

## 線型計劃問題의 非頂邊形解法의 研究

(A Non-edge Following Method for Solving Linear Programs)

白 承 奎\*  
安 柄 勳\*

### Abstract

In this paper, we propose a non-edge following method for linear programs. Unlike alledged poor performance of algorithms of this type, this method performs well at least with 25 randomly generated problems.

This method is comparable to Rosen's gradient projection method as applied to the dual formulation. The latter is of general purpose, and no implementation rules are available for linear program applications. This paper suggests ways of finding improving dual feasible directions, and of allowing to move across the extreme faces of a higher dimension polyhedron.

Rather simple computational rules are provided for projection operations needed at each iteration.

### 1. 序 論

線型計劃問題를 解決하기 위한 單體法(Simplex Algorithm)은 原實行可能牲(Primal Feasibility)과 相補的 餘有性(Complementarity Slackness)을 만족시키면서 雙對實行可能牲(dual feasibility)이 만족될 때까지 反復 단계(iteration)를 계속하고, 雙對單體法(Dual Simplex Algorithm)은 雙對實行可能牲과 相補的 餘有性을 만족시키면서 原實行可能牲이 만족될 때까지 反復 단계를 계속한다. 이를 방법들은 반드시 基底解(Basic Solution)로부터 시작해야 하고, 每 反復 단계에서 한개씩의 基底變數를 바꾸는 「피봇팅」作業(Pivoting Operation)을 통하여 最適解를 찾는다.

이에 反하여 原・雙對單體法(Primal Dual Simplex Method)은 雙對實行可能牲과 相補餘有條件을 만족시키기 된다는 點에서 雙對單體法과 同一하나, 初期解가

基底解일 必要가 없다는 데 그 차이가 있다.

이미 線型計劃法의 解法은 잘 개발되어 있고, 商用화되어 있는 단계이므로, 이들에 도전한 만한 새로운 解法을 개발하기란 기대하기 힘든 실정이다. 그러나 이러한 이유때문에 가장 중요한 數理計劃法의 하나인 線型計劃法에 대한 解法研究가 비교적 소강상태였음은 부인할 곳이 없다[2].

근간 많은 연구활동을 야기시킨 Shor-Katchian方法도 기존 解法을 實際應用面에서 능가하기보다는 單體法의 理論的 反復回數의 上限이 거의 指數型임에 비해前者의 경우는 制約式行數의 多項式을 그 상한으로 한다는 理論的側面에서 많은 관심을 받았던 것이다[4].

本 研究에서도 既存解法을 능가하는 새로운 解法을 開發하기보다는 線型計劃問題를 다른 角度에서 관찰하고, 여기에서 도출되는 解法을 제시하여, 既存解法과의 관계를 究明하고, 특히 差異點을 밝혀보자 한다.

이 解法의 特징이라면, 우선 반드시 基底解일 必要가 없는 임의의 雙對實行可能解로부터 출발하여, 每反

\*韓國科學技術院 經營科學科

復時, 「 **피봇팅**」作業 대신 作業量이 유사한 投影作業(Projection)을 수행한다는 것을 들 수 있다.

投影作業을 한다는 點에서는 개념적으로 非線型問題에서 이 용되는 傾斜投影法(Gradient Projection Method)을 雙對問題에 適用시킨 것과 類似하다 하겠으나 Rosen의 GPM方法은 원래 提示된 方法대로는 線型計劃에 適用된 경우 行列크기에 따른 부담이 를 뿐더러, GPM解法의 閉鎖性(or는 連續性: closedness or upper semi-continuity)의 결여로 Zangwill의 一解化收斂條件를 만족시키지 못하는 결점이 있다[1].

本研究에서는 제시된 解法의 幾何學的 構造를 살펴, 解法의 順序를 제시하고, 이 解法의 收斂性을 검토한 후, 25개의 例題를 통해 그 성능評價를部分의 나마 시도해 보았다.

## 2. 解 法

解法을 紹介하기 前에 그 表現을 용이하게 하기 위한 다음의 몇 가지 表記法을 提示한다.

$A_j$ : 行列  $A$ 의  $j$ 번째 列벡터(column vector)

$A_i$ : 行列  $A$ 의  $i$ 번째 行벡터(row vector).  $A$ 가 벡터인 경우  $i$ 번째 元素(element)

$A_{\beta}$ :  $\beta$ 가 자연수집합인 경우  $\beta$ 의 元素인  $j$ 에 대한  $A_j$ 로 이루어진 行列  $A$ 의 部分行列(submatrix)

모든 벡터는 列벡터이며, 벡터나 行列의 어깨첨자(superscript)와 스칼라(scalar)의 첨자(subscript)는 反復回數(iteration number)를 表示한다.

