鉄筋콘크리트 슬래브의 構造最適化

(Structural Optimization of Reinforced Concrete Slabs)

全 成 男
(경기대 건축공학과 교수)

1. 序 論

지난 30年間 급격히 발전해온 콤퓨터産業, 시스템工学, 그리고 이들과 같은 속도로 발전해온 現代構造理論 特히 有限要素法은 超大型 構造시스템의 自動化 設計나 解析을 可能케 하는 各種 General Purpose Program 또는 Useroriented System Program의 開発을 촉진시켰고, 이제는 한 걸음 더 나아가 Man-machine Communication에 의한 Computer aided design System의 開発도 활발히 진행되고 있다. 장차 이러한 Computer aided design system의 自動化 設計部分을 担当할 構造最適化分野도 60年代以后 Operations Research의 급속한 발전과 보조를 맞추어 크게 발전하여 왔다. 그러나 아직도 構造最適化(Structural Optimization)는 在来의 設計方法에 代置될 만한 實用的인 設計法으로 脚光을 받지 못하고 있다. 따라서 構造物의 幾何学的 形状, 配置, 및 部材의 設計 全般에 걸친 效率的인 最適化 理論에 대한 계속적인 연구도 중요하지만, 反面에 각종 構造 System의 電算化解析 및 設計를 위한 商用 Package応用Programs들이 많이 개발되어 있는 현재에, 이들 自動解析·設計用 Programs이나 CAD System의 部材設計法으로 代置할 수 있는 實用的인 최적설계방법의 연구개발이 더 중요한 문제로 대두되고 있다.

종래의 최적설계에 관한 연구와 응용은 주로 鋼構造의 最適化만을 다루고 있으며, 많은 設計変数를 포함하고 設計条件이 복잡한 鉄筋콘크리트 構造의 最適化를 다룬 研究는 많지않다. 1971年 Sandhu는 単鉄筋슬래브와 擁壁의 최적설계를 위하여 過少鉄筋보의 모우먼트 方程式을 制約条件으로 취한 후, 未知数인 内力 偶力間의 팔길이를 나타내는 를 평형보의 j 로 代置하고 Differential Calculus方法에 의하여 最適鉄筋比를 유도하였고, 1974年 Friel은 極限強度設計法(Ultimate Strength Design Method)에 의한 극한 모우먼트식을 제약조건으로 취한 후 Lagrange mulitplier法에 의하여 보의 최적 철근비공식을 유도하였다.

외국에서는 R.C. 휨부재의 간단한 最適化方法에 관한 Huang, Kohli등의 研究와 P.C. 部材의 최적화에 관한 Birkeland, Rozvany, Naaman, Morris, Kirch등의 연구와 최근에 와서는 Zagajeski등의 뼈대 構造의 耐震設計를 위한 最適化에 관한 체계적인 연구결과가 발표된바 있다. 이들 문헌에서는 대개의 경우 R. C. 휨부재, 평면 뼈대구조, R. C. 또는 P. C. 교량상부구조 등에 대한 재래적인 WSD 또는 USD설계법에 의한 最適化問題設定과 数学的 計画法의 線型 또는 非線型計画法, 라구랑즈승계수법(Lagrange Multiplier METHOD) 등의 최적화기법을 적용하여 대개의 경우 数値的으로 最適解를 구하였다.

본 研究의 目的은 WSD에 의해 철근콘크리트슬래브를 설계하는 경우에 実務設計者들이 予備設計段階에서 使用할 수 있는 最適鉄筋比 및 最適断面을 提供하는데 있다.

本 研究의 最適化技法으로는 過少鉄筋設計의 경우에는 解析的인 方法이 不可能하기 때문에 経費函数(COST function)를 철근비의 함수로 유도하여 이를 수치적으로 최적화시키는 방법을 취하였다. 한편 보와 거어더위에 놓이는 슬래브의 경제성을 분석한다.

2. 鉄筋콘크리트 断面의 最適化

鉄筋콘크리트 단면은 철근콘크리트 시방서의 設計諸般要求条件을 만족시키도록 設計되어야 한다. 즉 설계는 휨응력뿐만 아니라 最少鉄筋比, 最少鉄筋間隔, 전단력, 부착력 또는 처짐限界 等의 모든 制約条件을 만족시켜야 된다. 이러한 多制約条件(mutiple constraints)을 모두 만족시키도록 最適化問題를 形成하면 非線型計画(nonlinear programming)問題로 된다. 또한 엄격한 의미에서 이는 非線型整数計画(nonlinear integer programming)문제라 할 수 있다. 왜냐하면, 통상 사용하는 철근은 표준치수로만 존재하며, 단면의 높이도 표준 거푸집 치수에 맞도록 설계되어야 하기 때문이다. 이러한 非線型整数計画問題의 解를 효율적으로 구할 수 있는 알고리즘이 아직도 개발되지 않은 상태이기 때문에 대개의 경우 設計変数를 連続変数로 取하여 非線型計画問題로 다루게 된다. 이와 같은 非線型計画問題는 SUMT(Sequential Unconstrained Minimization Technique)나 SLP(Successive Linear Programming) 문제로 변화시켜 解를 구하거나 또는 直接的으로 各種 Descent Agorithm을 적용하여 해를 구하게 된다. 그러나 이런한 最適設計시스템의 開発은 현단계에서 많은 문제점을 内包하고 있으므로 앞으로 계속 연구개발할 부분으로 남겨둔다. 따라서 本 研究에서

