J. Korean Math. Soc.
Vol. 17, No. 2, 1981

FORMULES DU TYPE DE SIMONS ET APPLICATIONS

PAUL VERHEYEN

0. Introduction

En examinant les sous-variétés minimales d'un espace de Riemann, Simons a dérivé une équation différentielle qui doit être satisfaite par la seconde forme fondamentale d'une sous-variété minimale afin d'être totalement géodésique [19]. Son travail était le début d'une étude extensive du Laplacien du carré de la norme de la seconde forme fondamentale: d'abord Chern, do Carmo et Kobayashi ont calculé ce Laplacien quand l'espace entourant est localement symétrique, et en particulier une sphère [11]. Certaines généralisations pour des sous-variétés d'une sphère sont données par Chen ([7]) et Braidi et Hsiung ([4]).

En même temps Yau, Nomizu et Smyth ont étudié les variétés à courbure moyenne constante ([15], [20], [31]). D'autre part les sous-variétés minimales des espaces complexes, des espaces de Sasaki et des espaces quaternionales ont étés examiné à l'aide des formules du type de celle de Simons, par exemple par Chen, Ogiue, Blair, Ludden, Okumura, Yano, Kon et Yau ([1], [2], [3], [8], [14], [16], [17], [26], [28], [29], [30], [31]).

Nous discuterons brèvement le travail de Simons et nous donnerons quelques résultats concernant les sous-variétés d'un espace complexe à courbure sectionelle holomorphe constante.

1. Sous-varietes minimales d'une sphere

Soit M^n une variété de dimension n immergée dans un espace de Riemann $\tilde{M}^{n+p}$ de dimension $n+p$, et soit TM (respectivement $T^{\perp}M$) le fibré tangent (*resp.* normal).

Nous considérons la seconde forme fonfamentale σ,

(1. 1) $$\sigma(X, Y)=\tilde{\nabla}_X Y-\nabla_X Y,$$

où $X, Y \in TM$, $\tilde{\nabla}$ est la connection de Lévi-Civita de $\tilde{M}$ et ∇ celle induite sur M. Posons A le tenseur adjoint de σ, c'est-à-dire

(1. 2) $$\langle A_{\xi}X, Y\rangle=\langle\sigma(X, Y), \xi\rangle$$

Received August 25, 1980

où $X, Y \in TM$, $\xi \in T^{\perp}M$ et $\langle\, ,\, \rangle$ est la métrique dans $T\tilde{M}$ (les métriques dans TM et les fibrès associés seront notées aussi par $\langle\, ,\, \rangle$).
Soit $\{e_A | A=1, \cdots, n+p\}$ un repère orthonormé de $T\tilde{M}$ de sorte que $\{e_i | i=1, \cdots n\}$ (resp. $\{e_\lambda | \lambda=n+1, \cdots, n+p\}$) est un repère de TM (resp. de $T^{\perp}M$). Par rapport à ce repère, A a des components

$$h_{ij}{}^{\lambda} = \langle A_\lambda e_i, e_j \rangle \tag{1.3}$$

avec

$$A_\lambda = A e_\lambda. \tag{1.4}$$

Soit ∇' la connection de van der Waerden-Bortolotti définie dans $TM \oplus T^{\perp}M$ ([6]) et posons

$$h_{ijk}{}^{\lambda} = \nabla'_k h_{ij}{}^{\lambda}, \tag{1.5}$$

$$h_{ijkl}{}^{\lambda} = \nabla'_l h_{ijk}{}^{\lambda} = \nabla'_l \nabla'_k h_{ij}{}^{\lambda}. \tag{1.6}$$

Alors le Laplacien $\Delta' A$ de A est défini comme le tenseur à components $\Delta' h_{ij}{}^{\lambda}$ où

$$\Delta' h_{ij}{}^{\lambda} = \sum_{k=1}^{n} h_{ijkk}{}^{\lambda}. \tag{1.7}$$

On a

$$\frac{1}{2}\Delta(\mathrm{tr}\ A^2) = \langle \Delta' A, A \rangle + \langle \nabla' A, \nabla' A \rangle \tag{1.8}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\Delta \|\sigma\|^2 = \sum_{\lambda, i, j, k} h_{ij}{}^{\lambda} h_{ijkk}{}^{\lambda} + \|\nabla' \sigma\|^2. \tag{1.9}$$