一般的으로 線型計劃問題는 다음과 같이 表現된다.

$$\begin{aligned} & \min z \\ \text{s.t. } & c^T x = z \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

단,  $c \in R^n$ ,  $x \in R^n$ ,  $z \in R$ ,  $b \in R^m$ , 그리고  $A \in R^{m \times n}$ 이다. 만일 集合  $G$ 를

$$G = \{y \in R^{m+1} \mid y = \begin{pmatrix} c^T \\ A \end{pmatrix} x, x \geq 0\}$$

로 정의하면 위 線型計劃問題는 다음과 같이 表示된다.

$$\begin{aligned} & \min z \\ \text{s.t. } & \begin{pmatrix} z \\ b \end{pmatrix} \in G \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

여기에서  $\begin{pmatrix} z \\ b \end{pmatrix}$ 는  $b$ 가 상수벡터이고  $z$ 가 스칼라變數이므로 射線(ray)이 되며, 이를 需要線(requirement line)이라 부른다[3, 5].

또 集合  $G$ 는 볼록多面錐(convex polyhedral cone)

이다\*[6]. 따라서  $G$ 는  $m+1$ 의 列을 갖는 行列  $K$ 에 의해  $\{y \mid Ky \geq 0\}$ 의 形태로 表示한다\*\*. 따라서 만약 行列  $K$ 를 알 수 있다면, 문제 (2)는  $K \begin{pmatrix} z \\ b \end{pmatrix} \geq 0$ 을 만족하는  $z$ 中 最小의 것을 찾는 것이 되어  $z^*$ 는 쉽게 얻어질 것이다. 그러나 行列  $K$ 를 알아내는 일은 그 자체가 쉬운 일이 아니다. 이 경우 실제로 最適의 目的函數값을 결정해 주는 것은  $K \begin{pmatrix} z^* \\ b \end{pmatrix} = 0$ 이 되는  $K$ 의 한 行이 될 것이다.

따라서 最適의 目的函數값을 알기 위해서는 超平面(hyperplane)  $\{y \in R^{m+1} \mid K_1 y = 0\}$ 을 찾아내면 충분하다. 이 超平面을  $\{y \in R^{m+1} \mid (1, -\lambda^T)y = 0\}$ 의 形태로 表示한다면, 다음의 特性을 갖는 超平面이 바로 그것이다.

### 最適定理: 만일

- (i) 集合  $G$ 의 임의의 元素  $y$ 에 대해  $(1, -\lambda^T)y \geq 0$ 을 만족시키고,
- (ii) 需要線과 그 超平面의 積集合(intersection)이  $G$ 에 속하면,

이를 만족하는  $z^*$ 는 最適目的函數值이고,  $\lambda$ 는 雙對最適解이다.

증명: (i)에서 모든 非陰의  $x$ 에 대해  $(1, -\lambda^T) \begin{pmatrix} c^T \\ A \end{pmatrix} x \geq 0$ 이므로  $(1, -\lambda^T) \begin{pmatrix} c^T \\ A \end{pmatrix} \geq 0$ 이고, 이는 곧  $c^T \geq \lambda^T A$ 가 되어  $\lambda$ 가 雙對實行可能解임을 나타낸다. (ii)는  $\begin{pmatrix} c^T \\ b \end{pmatrix}$ 가  $G$ 에 속함과 同一하며, 어떤  $x \geq 0$ 에 대하여  $\begin{pmatrix} c^T \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^T \\ A \end{pmatrix} x$ 가 성립함을 뜻한다. 즉  $x$ 라는 原實行可能解가 存在하여,  $\lambda^T b = c^T x$ , 즉 雙對目的函數와 原目的函數의 값이 같아짐을 의미한다.

本研究에서 構造하고자 하는 解法의 概念의 요체는 바로 이 定理에 있다. 즉, (i)을 만족시키는 任意의 超平面에서 시작하여, 이 超平面을 回轉시켜 (ii)를 만족하도록 하는 것이다.

우선 이 解法을 단계별로 紹介하면 아래와 같다.

