Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 17, No. 2, 1981

EXISTENCE ET UNICITE DE LA FONCTION SPLINE DE LISSAGE

BY HA-JINE KIMN

1. Introduction

Le problème classique de la *fonction spline de lissage d'ordre* q (entier positif) est de chercher un élément σ parmi toutes les fonction de $H^q[a, b]$ tel que:

$$(1, 1) \qquad \int_a^b (\sigma^{(q)}(t))^2 dt + \sum_{i=1}^n \rho_i (\sigma(t_i) - z_i)^2 = \underset{x \in H^q[a,b]}{\mathrm{Min}} \left[\int_a^b (x^{(q)}(t))^2 dt + \sum_{i=1}^n \rho_i (x(t_i) - z_i)^2\right]$$

avec n abscisses données t_i telles que:

$$a \leqq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqq b,$$

n nombres réels donnés z_i, et n coefficients positifs donnés $\rho_i (i=1, \cdots)$, et où $H^q[a, b]$ est l'espace de Hilbert des fonctions réelles définies sur l'intervalle $[a, b]$ qui ont une dérivée $(q-1)$−ième absolument continue et une dérivée q−ième de carré sommable avec le produit scalaire:

$$\langle f | g \rangle = \sum_{i=0}^q \int_a^b f^{(i)}(t) g^{(i)}(t) dt$$

et la norme associée:

$$\|f\| = (\langle f | f \rangle)^{1/2}.$$

Le terme:

$$\int_a^b (x^{(q)}(t))^2 dt$$

est le critère lisse (le terme de lissage) de la fonction $x(t)$, et le terme:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i (x(t_i) - z_i)^2$$

mesure l'écart pondéré entre $(z_1, \cdots, z_n)$ et $(x(t_1), \cdots, x(t_n))$. C'est le terme d'approximation. (Cf. Schoenberg (1946) [11]; Atteia (1966) [2]; Carasso (1966) [3]; Ahlberg, Nilson and Walsh (1967) [1]; Laurent (1972) [6];

Späth (1973) [12]; de Boor (1978) [5] etc.) Les coefficients positifs ρ_i déterminent l'importance relative que l'on accorde au lissage et l'approximation. Quand les ρ_i tendent vers 0, la fonction spline de lissage tend vers un polynôme de degré 1, qui approxime $x(t)$ sur (t_i, z_i) au sens du moindres carrés et si ρ_i tend vers l'infini, la fonction spline de lissage passe en t_i de plus en plus près de z_i. C'est-à-dire, on obtient la *fonction spline d'interpolation*. La méthode pour choisir les $\rho_i > 0$ n'est pas encore bien connue (voir p. 243 de de Boor (1978) [5]). Ce problème a été suggéré premièrement par Reinsch (1967) [8]. On peut aussi citer les travaux de Mallows (1973) [7]; Reisch (1971) [9], (1975) [10]; Wahba et Wold (1975) [15]; Wahba (1975) [14]; Craven et Wahba (1979) [4]; Utreras (1979) [13]. Dans ce mémoire on montre un théorème pour la condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de la fonction spline de lissage.

2. Représentation de la fonction spline de lissage

La solution σ du problème (1.1) est une fonction réelle définie sur $[a, b]$ telle que:

I) σ est unpolynôme de degré $2q-1$ dans chacun (t_i, t_{i+1}); $i=1, \cdots, n$.

II) σ est un polynôme de degré $q-1$ dans $[a, t_1)$ et $(t_n, b]$.

III) $\sigma^{(2q-2)}$ est continue.

IV) σ n'assujettit pas à passer exactement par (t_i, z_i).

