解析的인 解와 본 論文의 program에 의한 수치계산 결과를 비교하였다. 유한요소의 모형은 본 論文의 삼각휜에서와 같은 비례로 핀의 길이방향으로 분할하고 두께방향으로는 등간격으로 하였다. node의 수는 121개, 要素의 수는 200개였으며 계산결과는 그림3에 도시된 것과 같이 正解와 數値解의 誤差가 3%를 넘지 않았다.

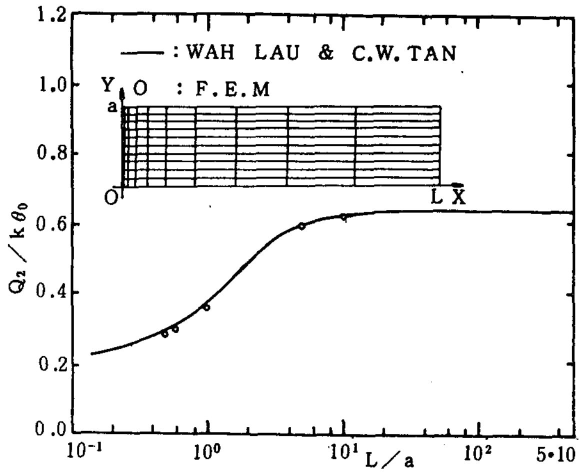

Fig 3. Comparison between Analytical Solution and Numerical Solution by F.E.M. for a Rectangular Fin (Bi＝0.1)

4. 結果 및 考察

이상과 같이 삼각휜의 一次元解와 二次元數値解를 溫度分布, 熱傳達量, 휜効率에 대하여 Biot數와 길이比(L／a)를 變數로 하여 구하였다. 모든 계산은 문헌[6]의 數表와 VAX－11 電子計算機를 이용하였다.

溫度分布의 계산결과 Biot수가 0.01 이하일 때는 2차원 수치계산과 1차원해의 차이가 없었다. Biot수가 0.1 이상일 때, 一次元解와 二次元數値解의 誤差는 길이比(L／a)가 클수록 증가하였다. Biot수 10, L／a＝5.0일 때의 결과를 도시하면 그림4, 5와 같다.

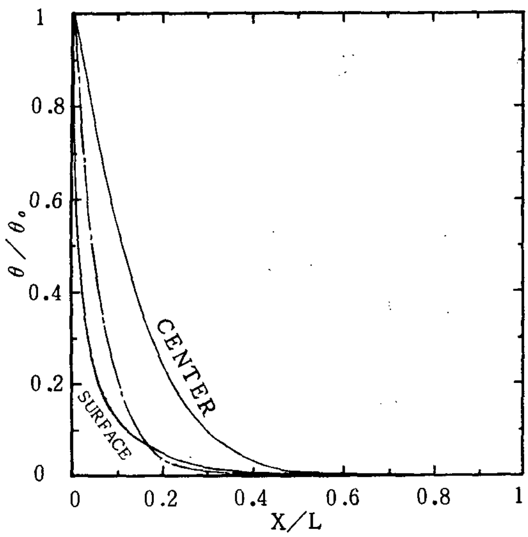

Fig 4. Temperature Distribution when L/a = 5.0 Bi = 10.0

: one Dimension Exact ( ), Two Dimension F.E.M. F.E.M.( )

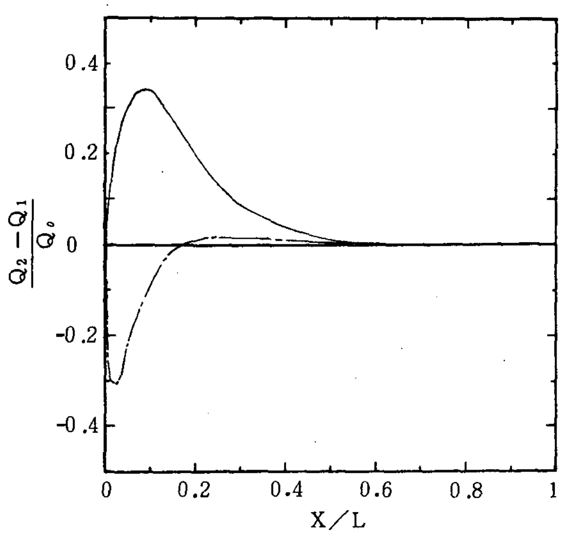

Fig 5. Temperature Difference between One Dimensional Exact Solution and Two Dimensional F.E.M. Solution Center(——), Surface (—·—)

二次元解析으로 구한 溫度가 一次元解析으로 구한 값에 비해 휜의 中心에서는 높고, 휜의 표면에서는 낮게 되며 차이가 휜의 끝으로 갈수록 작아 짐을 알 수 있다.

熱傳達量에 대해서 一次元解析에 의한 Q_1 과 二次元解析의 Q_2 를 相對誤差로 나타내면 그림 5와 같다. 그림에서 알 수 있듯이 1차원 계산에 의한 열전달량은 2차원 계산보다 더 크게 된다. 즉, 1차원해로 구한 열전달량은 實際보다 더 많으며 Biot 수와 L/a 가 클수록 誤差가 증가한다. Biot 수가 0.1 이하에서는 1 %미만의 誤差이나, Biot 수가 1.0 이상에서는 L/a 가 1.0 보다 클 때, 수 10 %의 오차가 난다. L/a 가 10 이상 커지면 오차는 거의 일정한 상태에 도달한다.