Le Laplacien Δ' est un opérateur négatif sémi-défini auto-adjoint [19].
Associés à l'opérateur $A \in \mathrm{Hom}(T^{\perp}M, SM)$ où SM est l'ensemble des opérateurs symétriques de TM. Simons a défini d'autres opérateurs

$$\tilde{A} = {}^t A \circ A \in \mathrm{End}(T^{\perp}M), \tag{1.10}$$

et

$$\underset{\sim}{A} = \sum_{\lambda} (ad\ A_\lambda)^2 \in \mathrm{End}(SM), \tag{1.11}$$

et Kon [12] a considéré l'opérateur

$$A^* = \sum_{\lambda} (A_\lambda)^2 \in \mathrm{End}(TM). \tag{1.12}$$

Ces trois opérateurs sont symétriques et positifs sémi-définis.
On a que

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\ A^* = \mathrm{tr}\ \tilde{A} = \|\sigma\|^2 = S, \\ &2\ \mathrm{tr}\ A^{*2} = \langle \underset{\sim}{A} \circ A, A \rangle + 2\sum_{\lambda,\mu} \mathrm{tr}(\mathrm{A}_\lambda \mathrm{A}_\mu)^2, \\ &\mathrm{tr}\ \tilde{A}^2 = \sum_{\lambda,\mu} (\mathrm{tr} A_\lambda A_\mu)^2, \end{aligned} \tag{1.13}$$

et de plus on a les inégalités suivantes:

$$(1.14)\qquad \frac{1}{n}S^2 \leqslant \mathrm{tr}\, A^{*2} \leqslant S^2,$$
$$\frac{1}{p}S^2 \leqslant \mathrm{tr}\, \tilde{A}^2 \leqslant S^2$$

Simons a prouvé que, pour une sous-variété minimale M^n de S^{n+p}, on a

$$(1.15)\qquad \Delta' A = nA - A \circ \tilde{A} - \underset{\sim}{A} \circ A,$$

et pour toute sous-variété M^n immergée dans un espace $\tilde{M}^{n+p}$ quelconque

$$(1.16)\qquad \langle A \circ \tilde{A} + \underset{\sim}{A} \circ A, A \rangle \leqslant qS^2,$$

où

$$(1.17)\qquad q = 2 - \frac{1}{p}.$$

Parce que Δ' est négatif sémi-défini, on a pour une sous-variété compacte M^n de S^{n+p} que

$$(1.18)\qquad 0 \leqslant -\int_M \langle \Delta' A, A \rangle = \int_M -n\|A\|^2 + \langle A \circ \tilde{A} + \underset{\sim}{A} \circ A, A \rangle$$
$$\leqslant \int -nS + qS^2 = \int_M S\left(S - \frac{n}{q}\right)q.$$

Alors, si $S < \frac{n}{q}$ partout, on a l'égalité

$$(1.19)\qquad 0 = \int_M qS\left(S - \frac{n}{q}\right),$$

de sorte que $S=0$.

THEOREME 1.1 [19]. *Si M^n est une sous-variété minimale et compacte de $S^{n+p}(1)$ avec $S \leqslant \frac{n}{q}$, alors $S=0$ ou $S=\frac{n}{q}$* (c.-à-d. *M est totalement géodésique)*

Chern, do Carmo et Kobayashi ont calculé le Laplacien $\Delta\|\sigma\|^2$ pour une sous-variété minimale d'un espace localement symétrique. En particulier, pour un espace de Riemann à courbure sectionelle constante et positive, cela donne la formule de Simons. De plus, ils ont étudié les sous-variétés minimales M^n de $S^{n+p}(1)$ avec $S=\frac{n}{q}$.

THEOREME 1.2 [11]. *Les seules sous-variétés minimales et compactes de dimension n d'une sphère $S^{n+p}(1)$ avec $S=\frac{n}{q}$ sont la surface de Véronése dans S^4 et les hypersurfaces minimales de Clifford,* c.-à-d.

$$M_{n,n-m} = S^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \times S^{n-m}\left(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\right) \subset S^{n+1}(1)$$

pour $n>m$.

Remarquons que le théorème correspondant local est aussi vrai.

Grâce à l'étude des sous-variétés minimales de l'espace Euclidien $\mathbf{E}^{n+p}$, Simons a donné une réponse affirmative au problème de Bernstein pour $n \leqslant 7$: est-il vrai que toute hypersurface minimale, non paramétrisée de $\mathbf{E}^{n+1}$ de la forme

$$x^{n+1} = x^{n+1}(x^1, \cdots, x^n) \tag{1. 20}$$

est nécessairement linéaire ? Les réponses affirmatives pour $n \leqslant 4$ étaient déja données par de Giorgi ($n=3$, 1965) et Almgren ($n=4$, 1966). Bombieri, de Giorgi et Giusti ont prouvés que la réponse est négative pour $n > 7$.

Dans la suite nous donnerons quelques résultats concernant les espaces complexes: d'abord pour les sous-variétés Kaehlériennes et ensuite pour sous-variétés totalement réelles.

