Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 17, No. 2, 1981

有理型函數의 境界性質

崔 雲 行

K. Noshiso 는 [2]에서 다음과 같이 새로운 boundary cluster set 을 정의했다.

定義 1. 함수 $w=f(z)$가 단위원 $|z|<1$ 에서 meromorphic 이고, $\zeta_0=e^{i\theta}$ 가 단위원주 $\Gamma: |z|=1$ 상의 한 고정점이고 A 가 Γ 상의 한 점 ζ_0 를 포함하는 한 arc 라 하자. 집합 E 가 A 에 포함되고 ζ_0 를 포함하며 linear measure zero 라 하자.

각 점 $e^{i\theta}\in A-E$ 에 $e^{i\theta}$ 에서 끝나는 D 내의 임의의 Curve Λ_θ 에 Cluster set $C_{\Lambda\theta}(f, e^{i\theta})$를 대응시킨다. 지금 Mr 이

$$\cup C_{\Lambda\theta}(f, e^{i\theta}) \quad (e^{i\theta}\in (A-E)\cap \{z: |z-\zeta_0|<r\}$$

되는 모든 $e^{i\theta}$ 에 대해서 union 을 취한다' 의 closure 를 나타낸다고 하고

$$C_{\Gamma-E}{}^*(f, \zeta_0)=\bigcap_{r>0} Mr$$

이라고 정의한다.

이 정의와 유사하게 다음과 같이 새로운 boundary cluster set 을 정의한다.

定義 2. 함수 $f(z)$가 Simply connected domain D 에서 meromorphic 이고, $\tilde{E}$ 가 $\tilde{D}$ 의 prime end 로 이루어진 conformal null set 이고, $\tilde{E}$ 의 prime end 들의 impression 들의 union E 가 점 ζ_0 를 포함한다고 하자.

영역 D 의 prime end 전체의 집합을 $\tilde{D}$ 라 할 때 $P(a)\in\tilde{D}-\tilde{E}$ 되는 accessible boundary point a 에 $P(a)$에서 시작해서 $z(a)$에서 끝나는 한 arc Λ 에 따른 cluster set $C_\Lambda(f, z(a))$를 대응시킨다. 지금 Mr 을 $C_\Lambda(f, z(a))$ ($P(a)\in \tilde{D}-\tilde{E}$ 되는 모든 accessible point a 와 a 의 complex coordinate 가 $\{z: |z-\zeta_0|<r\}$ 에 속하는 모든 a 에 대해서 union 을 취한다)의 closure 라 할 때

$$C_{\tilde{D}-\tilde{E}}{}^{*},{}_{\{\Lambda\}}(f, \zeta_0)=\bigcap_{r>0} Mr$$

이라고 정의한다.

定義 3. 함수 $W=f(z)$가 단위원 $|z|<1$에서 유계인 해석함수라 하자. 그러면 Fatou의 정리에 의하여 radial limit $\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})=f(e^{i\theta})$는 $|z|=1$ 상에서 linear measure zero인 set을 제하고는 모든 점에서 존재한다. 만일 $0\leq\theta\leq 2\pi$인 almost every θ에 대해서 $|f(e^{i\theta})|=1$이면 $f(z)$는 Seidel의 뜻으로 class(U)의 함수라 한다.

Seidel은 다음을 증명했다([2], p. 34).

定理 1. $f(z)$가 상수가 아니고, class (U)인 함수라고 하자. 만일 $|z|<1$에서 $f(z)\neq\alpha$이면

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})=\alpha$$

되는 θ가 적어도 하나 존재한다.

Gross-Seidel-Beurling 정리의 확장형인 Iversen-Tsuji의 정리((2), P. 16)는 다음과 같다.

定理 2. D가 임의의 영역이고, Γ는 D의 boundary, E는 Γ의 capacity zero인 compact subset이고, ζ_0는 ζ_0의 모든 근방 $N(\zeta_0)$에 대해서 $N(\zeta_0)\cap(\Gamma-E)\neq\phi$ 되는 E의 한 점이라 하자.

함수 $w=f(z)$가 D에서 meromorphic이고 ζ_0의 한 근방과 D의 공통부분에서 유계이면,

$$\limsup_{\substack{z\to\zeta_0\\ z\in D}} |f(z)|=\limsup_{\substack{\zeta\to\zeta_0\\ \zeta\in\Gamma-E}}\Big(\limsup_{z\to\zeta_0}|f(z)|\Big)$$

이다. 이는 또한 $r(D)$와 $r(\Gamma-E)$를 $w=0$을 중심으로 하고 각각 $C_D(f,\zeta_0)$와 $C_{\Gamma-E}(f,\zeta_0)$를 포함하는 최소원의 반경이라 하면

$$r(D)=r(\Gamma-E)$$

라 쓸 수 있다.

K. Noshiro는 위의 정리가 다음 두 정리와 동치임을 증명했다([2], p. 17).

定理 3. α가 $C_D(f,\zeta_0)$에 속하지 않으면 $\rho(C_D(f,\zeta_0),\alpha)=\rho(C_{\Gamma-E}(f,\zeta_0),\alpha)$이다. 단, (S,α)는 점 α와 집합 S간의 spherical distance를 나타낸다.

定理 4. D가 임의의 영역이고, Γ는 D의 boundary, E는 Γ의 capacity zero 인 compact subset, ζ_0는 ζ_0의 모든 근방 $N(\zeta_0)$에 대해서 $N(\zeta_0)\cap(\Gamma-E)\neq\phi$ 되는 E의 한 점이라 하자. 만일 $w=f(z)$가 D에서 meromorphic이면,

$$\partial C_D(f,\zeta_0)\subset\partial C_{\Gamma-E}(f,\zeta_0)$$

이다. 여기서 ∂S는 집합 S의 boundary를 나타낸다.