On dit que l'espace $\mathcal{S}$ de toutes les fonctions σ est *l'espace des fonction spline de lissage d'order q relatif aux n abscisses t_i*. Il est clair que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de dimension n dans $H^q[a, b]$. A partir de la définition de σ, on peut donc écrire:

$$\sigma(t) = \sum_{j=0}^{q-1} c_j t^j + \frac{1}{(2q-1)!} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t-t_i)_+^{2q-1}, \tag{2.1}$$

où les c_j sont constantes réelles et les λ_i sont les sauts de dérivée d'order $2q-1$ de σ en t_i; i.e. :

$$\lambda_i = \sigma^{(2q-1)}(t_i^+) - \sigma^{(2q-1)}(t_i^-),$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t_i)^k = 0, \quad k=0, \cdots, q-1,$$

et où:

$$(t-t_i)_+ = \begin{cases} t-t_i & \text{si } t \geqq t_i \\ 0 & \text{si } t < t_i. \end{cases}$$

Mais, réciproquement, toute fonction σ de la forme (2.1) n'est pas dans $\mathcal{S}$, car elle ne dégénère pas nécessairement en un polynôme de degré $q-1$ au plus sur l'intervalle $[b_n, b]$. Il est connu que si $x \in H^q[a, b]$ et $\sigma \in \mathcal{S}$ on a

$$\int_a^b \sigma^{(q)}(t)\, x^{(q)}\, dt = (-1)^q \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x(t_i). \tag{2.2}$$

La formule (2.2) est appelée *la formule fondamentale d'intégration.* Il est bien connu que quelque soient les nombres $z_1, \cdots, z_n \in \mathbf{R}^n$, il existe un élément unique $\sigma \in \mathcal{S}$ telque:

$$\sigma(t_i) + \frac{(-1)^q}{\rho_i} \lambda_i = z, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{2.3}$$

On a déjà montré qu'il existe une fonction spline $\sigma \in \mathcal{S}$ unique telle que

$$\sigma(t_i) = z_i, \qquad i = 1, \cdots, n,$$

car on fait $\rho_i \to \infty$.

On appelle ***base canonique*** pour les fonctions splines de lissage de $\mathcal{S}$, la base composée d'éléments $\sigma_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1, \cdots, n)$ tels que:

$$\sigma_i(t_j) + \frac{(-1)^q}{\rho_i} (\sigma_i^{(2q-1)}(t_j^+) - \sigma_i^{(2q-1)}(t_j^-)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Il est donc facile de voir que dans cette base, σ s'écrit:

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{n} z_i \sigma_i(t).$$

Il est aussi connu que si $z = z_1, \cdots, z_n \in \mathbf{R}^n$ et $\rho_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ sont des ordonnées et des poids donnes, l'élément $\sigma \in \mathcal{S}$ vérifiant (2.3) vérifie aussi le problème (1.1).

3. Modification du probleme

Soit $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathbf{R}^n$ trois espaces de Hilbert. On prend $\mathcal{X} = H^q[a, b]$, $\mathcal{Y} = H^0[a, b] = L^2[a, b]$ et $\mathcal{Z} = \mathbf{R}^n$ où $H^0[a, b]$ est l'espace de Hilbert des fonctions réelles définis sur $[a, b]$ qui sont de carrés sommables avec le produit scalaire:

$$\langle f \mid g \rangle_{\mathcal{Y}} = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

et la norme associée:

$$\| f \|_{\mathcal{Y}} = (\langle f \mid f \rangle_{\mathcal{Y}})^{1/2}.$$

On prend les opérateurs linéaires continus T de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ définis par $T(x) = x^{(q)}(t)$ et A de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Z}$ définie par

$$A(x) = [x(t_1), \cdots, x(t_n)]$$

$$=[\langle k_1|x\rangle, \cdots, \langle k_n|x\rangle]\in\mathcal{Z}, \quad \text{pour tout } k_i\in\mathcal{X}.$$