2. Sous-varietes Kaehleriennes des espaces complexes

Soit M^{2n} une sous-variété Kaehlérienne d'un espace complexe $\tilde{M}^{2(n+p)}(\tilde{c})$ à courbure sectionelle holomorphe constante. Nous choissisons un repère orthonormé de $T\tilde{M}$ comme suit:

$$\begin{aligned} &e_1, \cdots, e_n, e_{1*} = \tilde{J} e_n, \cdots, e_{n*} = \tilde{J} e_n \in TM, \\ &e_{\bar{1}}, \cdots, e_{\bar{p}}, e_{\bar{1}*} = \tilde{J} e_{\bar{1}}, \cdots, e_{\bar{p}*} = \tilde{J} e_{\bar{p}} \in T^{\perp}M, \end{aligned} \tag{2. 1}$$

où $\tilde{J}$ est la structure complexe de $\tilde{M}$.

$$\tilde{J} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -I_n & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ I_n & 0 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 0 & -I_p \\ & & I_p & 0 \end{array}\right) \tag{2. 2}$$

Nous posons les conventions suivantes sur les indices:

$$\begin{aligned} &a, b, c \in \{1, 2, \cdots, n\}, \\ &i, j, k, l \in \{1, \cdots, n, 1^*, \cdots, n^*\}, \\ &\alpha, \beta \in \{\bar{1}, \cdots \bar{p}\}, \\ &\lambda, \mu \in \{\bar{1}, \cdots, \bar{p}, \bar{1}^*, \cdots, \bar{p}^*\}. \end{aligned} \tag{2. 3}$$

On a

$$A_{\alpha *} = \tilde{J} A_\alpha = -A_\alpha \tilde{J}, \tag{2. 4}$$

d'où il suit que M est minimale dans $\tilde{M}$.

Les inégalités (1. 14) peuvent être réduites à

$$\frac{1}{2n} S^2 \leqslant \operatorname{tr} A^{*2} \leqslant \frac{1}{2} S^2, \qquad \frac{1}{2p} S^2 \leqslant \operatorname{tr} \tilde{A}^2 \leqslant \frac{1}{2} S^2. \tag{2. 5}$$

De plus, on a

$$\sum_{\lambda, \mu} (A_\lambda A_\mu)^2 = 0, \tag{2. 6}$$

de sorte que

(2.7) $$K_N=2\operatorname{tr} A^{*2}$$
où K_N est la courbure normale définie par
(2.8) $$K_N=-\sum_{\lambda,\mu}\operatorname{tr}(A_\lambda A_\mu-A_\mu A_\lambda)^2.$$
Il suit que M est totalement géodesique si $[A_\lambda, A_\mu]=0$ pour tout λ, μ.

On a aussi la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1 [12]. *Soit $n>1$, alors M^{2n} est une variété d'Einstein si et seulement si* $\operatorname{tr} A*^2=\frac{1}{2n}S^2$.

Contraction de l'équation de Gauss
(2.9) $$R_{ijkl}=\sum_\lambda(h_{ik}{}^\lambda h_{jl}{}^\lambda-h_{il}{}^\lambda h_{jk}{}^\lambda)+\tilde{R}_{ijkl},$$
où $\tilde{R}$ (resp. R) est le tenseur de courbure de $\tilde{M}$ (resp. M), donne que la courbure scalaire ρ satisfait l'équation
(2.10) $$\rho=n(n+1)\tilde{c}-\|\sigma\|^2.$$
La courbure sectionelle $K(X\wedge Y)$ de M déterminée par les vecteurs orthonormés $X, Y\in T_pM$ à $p\in M$ est définie par
(2.11) $$K(X\wedge Y)=R(X, Y;\ Y, X),$$
et la courbure sectionelle holomorphe $H(X)$ de M déterminée par le vecteur unitaire $X\in T_pM$ à $p\in M$ par
(2.12) $$H(X)=K(X\wedge JX)=\tilde{c}-2\|\sigma(X, X)\|^2,$$
où J est la structure complexe induite par $\tilde{J}$ dans TM.

En concernant les sous-variétés totalement géodésiques on a le résultat suivant bien connu.

PROPOSITION 2.2 [30]. *$M^{2n}\subset\tilde{M}^{2(n+p)}(\tilde{c})$ est totalement géodésique si et seulement si M satisfait une des conditions suivantes*:

(1) $H=\tilde{c}$,

(2) $\rho=n(n+1)\tilde{c}$.

Soit $P_n\mathbf{C}(c)$ l'espace projectif complexe de dimension complexe n a courbure sectionelle holomorphe constante $c>0$. Il y a le résultat suivant de Calabi.

PROPOSITION 2.3 [5]. *L'espace projectif complexe $P_n\mathbf{C}(c)$ peut être plongé dans $P_m\mathbf{C}(\tilde{c})$ $(c, \tilde{c}>0)$ si et seulement si il existe $\nu\in\mathbf{N}_0$ tel que*

(i) $\tilde{c}=\nu c$

(ii) $m\geqslant\binom{n+\nu}{\nu}-1$.

Le théorème suivant est dû à O'Neill.

THEOREME 2. 1 [18]. *L'immersion* $M^{2n}(c)\subset\tilde{M}^{2(n+p)}(\tilde{c})$ *est totalement géodésique pour* $p<\frac{n(n+1)}{2}$.