K. Noshiro는 다시 이 정리와 유사한 다음 결과를 얻었다([2], p. 40):

$$C_D(f,\zeta_0)-C_{\Gamma-E}{}^*(f,\zeta_0)$$

는 open set이다. 즉,

$$C_D(f,\zeta_0)\subset\partial C_{\Gamma-E}{}^*(f,\zeta_0).$$

필자는 좀 더 일반적인 경우에 대해서 다음 결과를 얻었다.

定理 5. 다음의 세 사실은 동치이다.

(A) D가 z평면상의 평면전체는 아닌 domain이고, ζ_0는 D의 한 boundary point, $\tilde{E}$는 D의 prime end로 구성된 한 conformal null set이라하자. 만일 $f(z)$가 D에서 meromorphic이고 ζ_0의 한 근방과 D의 공통부분에서 유계이면,

$$\limsup_{\substack{z\to\zeta_0\\ z\in D}} f(z)=\limsup_{\substack{z(a)\to\zeta_0\\ P(a)\in\tilde{D}-\tilde{E}}}\Big(\inf_{\Lambda}\Big(\limsup_{\substack{z\to z(a)\\ z\in\Lambda}}|f(z)|\Big)\Big) \tag{1}$$

이다. 여기서 Λ는 $p(a)\in\tilde{D}-\tilde{E}$ 되는 accessible boundary point a에서의 한 arc이고, 수렴은 euclidean metric의 뜻이다.

더우기 (1)의 좌변과 우변은 각각 ($C_D(f,\zeta_0)$와 $C_{\tilde{D}-\tilde{E}}{}^*{}_{,\{\Lambda\}}(f,\zeta_0)$를 포함하는 최소원의 반경 $r(D)$, $r(\tilde{D}-\tilde{E},\{\Lambda\})$를 나타내므로, 어떠한 $\{\Lambda:\Lambda\to z(a), P(a)\in\tilde{D}-\tilde{E}\}$를 택해도

$$r(D)=r(\tilde{D}-\tilde{E},\{\Lambda\})$$

라고 쓸 수 있다. 따라서 고정된 $\{\Lambda\}$에 대해서

$$r(D)=r(\tilde{D}-\tilde{E}) \tag{2}$$

라 쓸 수 있다.

고정된 $\{\Lambda\}$에 대해서 $C_{\tilde{D}-\tilde{E}}{}^*{}_{,\{\Lambda\}}(f,\zeta_0)$를 $C_{\tilde{D}-\tilde{E}}{}^*(f,\zeta_0)$로 나타내기로 하자.

(B) 만일 α가 $C_D(f,\zeta_0)$에 속하지 않으면 ((A)에서 ζ_0의 한 근방에서 유계

라는 조건 대신에), (1)은

$$\rho(C_D(f,\zeta_0),\alpha)=\rho(C_{\tilde{D}-\tilde{E}}{}^*(f,\zeta_0),\alpha) \tag{3}$$

로 대치된다.

(C) D가 z평면상의 평면전체는 아닌 simply connected domain이고, ζ_0가 D의 한 boundary point이고, $\tilde{E}$가 D의 prime end로 이루어진 conformal null set이라 하자. 만일 $f(z)$가 D에서 meromorphic이면,

$$C_D(f,\zeta_0)-C_{\tilde{D}-\tilde{E}}{}^*(f,\zeta_0)$$

는 open set이다. 즉,

$$\partial C_D(f,\zeta_0)\subset\partial C_{\tilde{D}-\tilde{E}}{}^*(f,\zeta_0). \tag{4}$$

證明 다음 증명은 [2], p. 17의 방법을 더욱 일반화된 경우에 확장한 것이다.

A → B : $\alpha\notin C_D(f,\zeta_0)$라 가정하자. 지금 $w=F(z)$를 linear transformation

$$W=(f+\bar{\alpha}w)/(w-\alpha)$$

와 $w=f(z)$의 복합함수라 하자. 그러면 $w=F(z)$에 대해서 (2)가 성립한다. 즉 $W=\infty$에서 $C_D(f,\zeta_0)$와 $C_{\tilde{D}-\tilde{E}}{}^*(F,\zeta_0)$에 이르는 spherical distance는 일치한다.

그런데, 위의 linear transformation은 Riemann sphere의 회전에 불과하므로 (3)을 얻는다.

B → C : 지금 M과 $N(N\subset M$인$)$을 w평면상의 두 closed set이라하자. 만일 모든 점 w에 대해서

$$\rho(M,w)=\rho(N,w)$$

이라 하면 모든 점 w에 대해서 $\partial M\subset\partial N$이다.

C → A : 분명히 (4)는 (2)를 의미한다.

References

1. U. H. Choi, *A Curvilinear Extension of Iversen-Tsuji's Theorem for A Simply Connected Domain*, Proc. Amer. Math. Soc. **64** (1977)
2. K. Noshiro, *Cluster Sets*, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
3. K. Noshiro, *Cluster Sets of functions meromorphic in the unit circle*, Proc. Nat.

Aca. Sc. (Wash.), **41** (1955), 398-401.
4. M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1955.
5. O. Lehto and K. I. Virtanen, *Boundary behavior and normal meromorphic functions*, Acta Math. **97**, (1957), 47-65
6. L. V. Ahlfors and L. Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton Univ. Press, 1960.
7. F. Bagemihl, *Curvilinear Extension of the Maximum Modulus Principle*, Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A. (1969), 36-37.
8. I. I. Priwalow, *Randeigenschaften analytischer Funktionen Veb.*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

亞州大學校, 弘益大學校