단계 1: (初期作業) 最適定理(i)을 만족시키는 임의의  $\lambda^0$ 를 구한다. 만약 그러한  $\lambda^0$ 가 존재하지 않으면 이 문제는 雙對實行不可能하다. 그렇지 않은 경우 初期等條件制約指數集合  $\beta_0^0$ 을 空集合으로 하고(이 경우 必要하면 다음 節에 소개되는 撥動法을 이용한

\*註) 경우에 따라  $G$ 는  $R^{m+1}$  자체일 수도 있다. 이 경우는 문제가 無制限(unbounded)일 경우이며, 또 일반적으로  $R^{m+1}$ 도 볼록多面體로 定義된다[6].

\*\*註) 集合  $G$ 가  $R^{m+1}$ 인 경우는  $K$ 의 모든 원소가 0일 경우이다.

다),  $k=0$ ,  $i=0$ 으로 한 다음 단계 2로 간다.

**단계 2 :** (超平面回轉方向의 設定)  $\alpha_k^i$ 를  $A_{\alpha}$ 가 一次獨立인  $\beta_k^i$ 의 部分集合  $\alpha$ 中 가장 큰 것으로 定義하고, 回轉方向  $d(\alpha_k^i)$ 를

$$d(\alpha_k^i) = \begin{cases} (I - A_{\alpha}(A_{\alpha}^T A_{\alpha})^{-1} A_{\alpha}^T) b & \beta_k^i \neq \phi \text{일 때} \\ b & \beta_k^i = \phi \text{일 때} \end{cases}$$

로 구한다. 表記便宜上  $\alpha_k^i$ 를  $\alpha$ 로 表記하였다. 만일  $d(\alpha_k^i) \neq 0$ 이면 단계 3으로 가고,  $d(\alpha_k^i) = 0$ 이면 단계 6으로 간다.

**단계 3 :** (回轉角 및 進入벡터의 決定)

$$\theta = \max_j \{\theta \geq 0 | c_j - (\lambda^k + \theta d(\alpha_k^i))^T A_{\cdot j} \geq 0, \forall j \in \beta_k^i\}$$

를 구한다. 이때  $\theta = \infty$ , 즉  $d(\alpha_k^i)^T A_{\cdot j} \leq 0, \forall j \in \beta_k^i$  이면 이 문제는 原實行不可能이다. 그렇지 않을 때,  $\theta \neq 0$ 이면 단계 4로,  $\theta = 0$ 이면 단계 5로 간다.

**단계 4 :** (超平面回轉 및 새로운 指數集合의 決定)

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \theta d(\alpha_k^i)$$

$\beta_k^{i+1} \cup \{j \in \beta_k^i | c_j = (\lambda^k + \theta d(\alpha_k^i))^T A_{\cdot j}, d(\alpha_k^i)^T A_{\cdot j} \geq 0\}$  를 놓는다.  $i=0, k=k+1$ 로 하고 단계 2로 간다.

**단계 5 :** (새로운 指數集合의 決定)

$$\beta_k^{i+1} = \beta_k^i \cup \{j \in \beta_k^i | j \in \beta_k^0, d(\alpha_k^i)^T A_{\cdot j} > 0\}$$

로 놓고  $i=i+1$ 로 하여 단계 2로 간다.

**단계 6 :** (最適解 및 消去벡터의 決定)  $d(\alpha_k^i) = 0$ 일 때  $x(\alpha_k^i) = (A_{\alpha}^T A_{\alpha})^{-1} A_{\alpha}^T b \geq 0$ 이면  $x(\alpha_k^i)$ 는 原最適解이고  $\lambda^k$ 는 雙對最適解이다.

단 편의상  $\alpha_k^i$ 를  $\alpha$ 로 表記했다.

$x(\alpha_k^i) \neq 0$ 일 경우  $\beta_k^{i+1} = \beta_k^i \cup \{j | x(\alpha_k^i)_j < 0\}$ 로 놓고  $i=i+1$ 로 하여 단계 2로 간다.

이 解法의 흐름도를 要約하면 <그림 1>과 같이 된다. 이 解法의 實際適用時  $d(\alpha_k^i)$ 를 구하는 것이 計算上의 문제가 되겠다. 그러나 每反復時  $\beta_k^i$ 에 指數를 침가 또는 소거함을 이용하여 어렵지 않게 계산할 수 있다.

이제부터 이 解法이 理論的 說明을 위한 몇 가지 補助定理를 提示하고 記述하고자 한다.