Cette codimension est la meilleure possible: pour $p=\frac{n(n+1)}{2}$ on a le plongement Kaehlérienne $P_n\mathrm{C}(c)\longrightarrow\frac{Pn(n+3)}{2}\mathrm{C}(2c)$ qui n'est pas totalement géodésique. D'autre part, Ogiue a prouvé que ce contre-exemple est aussi le meileur possible.

PROPOSITION 2. 4 [16]. *Si* $M^{2n}(c)$ *est une sous-variété de* $\tilde{M}^{2(n+p)}(\tilde{c})$ *avec* $p=\frac{n(n+1)}{2}$, *alors* $c=\tilde{c}$ *ou* $c=\frac{\tilde{c}}{2}$. *Le cas dernier peut seulement se présenter si* $\tilde{c}>0$.

Le même résultat reste valable dans le cas où p est arbitraire et σ est parallel (c. à-d. $\nabla'\sigma=0$). De plus, pour $M^{2n}(c)\subset P_{n+p}\mathrm{C}(\tilde{c})$, $\tilde{c}>0$, on a $c=\tilde{c}$ ou $c\leqslant\frac{\tilde{c}}{2}$.

Pour les sous-variétés Kaehlériennes et complètes M^{2n} de l'espace projectif complex $P_{n+p}\mathrm{C}(\tilde{c}), \tilde{c}>0$, on a les résultats suivants.

PROPOSITION 2. 5 [16]. *Si* $K>0$, ρ *est constant et* $p<\frac{n(n+1)}{2}$, *alors* M *est totalement géodésique.*

PROPOSITION 2. 6 [16]. *Si* $H>\frac{\tilde{c}}{2}$ *et* ρ *est constant,* M *est totalement géodésique.*

A partir de ces résultats on a les conjectures suivantes pour $M^{2n}\subset P_{n+p}\mathrm{C}(1)$ formulées par Ogiue ([16], [17]).

(I) Si $K>0$ et $p<\frac{n(n+1)}{2}$, alors M est totalement géodésique.

(II) Si $H>\frac{1}{2}$, alors M est totalement géodésique

(III) M est totalement géodésique si $\rho>n^2$.

La conjecture (III) qui est équivalent à $\|\sigma\|^2<n$ est vraie pour certaines variétés algèbriques:

THEOREME 2. 7 [16]. *Soit* M^{2n} *une sous-variété Kaehlérienne et compacte plongée daas* $P_{n+p}\mathrm{C}$. *Si* M *est une intersection complète et* $\rho>n^2$, *alors* M *est totalement géodésique.*

De plus, en partant de la formule du type de Simons

$$(2.13)\qquad \frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2=\|\nabla'\sigma\|^2-2\mathrm{tr}\ A^{*2}-\mathrm{tr}\ \tilde{A}^2+\frac{n+2}{2}\tilde{c}\|\sigma\|^2,$$

et en utilisant Proposition 2.1 on peut prouver

PROPOSITION 2.7 [16]. *Si M^{2n} est une sous-variété compacte et Einsteinnienne de $P_{n+p}\mathbf{C}$, $n>1$, alors $\rho>n^2$ implique que M est totalement géodésique.*

De même façon on trouve le résultat suivant.

PROPOSITION 2.8. [16]. *Si M^{2n} est une sous-variété compacte de $P_{n+p}\mathbf{C}$ et $\rho>n(n+1)-\frac{n+2}{3}$, alors M est totalement géodésique.*

D'autre part on peut trouver des pincements sur K et H de façon suivante. La formule de Chern, do Carmo et Kobayashi implique qu'on a pour $M^{2n}\subset\tilde{M}^{2(n+p)}(\tilde{c})$ que

$$(2.14)\qquad \sum_{\lambda,i,j} h_{ij}{}^{\lambda}\Delta' h_{ij}{}^{\lambda}=\sum h_{ij}{}^{\lambda}h_{km}{}^{\lambda}R_{mijk}+\sum h_{ij}{}^{\lambda}h_{mi}{}^{\lambda}R_{mkjk}-\mathrm{tr}\ A^{*2}-\frac{1}{2}\tilde{c}\|\sigma\|^2.$$

Il est facile de prouver que

$$(2.15)\qquad \sum h_{ij}{}^{\lambda}h_{km}{}^{\lambda}R_{mijk}+\sum h_{ij}{}^{\lambda}h_{mi}{}^{\lambda}R_{mkjk}=\frac{n+3}{2}\tilde{c}\|\sigma\|^2-\mathrm{tr}\ \tilde{A}^2-\mathrm{tr}\ A^{*2},$$