Soit z un vecteur donné tel que:

$$z=[z_1, \cdots, z_n]\in\mathcal{Z}.$$

On définit un produit scalaire sur $\mathcal{Z}=\mathbf{R}^n$:

$$\langle u|v\rangle_\rho=\sum_{i=1}^n \rho_i u_i v_i$$

avec $u=u_1, \cdots, u_n$, $v=v_1, \cdots, v_n$, et la norme associée:

$$\|u\|_\rho{}^2=\sum_{i=1}^n \rho_i u_i^2.$$

On a alors que:

$$\begin{aligned}&\int_a^b (x^{(q)}(t))^2 dt+\sum_{i=1}^n \rho_i(x(t_i)-z_i)^2\\ &=\int_a^b (x^{(q)}(t))^2 dt+\sum_{i=1}^n \rho_i(\langle k_i|x\rangle-z_i)^2\\ &=\|T(x)\|_{\mathcal{Y}}^2+\|A(x)-z\|_\rho{}^2.\end{aligned}$$

Le probléme (1. 1) peut donc s'écrire:

$$\text{(3. 1)} \qquad \|T(\sigma)\|_{\mathcal{Y}}^2+\|A(\sigma)-z\|_\rho{}^2=\underset{x\in\mathcal{X}}{\mathrm{Min}}(\|T(x)\|_{\mathcal{Y}}^2+\|A(x)-z\|_\rho{}^2).$$

On modifie (3. 1) pour utiliser le *théorème de caractérisation d'un meilleure approximation* (Voir chap. II de Laurent (1972) [6]). On considère le produit $\mathcal{W}=\mathcal{Y}\times\mathcal{Z}$ des espaces de Hilbert $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$. Si l'on prend le produit scalaire:

$$\langle\!\langle w_1|w_2\rangle\!\rangle_{\mathcal{W}}=\langle y_1|y_2\rangle_{\mathcal{Y}}+\langle z_1|z_2\rangle_\rho \quad (\rho>0)$$

pour $w_1=[y_1, z_1]$ et $w_2=[y_2, z_2]\in\mathcal{W}$, $\mathcal{W}$ est un espace de Hilbert.
On prend donc $\mathcal{W}$ la norme associée au produit scalaire:

$$\begin{aligned}|\!|\!| w |\!|\!| &=\langle\!\langle w|w\rangle\!\rangle^{1/2}\\ &=(\langle y|y\rangle_{\mathcal{Y}}+\langle z|z\rangle_\rho)^{1/2}\end{aligned}$$

avec $w=[y, z]\in\mathcal{W}$. Soit $w_0=[0, z]\in\mathcal{W}$ où 0 désigne l'origine de $\mathcal{Y}$ et z un élément fixe quelconque de $\mathcal{Z}$. On définit aussi un opérateur linéaire continu L de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{W}$ par:

$$L(x)=[T(x), A(x)]\in\mathcal{W}.$$

On a alors que:

$$\|T(x)\|_{\mathcal{Y}}^2+\|A(x)-z\|_\rho{}^2=|\!|\!| L(x)-w_0 |\!|\!|_{\mathcal{W}}^2.$$

Le problème (3. 1) s'écrit:

$$(3.2) \qquad |||L(\sigma)-w_0|||_{\mathcal{W}}=\underset{x\in\mathcal{X}}{\mathrm{Min}}\,|||L(x)-w_0|||_{\mathcal{W}}.$$

Notons par $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de A et par $\mathrm{Im}(A)$ l'image de A. On suppose que $\mathrm{Im}(T)=\mathcal{Y}$ et $\mathrm{Im}(A)=\mathcal{Z}$. Si l'on pose:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}&=L(\mathcal{X})=\mathrm{Im}(L)\\&=\{[y,z]\in\mathcal{Y}\times\mathcal{Z}\mid y=T(x),\ \ z=A(x)\ \text{ avec } x\in\mathcal{X}\},\end{aligned}$$

$\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{W}$. Le problème (3.2) revient à trouver $\bar v\in\mathcal{V}$ tel que:

$$(3.3) \qquad |||\bar v-w_0|||_{\mathcal{W}}=\underset{v\in\mathcal{V}}{\mathrm{Min}}\,|||v-w_0|||_{\mathcal{W}}$$

avec $w_0=[0,z]\in\mathcal{W}$.