는 휨모멘트만을 고려하는 單一制約条件을 가진 철근콘크리트 슬래브의 最適鉄筋比, 最適断面치수를 解析的으로 또는 数値的으로 誘導하고자 한다.

2.1 目的函数

철근콘크리트구조의 最適化를 의한 目的函数를 設定함에 있어서 콘크리트는 鋼材와는 달리 重量이나 체적이 最適化하는 것은 대체로 큰 뜻이 없으므로 콘크리트슬래브의 最小經費設計를 행한다. 콘크리트 구조를 만드는데는 콘크리트와 철근 그 자체의 경비, 거푸집비용等이 포함되는데 단면자체의 재료비에 대해서 집중적으로 검토한다.

最小經費를 얻기 위한 目的函数는 다음과 같이 설계변수(d, A_{sy1}, A_{sy2}, A_{sx1}, A_{sx2})의 항으로 표시할 수 있다.

$$C = C_c l_x \times l_y \times d \times 10^4 + C_s\Big[37.5 l_x^2 A_{sy1} + 75 l_x\left(l_y - \frac{l_x}{2}\right) A_{sy2} + 50 l_x\left(l_y - \frac{l_x}{4}\right)(A_{sx1} + A_{sx2})\Big] \quad \cdots\cdots\cdots(2-1)$$

여기서 C_c : 콘크리트 경비(원/㎤)

C_s : 철근 경비(원/㎤)

l_x : 슬래브 짧은 변의 길이(m)

l_y : 슬래브 긴변의 길이(m)

A_{sx1} : 짧은변지간에 의한 중간대 $-M$에 의한 소요철근단면적(cm^2)

A_{sx2} : 긴변 지간에 의한 중간대 $+M$에 의한 소요철근단면적(㎠) 짧은변

A_{sy1} : 긴변 지간에 의한 중간대 $-M$에 의한 소요철근단면적(㎠)

A_{sy2} : 긴변 지간에 의한 $+M$에 의한 중간대 소요철근단면적(㎠)

d : 슬래브의 유효깊이(cm)

C : 슬래브의 건설총경비(원)

위의 건설경비함수는 연구목적을 위하여 상대적인 경비를 비교하는데 사용하는 것이므로, 이 경비함수가 엄밀한 경비를 나타내는 것이라고는 할 수 없다.

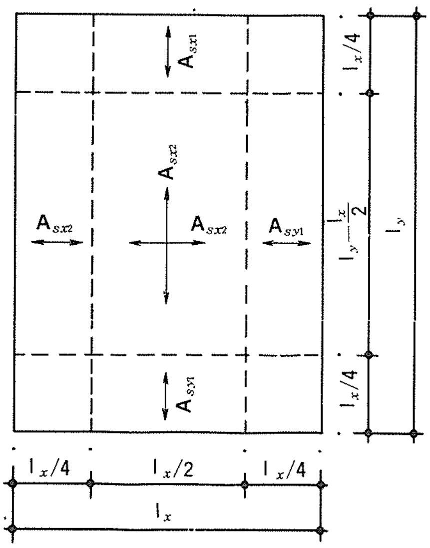

그림 2-1. 슬래브 평면

2.2. 制約条件式

制約条件에는 応力, 変位, 振動数, 座屈, 断面의 치수等等이 있으나 슬래브는 일종의 휨部材이므로, 本研究에서는 応力制約과 치수 및 철근비제약에 대한 制約条件만을 고려하여 제약조건식을 유도하면 식( )과 같다.

유도과정에서 휨 부재는 単鉄筋보를 대상으로 하였고, 지금까지 Over-reinforced beams or sections은 balanced sections이나 Under-reinforced section에 비하여 不経済的이라고 알려져 있기 때문에, balanced나 Under-reinforced section에 대하여만 제약조건식을 유도하였다.