de sorte que

$$(2.16)\qquad \begin{aligned}\sum h_{ij}{}^{\lambda}\Delta' h_{ij}{}^{\lambda}&=(1+a)[\sum h_{ij}{}^{\lambda}h_{km}{}^{\lambda}R_{mijk}+\sum h_{ij}{}^{\lambda}h_{mi}{}^{\lambda}R_{mkjk}]\\&\quad+a\ \mathrm{tr}\ \tilde{A}^2+(a-1)\ \mathrm{tr}\ A^{*2}-\frac{1}{2}\tilde{c}[(n+3)a+1]\|\sigma\|^2\end{aligned}$$

pour tout $a\in\mathbf{R}$. Cette formule était utilisée pour la première fois par Yau ([31]). D'autre part

$$(2.17)\qquad \sum h_{ij}{}^{\lambda}h_{km}{}^{\lambda}R_{mijk}+\sum h_{ij}{}^{\lambda}h_{mi}{}^{\lambda}R_{mkjk}\geqslant 2[(n-1)K+H]\|\sigma\|^2,$$

où K (resp. H) denote l'infimum de la courbure sectionelle (resp. de la courbure sectionelle holomorphe). Pour $1+a\geqslant 0$ on a

$$(2.18)\qquad \begin{aligned}\sum h_{ij}{}^{\lambda}\Delta' h_{ij}{}^{\lambda}&\geqslant 2(1+a)[(n-1)K+H]\|\sigma\|^2+a\ \mathrm{tr}\ \tilde{A}^2\\&\quad+(a-1)\mathrm{tr}\ A^{*2}-\frac{1}{2}\tilde{c}[(n+3)a+1]\ \|\sigma\|^2,\end{aligned}$$

et pour $0\leqslant a\leqslant 1$

$$(2.19)\qquad \begin{aligned}\sum h_{ij}{}^{\lambda}\Delta' h_{ij}{}^{\lambda}&\geqslant \{2(1+a)[(n-1)K+H]-\frac{1}{2}\tilde{c}[(n+3)a+1]\}\ \|\sigma\|^2\\&\quad+\frac{1}{2p}[(p+1)a-p]\|\sigma\|^4.\end{aligned}$$

Posons ensuite $a=\frac{p}{p+1}$, il résulte que

$$(2.20)\qquad \frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2\geqslant\frac{1}{2(p+1)}\{4[n-1)K+H](2p+1)-[p(n+4)+1]\tilde{c}\}\ \|\sigma\|^2.$$

Si $(n-1)K+H>\frac{p(n+4)+1}{4(2p+1)}\tilde{c}$, alors $\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2\geqslant 0$ et le lemme de E. Hopf implique que $\Delta\|\sigma\|^2=0$ si M est compact, de sorte que $\|\sigma\|^2=0$ c.-à-d. M est totalement géodésique.

THEOREME 2.3 [23]. *Si M^{2n} est une sous-variété Kaehlérienne compacte de $\tilde{M}^{2(n+p)}(\tilde{c})$ et*

$$(n-1)K+H>\frac{p(n+4)+1}{4(2p+1)}\tilde{c},$$

alors M est totalement géodésiqu.

Parce que $H\geqslant K$, l'inégalité peut être remplacée par $K>\frac{p(n+4)+1}{4n(2p+1)}\tilde{c}$.

Conridérons maintenant les sous-variétés Kaehlériennes dont le tenseur de Bochner est zéro. Il y a le théorème suivant de Yamaguchi et Sato:

THEOREME 2.4 [27]. *Si M^{2n} est une sous-variété Kaehlérienne totalement géodésique d'un espace Bochner-Kaehlérien $\tilde{M}^{2m}$ avec $n\geqslant 2$ et $m\geqslant 4$, alors M est Bochner plate.*

En concernant l'immersion dans un espace projectif complexe, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 2.9 [23]. *Si M^{2n} est une sous-variété Bochner-Kaehlérienne de $\tilde{M}^{2(n+p)}(\tilde{c})$, alors $(n+1)(n+2)\operatorname{tr}\tilde{A}^2+\|\sigma\|^4=4(n+1)\operatorname{tr}A^{*2}$.*

On déduit que

$$0\leqslant\frac{1}{2p}[2p(2n+1)-(n+1)(n+2)]\|\sigma\|^4. \tag{2.21}$$

Ceci prouve le théorème suivant de Kon en assumant que l'espace entourant est de plus Einsteinnien.

THEOREME 2.5 [13]. *Si M^{2n} est une sous-variété Bochner-Kaehlérienne d'un espace Bochner-Kaehlérien $\tilde{M}^{2(n+p)}$ et $p<\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+1)}$, alors M est totalement géodésique.*

Si on fait usage des Propositions 2.1 et 2.9 on retrouve le résultat d'O' Neill (Théorème 2.1). De plus, si on remplace $\operatorname{tr}\tilde{A}^2$ dans (2.13) moyennant Proposition 2.9, on trouve le résultat suivant.