휜效率의 計算結果를 널리 사용되는 긴 휜 (long fin)의 경우와 비교하기 위하여 L/a $\sqrt{Bi}$ 와 L/a 를 變數로 하여 나타내면 그림 6, 7과 같다. 그림에서 1차원 계산에 의한 휜效率과 2차원 계산의 휜效率 사이의 차이는 Biot 수와 L/a 가 클 수록 증가하며, 一次元解析에 의한 휜效率이 二次元解析보다 높게

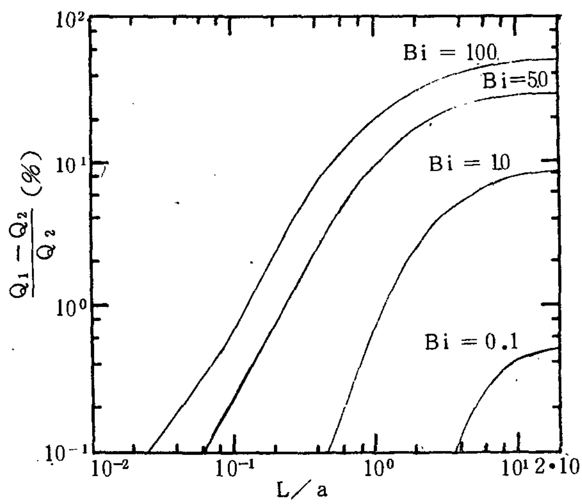

Fig 6. Relative Errors in Total Fin Heat Transfer

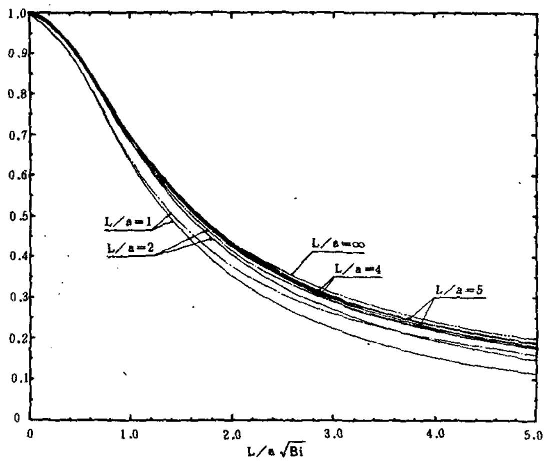

Fig 7. Fin Efficiency : One Dimensioncl Solution( ), Two Dimensional F.E.M. Solution ( )

나타나므로 1차원 가정에 의한 휜效率은 실제보다 큰 것임을 알 수 있다. 긴 휜의 조건을 만족하려면 L/a 도 커야 하지만 Bi수가 작아야 한다.

이상과 같이, 溫度分布를 휜 단면에서 均一한 것으로 가정한 一定한 것으로 가정한 一次元解析은 二次元解析과 비교할 때, 휜이 길 수록, Biot 수가 클 수록 오차가 증가함을 알 수 있다. Biot 수가 클 수록 휜表面에서의 對流熱抵抗에 비하여 內部의 傳導熱抵抗이 크기 때문에 一次元解析의 誤差가 커지며, 휜의 바탕에서의 온도를 均一하게 가정하고 二次元解析을 했기 때문에 휜이 짧을 수록 一次元解와의 오차는 감소하며 휜이 길 수록 증가한다. 실제로는 휜이 짧을 수록 휜바탕에서의 온도가 均一하지 않을 것이므로, 均一하다고 가정한 2차원해석은 휜이 짧을 때, 실제와 다를 것으로 생각된다.

5. 結 論

三角휜에서의 溫度分布, 熱傳達量, 휜效率을 有限要素法에 의한 二次元數値解와 단면에서 溫度가 均一하다는 가정하의 一次元定解를 比較한 결과 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 1차원해의 誤差에 影響을 미치는 因子는 Biot 數와 휜의 길이의 두께에 대한 比(L/a)이며, Biot 數와 길이比가 클 수록 二次元解와의 오차가 증가한다.

(2) Biot 數가 0.1 이하일 때 1차원해의 오차는 무시할 수 있으나 Biot 數가 5 이상이고 L/a 가 1보다 클때 수 10%의 誤差가 생긴다.

(3) 휜效率이 一次元 긴 휜(long fin)의경우에 부합하려면 Biot 數가 작으면서 L/a 가 커야한다.

參 考 文 獻

1. R.K. Irey, "Error in One-Dimensional Fin Solution" J. Heat Transfer, Trans. ASME, Vol.90, pp. 175-176, 1968
2. M. Levitsky, "The Criterion for Validity of Fin Approximation", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol.15, pp. 1960-1963, 1972
3. Donald Q. Kern & Allan D.Kaus, Extended Surface Heat Transfer, New York, 1972. pp. 85-93
4. Kenneth H. Huebner, The Finite Element Method for Engineers, New York, John Wiley & Sons, 1975
5. Wah Lau & C.W. Ten, "Errors in One-Dimensional Heat Transfer for Analysis in Straight and Annular Fins", J.Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 95, pp. 549,551, 1973
6. Milton Abrampwitz & Irene A. Stegum, Handbook of Mathematical Fuvctions, New York, Dover Pub., 8 th ed. pp. 378, 1970