応力制約条件式 :

$$\begin{aligned} &M_i - A_{si}\sigma_{sa}\left(d - \frac{1}{3}k_i d\right) \leq 0 \\ &k_i - k_o \leq 0 \end{aligned} \qquad (2-2)$$

여기서 $k_o = \dfrac{\sigma_{nca}}{n\sigma_{ca} + \sigma_{sa}}$

$k_i = \sqrt{(np)^2 + 2np} - np$

$p = \dfrac{As}{bd}$

$i = 1, 2, 3, 4.$

$\sigma_{ca} = 0.4 F_c$

σ_{sa} : 철근의 허용응력

슬래브의 두께제약조건식 :

$$5 - d \leq 0 \qquad (2-3)$$

철근비제약조건식

$$\begin{aligned} &0.2 l_x d - 2A_{sy1} \leq 0 \\ &0.2 l_y d - 2A_{sx1} \leq 0 \end{aligned} \qquad (2-4)$$

2·3. 최적화 문제의 형성 및 최적화 알고리즘

앞에서 유도된 목적함수와 제약조걱신을 최적화문제의 일반형식으로 정식화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Mininize } C(\vec{X}) \\ &\text{Subject to } G(\vec{X}) \leq 0 \qquad (2-5) \\ &\qquad (\vec{X} \geq 0 \end{aligned}$$

여기서 $\vec{X}$: 설계변수(d, A_{sx1},) A_{sx2}, A_{sy1}, A_{sy2})

$C(\vec{X})$: 설계변수로 표시된 목적함수

$G(\vec{X})$: 설계변수로 표시된 제약조건식의 조합.

위의 식에서 모든 制約条件式을 동시에 만족시키면서 $C(\vec{X})$를 최소로 할 수 있는 설계변수의 조합$\vec{X}$를 구하는 것이 최적설계이다. 본 연구의 슬래브구조에서는 설계변수에 대하여 목적함수는 선형함수이지만 제약조건식이 비선형이 되므로 본 최적화문제는 비선형계획문제(non-linear programming problems)로 된다. 현재 이러한 비선형계획문제의 구조최적화 해석기법으로는, 보편적으로 사용되고 있는 技法인 Feasible Direction Method, SUMT(Seguential Unconstrained Minimization or Successive Linear Proqramming)等이 利用될 수 있지만,

일반적으로 구조최적화문제의 최적해를 얻는데 매우효율적이고 Liner Proqramming과 같은 보편적인 알고리즘(algorithm)을 인용할수 있는 축차 선형계획기법을 적용키로 한다.

SLP기법은 초기가정설계점 $\vec{X}^{\circ}$에서 출발하여 최적해가 얻어질때까지 설계점 $\vec{X}^{k}$주위에서 비선형식을 Taylor 급수전개에 의하여 선형화하여, 선형계획문제로 변환한 후 LP문제는 해를 Simplex method로 구하여 그것을 다음단계의 설계점으로 택하는 반복과정을 되풀이하면서 설계점을 개선해가는 최적화 알고리즘이다. 여기서 임의의 설계점$\vec{X}^{k}$에서의 문제형식을 표시하면 식(2-6)과 같다.

$$\text{Minimize} \quad C(\vec{X}) \qquad (2-6)$$

$$\text{Subject to} \quad J(\vec{X})\,\vec{X} \geq J(\vec{X}^{k})\,\vec{X}^{k} - G(\vec{X}^{k})$$

여기서 $\vec{X}^{k}$ 임의의 k번째단계의 설계점

$J(\vec{X}^{k})$: $\vec{X}^{k}$단계의 Jacobian matrix

3. 数値計算例

本 研究에서는 建築内의 連続된 슬래브를 model로 택하여, 1方向슬래브와 2方向슬래브의 최적화 경향을 분석한다. 대상 model은 $l_x \times l_y = 36m^2$을 고정적인 양으로 $\frac{l_y}{l_x}$을 1에서 2까지 변할때 이론적인 최적단면을 구하고, 그 결과를 분석한다.

적재하중 $w=300kg/m^2$, $Fc=210kg/cm^2$, $\sigma_{sa}=1300kg/cm^2$, $n=9$을 이용하고, 경비함수의 경비계수는 1981년 현재를 기준으로 개략계산하여 $Cc=0.0344$원/㎤, $Cs=2.1745$원/㎤을 택하고, 제약조건에는 응력제약, 슬래브두께제약, 철근비제약조건을 취하여 최적화 한다.