THEOREME 2.6. [23]. *Si M^{2n} est une sous-variété Bochner-Kaehlérienne et compacte de $\tilde{M}^{2(n+p)}(\tilde{c})$ alors $\|\sigma\|^2<\frac{(n+1)(n+2)^2}{2(n^2+5n+3)}\tilde{c}$ implique que M est totalement géodésique.*

Des pincements sur K et H sont obtenus comme ci-dessus; par exemple nous formulerons le résultat suivant.

THEOREME 2.7 [23].

$$(n-1)\,K+H>\frac{(n+1)\,(n^2+6n+12)+2p\,(n+4)}{8[(n+1)\,(n+4)+2p]}\tilde{c}$$

implique que la sous-variété Bochner-Kaehlérienne et compacte M^{2n} *de* $\tilde{M}^{2(n+p)}(\tilde{c})$ *est totalement géodésique.*

3. Sous-varietes totalement reelles de $\tilde{M}^{2(n+p)}(\tilde{c})$

Soit M^n une sous-variété totalement réelle de $\tilde{M}^{2(n+p)}(\tilde{c})$, c'est-à-dire $\tilde{J}(T_xM)\subset T_x^{\perp}M$ pour tout $x\in M$. Par rapport au repère orthonormé $\{e_A\}$ de sorte que

$$(3.1)\qquad e_1,\cdots,e_n\in TM$$

$$\text{et } e_{\bar{1}},\cdots,e_{\bar{p}},\ e_{1*}=\tilde{J}e_1,\cdots,e_{n*}=\tilde{J}e_n,\ e_{\bar{1}*}=\tilde{J}e_{\bar{1}},\cdots,e_{\bar{p}*}=\tilde{J}e_{\bar{p}}\in T^{\perp}M,$$

$\tilde{J}$ est de la forme

$$(3.2)\qquad \tilde{J}=\begin{pmatrix}0 & -I_{n+p}\\ I_{n+p} & 0\end{pmatrix}$$

Les indices seront notées par

$$(3.3)\qquad \begin{aligned}&i,j,k,l,\cdots\in\{1,\cdots,n\},\\ &\lambda,\mu,\cdots\in\{\bar{1},\cdots,\bar{p},1^*,\cdots,n^*,\ \bar{1}^*,\cdots,\bar{p}^*\}.\end{aligned}$$

On a le résultat suivant de Chen et Ogiue:

PROPOSITION 3.1 [9]. $M^{2n}\subset\tilde{M}^{2(n+p)}(\tilde{c})$ *est totalement géodésique si et seulement si* M *satisfait une des conditions suivantes*

(1) $K=\dfrac{\tilde{c}}{4}$,

(2) $\rho=\dfrac{1}{4}n(n-1)\tilde{c}$.

La formule du type de Simons est

$$(3.4)\qquad \frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2=\|\nabla'\sigma\|^2+2\sum\mathrm{tr}\,(A_\lambda A_\mu)^2-2\mathrm{tr}\,A^{*2}-\mathrm{tr}\,\tilde{A}^2+\frac{1}{4}n\,\tilde{c}\|\sigma\|^2+\frac{1}{4}\tilde{c}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}\,A_{i*}{}^2.$$

Pour $p=0$, cela se réduit à

$$(3.5)\qquad \frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2=\|\nabla'\sigma\|^2+2\sum\mathrm{tr}\,(A_{i*}A_{j*})^2-3\mathrm{tr}A^{*2}+\frac{1}{4}(n+1)\tilde{c}\|\sigma\|^2,$$

parce qu'on a

$$(3.6)\qquad \mathrm{tr}\,A^{*2}=\mathrm{tr}\,\tilde{A}^2.$$

Chen et Ogiue ont aussi prouvé le résultat suivant.

THEOREME 3.1 [9]. *Si M^n est une sous-variété totalement réelle, compacte et minimale de $\tilde{M}^{2n}(\tilde{c})$ et $\rho>\frac{n^2(n-2)}{2(2n-1)}\tilde{c}$, c.-à-d. $\|\sigma\|^2<\frac{n(n+1)}{4(2n-1)}\tilde{c}$, alors M est totalement géodésique.*

Remarquons que l'on a

$$\rho=\frac{1}{4}n(n-1)\tilde{c}-\|\sigma\|^2. \tag{3.7}$$

pour une sous-variété totalement réelle et minimale.

Pour un espace de Riemann à courbure constante, Chen et Ogiue ont trouvé le résultat suivant.

PROPOSITION 3.2 [9]. *Si $M^n(c)$ est une sous-variété totalement réelle et minimale de $\tilde{M}^{2n}(\tilde{c})$, alors $c=\frac{\tilde{c}}{4}$ ou $c\leqslant 0$.*

Le pincement suivant sur la courbure sectionelle est du à Chen et Houh.

PROPOSITION 3.3 [8]. *Si M^n est une sous-variété totalement réelle et complète de $\tilde{M}^{2n}(\tilde{c})$, alors $K\geqslant\frac{n-2}{4(2n-1)}\tilde{c}$ implique que M est totalement géodésique.*

Concernant la codimension arbitraire on a le résultat de Ludden, Okumura et Yano.