**補助定理 1 :**  $\beta_k^i$ 에 속하는 모든  $j$ 에 대하여  $d(\alpha_k^i)^T A_{\cdot j} = 0$ 이다.

**증명 :**  $\alpha_k^i$ 를  $\alpha$ 로  $A_{\alpha}$ 를  $B$ 로 표시하면.

$$d(\alpha)^T B = b^T (I - B(B^T B)^{-1} B^T) B = b^T B - b^T B = 0$$

그런데  $\alpha_k^i$ 의 정의에 의해 모든  $j \in \beta_k^i$ 에 대해  $A_{\cdot j}$ 는  $B$ 의 一次조합(linear combination)으로 表現되고 따라서  $d(\alpha)^T A_{\cdot j} = 0$ 이다.

**定理 1 :** 모든  $j \in \beta_k^0$ 에 대해  $\lambda^k T A_{\cdot j} = c_j$ 이고, 모든  $j \notin \beta_k^0$ 에 대하여  $\lambda^k T A_{\cdot j} < c_j$ 이다.

**증명 :** (數學的 귀납법에 의해)

$\beta_0^0$ 에 대해 다음 節에 소개되는 攝動法을 쓰면 明白히 성립한다.

$\beta_k^0$ 에 대해 위 사실이 성립한다고 가정하자.

i)  $j \in \beta_{k+1}^0$ 이면  $j \in \beta_k^i$ 이거나  $j \notin \beta_k^i$ ,  $(\lambda^k + \theta d(\alpha_k^i))^T A_{\cdot j} = c_j$ ,  $d(\alpha_k^i)^T A_{\cdot j} \geq 0$ 이다. 후자의 경우  $\theta$ 의 정의에 의해  $\lambda^{k+1} T A_{\cdot j} = (\lambda^k + \theta d(\alpha_k^i))^T A_{\cdot j} = c_j$ 이다.

전자의 경우, 우선  $\beta_k^i \subset \beta_k^0$ 임을 유의하면  $\lambda^k T A_{\cdot j} = c_j$ 이고 補助定理 1에 의해  $d(\alpha_k^i)^T A_{\cdot j} = 0$ 으로  $\lambda^{k+1} T A_{\cdot j} = (\lambda^k + \theta d(\alpha_k^i))^T A_{\cdot j} = c_j$ 이다.

ii)  $j \notin \beta_{k+1}^0$ 라 하자.  $j \in \beta_k^0$ 이면  $c_j = \lambda^k T A_{\cdot j}$ 므로 만약  $d(\alpha_k^i)^T A_{\cdot j} > 0$ 이었다면  $\theta = 0$ 이 되었어야 한다. 그러나 이  $\theta \neq 0$ 으로  $d(\alpha_k^i)^T A_{\cdot j} \leq 0$ 이며  $d(\alpha_k^i)^T A_{\cdot j} = 0$ 인  $j$ 는  $\beta_{k+1}^0$ 에 포함되어 있다. 즉  $c_j = \lambda^k T A_{\cdot j}$ 이고  $d(\alpha_k^i)^T A_{\cdot j} < 0$ 며, 따라서  $\lambda^{k+1} T A_{\cdot j} = (\lambda^k + \theta d(\alpha_k^i))^T A_{\cdot j} < c_j$ 이다. 그리고  $j \notin \beta_k^0$ 면  $\notin \beta_k^i$ 이고  $\theta$ 의 정의에 의해  $\lambda^{k+1} T A_{\cdot j} < c_j$ 이다.

이 定理는 解法의 모든 과정에서 最適定理 (i)이 만족됨을 의미하며, 앞으로의 理論전개를 위하여 등식이 성립하는 범위까지를 명시하였다.

**補助定理 2 :**  $d(\alpha_k^i) \neq 0$ 이면,  $d(\alpha_k^i)^T b > 0$ 이다.

**증명 :**  $\alpha_k^i$ 를  $\alpha$ 로 表示하면,

$$\begin{aligned} d(\alpha)^T b &= b^T (I - A_{\alpha}(A_{\alpha}^T A_{\alpha})^{-1} A_{\alpha}^T) b \\ &= b^T (I - A_{\alpha}(A_{\alpha}^T A_{\alpha})^{-1} A_{\alpha}^T)^2 b \\ &= d^{kT} d^k > 0 \end{aligned}$$