On remarque que l'on ne suppose pas que $\mathrm{Ker}(T)$ ou $\mathcal{Z}$ sont de dimension finie;

4. Une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité

Si l'on utilise le théorème de la caractérisation de la meilleure approximation dans l'espace normé $\mathcal{V}$ au problème (3.3), on peut montre qu'*une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe pour tout* $z\in\mathcal{Z}$ *une seule fonction spline de lissage (relativement a* T, A, z *et* $\rho_i>0$) *est que*:

$$\mathrm{Ker}(T)+\mathrm{Ker}(A) \ \textit{soit fermé dans}\ \mathcal{X}$$

et

$$\mathrm{Ker}(T)\cap\mathrm{Ker}(A)=\{0\}.$$

(Voir p. 301 de Laurent (1972) [6]).

On montre un lemme pour simplifier la condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de la fonction spline de lissage.

LEMME. *Une condition nécessaire et suffisante pour que*:

$$\mathrm{Ker}(A)\cap\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$$

est que $n\geqq q$.

DEMONSTRATION. Soit p un polynôme tel que:

$$p\in\mathrm{Ker}(A)\cap\mathrm{Ker}(T).$$

Comme $p\in\mathrm{Ker}(T)$, le degré de p est $q-1$. On sait donc que:

$$p(t_q)=0, \qquad q=1,\cdots,n.$$

Donc p est un polynôme de degré $q-1$ qui s'annule en points avec $n\geqq q$. Il est donc identiquement nul. On a donc:

$$p=0.$$

D'où:

$$\mathrm{Ker}(A)\cap\mathrm{Ker}(T)=\{0\}.$$

Réciproquement, si $\mathrm{Ker}(A)\cap\mathrm{Ker}(T)$ se réduit à l'élément zéro, c'est que tout polynôme de degré $q-1$ qui s'annule en n points est nul. C'est donc que $n\geqq q$.

Q. E. D.

On peut maintenant d'éduire le théorème d'existence et d'unicité:

THEOREME. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe pour tout $z\in\mathcal{Z}$ une seule fonction spline de lissage (relativement à T, A, z et $\rho_i>0$) est que*:

$$\mathrm{Ker}(T)+\mathrm{Ker}(A) \textit{ soit fermé dans } \mathcal{X}$$

et

$$n\geqq q.$$

References

1. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson and J. L. Walsh, *The theory of splines and their applications*, Acad. Press, New-York, 1967.
2. M. Atteia, *Etude de certains noyau et théorie des fonctions spline en analyse numérique*, Thèse, Grenoble, 1966.
3. C. Carasso, *Méthode numérique pour l'obtention de fonction-spline*, Thèse, Grenoble, 1966.
4. D. Craven and G. Wahba, *Smoothing noisy data with spline functions estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross validation*, Numer. Math. **31**, (1979), 377–403.
5. C. de Boor, *A practical guide to splines*, Springer-Verlag, New-York 1978.
6. P. J. Laurent, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris, 1972.
7. C. L. Mallows, *Some concepts on Cp*, Technometrica **15**, (1973), 661–675.
8. C. H. Reinsch, *Smoothing by spline functions*, Numer. Math. **10**, (1967) 177–183.
9. ______, *Smoothing by spline functions II*, Numer. Math. **16**, (1971) 451–454.
10. ______, *Oscilation matrices with spline smoothing*, Numer. Math. **24** (1975), 375–382.
11. I. J. Schoenberg, *Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Quart. of Appl. Math. **4**, (1946), 45–99 and 112–141.
12. H. Späth, *Spline algorithmen zur Konstruction glatter Kurven und Flächen*, R. Oldenbourg, Munich, 1973.
13. F. Utreras, *Utilisation de la méthode de validation croisée pour le lissage par fonctions spline à une ou deux variables*, Thèse, Grenoble, 1979.

14. G. Wahba, *Smoothing Noisy data with spline functions*, Numer. Math. **24**, (1975), 383–393.
15. G. Wahba and S. Wold, *A Completely automatic french curve fitting spline function by cross-validation*, Comm. Statist. **4**, (1975), 1–7.

Ajou Institute of Technology