3.1. 一方的슬래브

一方的슬래브의 경우에는 폭b=100㎝를 가진 보에 해당로

一方的슬래브의 경우에는 폭 b=100㎝를 가진 보에 해당되므로, 제약조건을 갖지 않는 無制約条件式으로 유도하면 다음식(3-1)과 같다.

$$C(\vec{X}) = \sqrt{\frac{M}{\delta_{sa}}}\left[Cs\sqrt{\frac{P}{1-\frac{k}{3}}} + \frac{Cc}{\sqrt{P\left(1-\frac{k}{3}\right)}} \right]$$

여기서 $k=\sqrt{(np)^2+2np}-np$

$$n=\frac{Es}{Ec}$$

$$p=\frac{As}{bd}$$

$$k \leq k_o = \frac{n\sigma_{ca}}{n\sigma_{ca}+\sigma_{sa}}$$

주어진 조건에 $C(\vec{X})$가 최소가 될수 있는 최적철근비는 σ_{ca}와 σ_{sa}에 따라 크게 변한다. 즉 현$\sigma_{ca}=0.4Fc$일때는 $k \leq k_o$에 제약을 받아 최적철근비 $P_{opt}=1.2\%$가 되지만, $\sigma_{ca}=0.45Fc$ 수준에서는 $P_{opt}=1.4\%$가 된다. 즉$\sigma_{ca}=84kg/cm^2$, $\sigma_{sa}=1300kg/cm^2$일때는 최적철근비는 balanced beam의 철근비가 최적차이지만, $\sigma_{ca}=94.5kg/cm^2$까지 증가하면 최적철근비는 balanced beam의 철근비보다 적은 값에서 최적해가 존재한다. 최적

3.2. 二方向슬래브

連続된 二方向슬래브 구조에서 $\frac{l_y}{l_x}$의 비를 1에서 2까지 변화시켜가면서 최적해를 구하면 표3.1과 같다.

표 3.1. 최적설계의 최적해

l_x (m)	l_y (m)	l_y/l_x (m^2)	$l_x \times l_y$ (m^2)	최 적 해						
				t (㎝)	d (㎝)	A_{sx1} (㎠/m)	A_{sx2} (㎠/m)	A_{sy1} (㎠/m)	A_{sy2} (㎠/m)	C 원
6	6	1	36	9.0	5.77	4.46	6.84	4.46	6.84	137.799.7
5.5	6.55	1.19	36	9.5	6.10	4.73	7.26	3.50	5.35	139.517.3
5.0	7.2	1.44	36	9.5	6.12	4.74	7.27	2.86	4.37	137.215.9
4.9	7.35	1.50	36	9.5	6.08	4.78	7.22	2.79	4.21	136.399.7
4.5	8.0	1.78	36	9.0	5.83	4.52	6.92	2.42	3.69	130.246.6
4.24	8.29	2	36	9.0	5.59	4.33	6.64	2.24	3.41	125.105.0

표3.1에 따르면 $\frac{l_y}{l_x}=1.2$일떨가 가장 不経済的이고, $\frac{l_y}{l_x}$가 증가할 수록 보다 経済的인 設計가 얻어질 수 있음을 알 수 있다. 물론 뼈대구조전체와 기타 건물의 경비에 영향을 제 요소들을 추가하고, 재료의 강도를 변화시키고, 제약조건을 더 추가하게 되면 최적해도 변화를 가져오겠지만, 본 연구를 통하여 건물의 가장 이상적인 부재의배치도 최적화할수 있다는 가능성을 얻었다는데 역점을 두는 것이 좋을 것이라고 사료된다.

4. 結 論

本 研究에서 철근콘크리트 슬래브의 구조최적화과정을 간략하게 소개하고, 그 최적기능을 검토하기 위하여 채택한 구조모형의 수치계산을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 일방향슬래브의 최적화는 간단하게 무제약조건의 최적화문제로 해석될 수 있고, 콘크리트의 허용휨 압축응력의 수준이 최적화에 미치는 영향이 크다는 사실을 발견하였고,

(2) 평면의 면적을 고정시키고 $\frac{l_y}{l_x}$만을 변화시킬때 주어진 조건에 대하여 대략 $\frac{l_y}{l_x}=1.2$일때 가장 不経済이고, $\frac{l_y}{l_x}$의 비가 증가할수록 経済的인 슬래브의 設計가 可能할 것으로 사료된다.

앞으로 뼈대구조전체와 결합하고, 각종 재료의 응력의 변화에 따른 최적화를 시도하면 건물구조의 経済的인 設計에 도움을 줄 수 있을 것으로 판단되고, 이런의미에서 볼때 本稿는 장차의 연구에 대한 기초단계라고 생각된다.

〈참 고 문 헌〉

1. R. E. Melchers "Optimal Design of Variable Thickness Reinforced Plates"
2. 趙孝男, 梁昌鉉 "플래트 플레이트 鉄筋콘크리트 構造시스템의 電算化最適設計法"大韓土木学会論文集 1980. 2.
3. 변 근 주 "철근콘크리트 뼈대 구조물의 최적화를위한 최적단면의 결정에 관한 연구" 1976.
4. 변근주, 조효남, 황학주 "철근 콘크리트단면의 최소 경비 설계를 위한 최적철근비에 관한 연구"대한 토목학회지 1975. 9.
5. 대한건축학회 "철근콘크리트構造計算規準 및 解説" 1977.