PROPOSITION 3.4 [14]. *Si M^n est une sous-variété totalement réelle, compacte et minimale de $M^{2(n+p)}(\tilde{c})$ et $\|\sigma\|^2<\frac{n}{2-\frac{1}{n+2p}}\tilde{c}$, alors M est totalement géodésique.*

Le théorème correspondant local est trouvé en remplacant "M est compact" par "M a courbure scalaire constante".

Nous considérons maintenant les espaces M^n qui sont conforméments plattes et de dimension $n>3$, c.-à-d. ceux pour lesquels le tenseur conforme de Weyl est égal à zero. On a le résultat suivant de Verstraelen.

THEOREME 3.2 [25]. *Soit M^n une sous-variété totalement quasi-ombilicale et totalement réelle d'un espace Bochner-Kaehlérien $\tilde{M}^{2(n+p)}$ avec $n\geqslant 4$, alors M est conformément plat.*

En concernant les pincements on a les résultats suivants.

THEOREME 3.3 [21]. *Soit M^n une sous-variéte minimale, compacte, totalement réelle et conformément plate de $\tilde{M}^{2n}(\tilde{c})$ avec $n\geqslant 4$, alors chaque des* *conditions suivantes implique que M est totalement géodésique*:

(1) $\rho > \dfrac{(n-1)^3(n+2)}{4(n^2+n-4)}\tilde{c}$,

(2) $\|\sigma\|^2 < \dfrac{(n+1)(n-1)(n-2)}{4(n^2+n-4)}\tilde{c}$,

(3) $K > \dfrac{(n-1)^2}{4n(n^2+n-4)}\tilde{c}$.

La preuve se fait en utilisant

(3. 8) $$\|\sigma\|^4 = (n-1)[(n-2)\sum \mathrm{tr}(A_{i*}A_{j*})^2 - (n-4)\mathrm{tr}\, A^{*2}],$$

et

(3. 8) $$\frac{1}{n}\|\sigma\|^4 \leqslant \mathrm{tr}\, A*^2 = \mathrm{tr}\, \tilde{A}^2 \leqslant \|\sigma\|^4.$$

De plus, on a l'analogue du résultat de Chen et Verstraelen [10] concernant la relation entre la propriété d'être conformément plat et la quasi-ombilicité dans le cas où les tenseurs fondamentales secondes sont commutatives.

THEOREME 3. 4 [24]. *Soit M^n une sous-variété totalement réelle d'un espace Bochner-Kaehlérienne $\tilde{M}^{2(n+p)}$ avec $n \geqslant 4$ et $[A_\lambda, A_\mu]=0$ ($\lambda, \mu \in \{n+1, \cdots, n+2p\}$), alors M est conformément plat si et seulement si*

$$\sum_\lambda (\rho_i^\lambda - \rho_j^\lambda)(\rho_k^\lambda\ \rho_l^\lambda) = 0$$

pour i, j, k, l deux à deux distinct et ou les ρ_i^λ sont les valeurs propres de A_λ.

Parce qu'on a

(3. 10) $$h_{ij}^{k*} = h_{kj}^{i*} = h_{ik}^{j*},$$

les directions $e_{1*}, \cdots, e_{n*}$ sont cilindriques si $[A_\lambda, A_\mu]=0$.

PROPOSITION 3. 5 [24]. *Soit M^n une sous-variété totalement réelle et conformément plate d'un espace Bochner-Kaehlérien $\tilde{M}^{2(n+p)}$ avec $n \geqslant 4$ et $[A_\lambda, A_\mu]=0$, alors*

1) *si $2p < n-2$, M est totalement géodésique*;

2) *si $2p \geqslant n-2$, par respect à un repère orthonormé approprié*

$$\{\xi_1 = e_{1*}, \cdots, \xi_n = e_{n*}, \xi_{n+1}, \cdots, \xi_{n+2p}\}$$

on a

$$A\xi_1 = D(\rho^1, 0, 0, \cdots, 0),$$
$$A\xi_2 = D(0, \rho^2, 0, \cdots, 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\xi_n = D(0, 0, 0, \cdots 0, \rho^n),$$
$$A\xi_{n+1} = D(\rho^{n+1}, \rho_2^{n+1}, \bar{\rho}^{n+1}, \cdots, \bar{\rho}^{n+1}),$$
$$A\xi_{n+2} = D(\rho^{n+2}, \rho^{n+2}, \rho_3^{n+2}, \bar{\rho}^{n+2}, \cdots, \bar{\rho}^{n+2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A\xi_{2n-2}=D(\rho^{2n-2},\cdots,\rho^{2n-2},\rho_{n-1}{}^{2n-2},\rho_{n-1}{}^{2n-2},\bar{\rho}^{2n-2}),$$
$$A\xi_{2n-1}=D(\rho^{2n-1},\cdots,\rho^{2n-1},\rho^{2n-1}),$$
$$A\xi_{2n}=D(\rho^{2n},\cdots,\rho^{2n},\rho^{2n}),$$
$$A\xi_{2n+1}=A\xi_{2n+2}=\cdots=A\xi_{n+2p}=0,$$

où

$$D(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

REMARQUE. Les mêmes résultats restent valables pour les sous-variétés **C**-totalement réelles et conformément plates d'un espace de Sasaki à courbure φ-sectionelle constante ([22]).

References

1. D. E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag (1976).
2. D. E. Blair, *Geometry of integral submanifolds of a contact distribution*, Illinois J. Math. **19** (1975), 269–275.
3. ———, *Positively curved integral submanifolds of a contact distribution*, Illinois J. Math. **19** (1975), 628–631.
4. S. Braidi & C. C. Hsiung, *Submanifolds of Spheres*, Math. Z. **115** (1970), 235–251.
5. E. Calabi, *Isometric imbedding of complex manifolds*, Ann. of Math. **58** (1953), 1–23.
6. B. Y. Chen, *Geometry of submanifolds*, Marcel Dekker, New York, 1973.
7. ———, *Some results of Chern–do Carmo–Kobayashi Type and the length of the Second Fundamental Form*, Indiana Univ. Math. J. **12** (1971), 1175–1185.
8. B. Y. Chen & C. S. Houh, *Totally real submanifolds of a quaternion projective space*, Ann. di Mat. pura ed appl. IV, Vol. CXX (1979), 185–199.
9. B. Y. Chen & K. Ogiue, *On totally real submanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **193** (1974), 257–266.
10. B. Y. Chen & L. Verstraelen, *A characterization of totally quasi-umbilical submanifolds and its applications*, Bull. U. M. I., **14-A** (1977), 49–57 and 634.
11. S. S. Chern, M. Do Carmo & S. Kobayashi, *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, Functional Analysis and Related Fields, (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, 1968), Springer, New York (1970), 59–75.
12. M. Kon, *On some complex submanifolds in Kaehler manifolds*, Can. J. Math. **26**

(1974), 1442–1449.
13. ———, *Kaehler immersions with vanishing Bochner curvatures tensors*, Kōdai Math. Sem. Rep. **27** (1976), 329–333.
14. G. D. Ludden, M. Okumura & K. Yano, *Totally real submanifolds of complex manifolds*, Atti Accad. Naz. Lincei, **58** (1975), 346–353.
15. K. Nomizu & B. Smyth, *A formula of Simon's type and hypersurfaces with constant mean curvature*, J. Diff. Geom. **3** (1969), 376–377.
16. K. Ogiue, *Differential Geometry of Kaehler submanifolds*, Adv. in Math. **13** (1974), 73–114.
17. K. Ogiue, *Positively curved complex submanifolds immersed in a complex projective space III*, J. Diff. Geom. **11** (1976), 613–615.
18. B. O'Neill, *Isotropic and Kaehler immersions*, Can. J. Math. **17** (1965), 907–915.
19. J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **88** (1968), 62–105.
20. B. Smyth, *Submanifolds of constant mean curvature*, Math. Ann. **205** (1973), 265–280.
21. P. Verheyen & L. Verstraelen, *Conformally flat totally real submanifolds of complex projective spaces* (to appear in Soochow J. Math.).
22. P. Verheyen & L. Verstraelen, *Conformally flat C-totally real submanifolds of Sasakian space-forms* (to appear in Geometriae Dedicata).
23. P. Verheyen & L. Verstraelen, *Positively curved complex submanifolds immersed in a complex projective space* (to appear).
24. P. Verheyen & L. Verstraelen, *Quasiumbilical anti-invariant submanifolds* (to appear).
25. L. Verstraelen, *A remark on conformally flat totally real submanifolds* (to appear in Kōdai Math. J.)
26. S. Yamaguchi, M. Kon & T. Ikawa, *C-totally real submanifolds*, J. of Diff. Geom. **11** (1976), 59–64.
27. S. Yamaguchi & S. Sato, *On complex hypersurfaces with vanishing Bochner tensor in Kaehlerian manifolds*, Tensor N. S. **22** (1971), 77–81.
28. K. Yano & M. Kon, *Totally real submanifolds of complex space forms I*, Tôhoku Math. J. **28** (1976), 215–225; ——— II, Kōdai Math. Sem. Rep. **27** (1976), 385–399.
29. ———, *Anti-invariant submanifolds of Sasakian space forms I*, Tōhoku Math. J. **29** (1977), 9–23; ——— II, J. of the Korean Math Soc. **13** (1976), 1–14.
30. ———, *Anti-invariant submanifolds*, Marcel Dekker, New York 1978.
31. S. T. Yau, *Submanifolds with constant mean curvature I*, Amer, J. Math. **96** (1974), 346–366; ——— II, Amer. J. Math. **97** (1975), 76–100.

Katholieke Universiteit Leuven