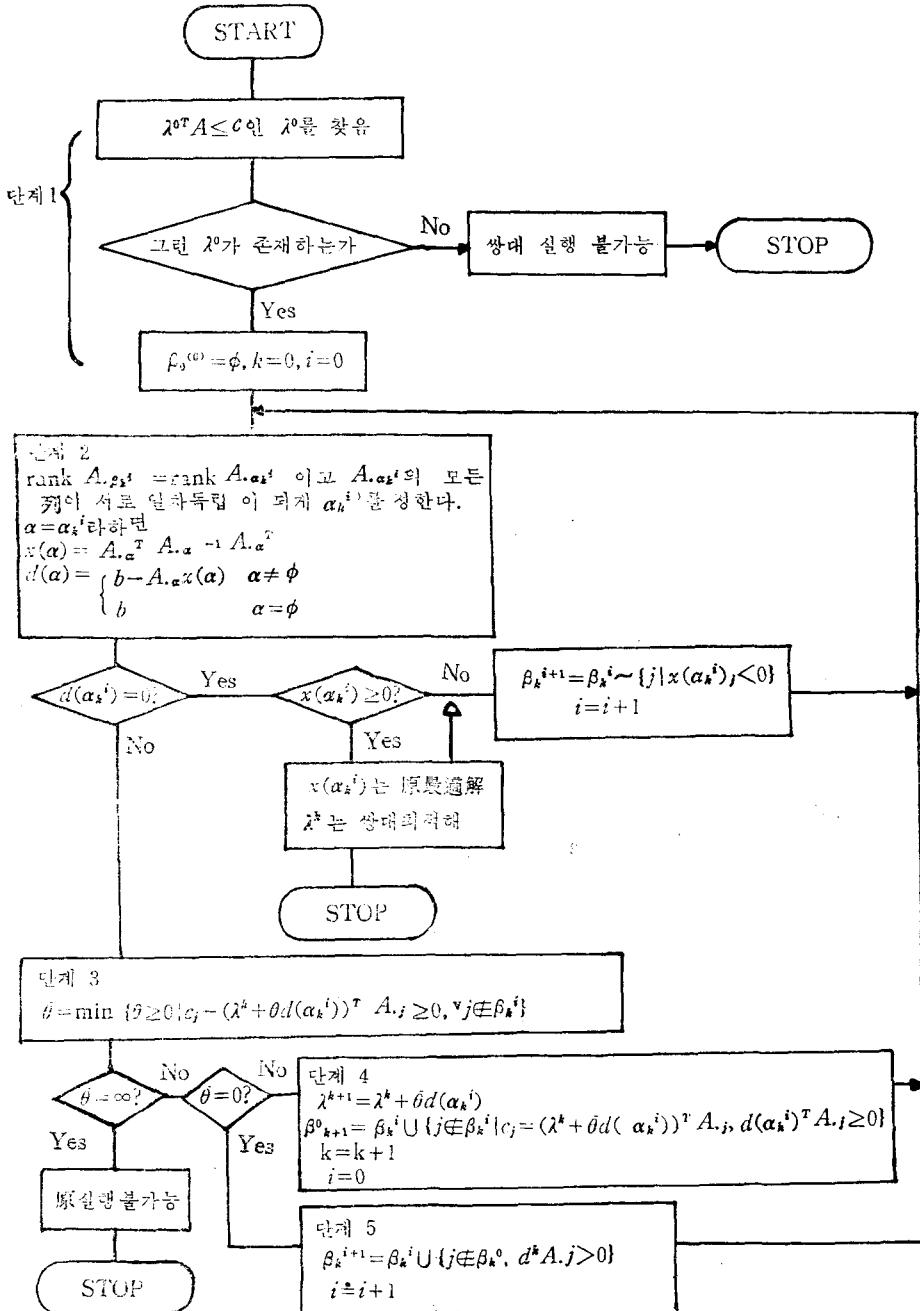
**정리 2 :** 만일  $\theta = \infty$ 이면, 주어진 원문제는 실행 불가능이다.

**증명 :**  $\lambda = \lambda^k + \theta d(\alpha_k^i)$ 라 하자.

우선  $\beta_k^i$ 에 속하지 않는  $j$ 에 대하여는  $\theta$ 의 정의에 의해  $\lambda^k T A_{\cdot j} = (\lambda^k + \theta d(\alpha_k^i))^T A_{\cdot j} \leq c_j$ 이다. 또  $\beta_k^i$ 에 속하는  $j$ 의 경우는, 補助定理 1에 의해  $d(\alpha_k^i)^T A_{\cdot j} = 0$ 이고  $\beta_k^i \subset \beta_k^0$ 임과 定理 1을 고려해 볼 때  $\lambda^k T A_{\cdot j} = 0$ 으로  $\lambda^k T A_{\cdot j} = \lambda^k T A_{\cdot j} = c_j$ 이다. 따라서  $\lambda$ 는 雙對 實行可能解이고 그 目的函數  $\lambda^T b = (\lambda^k T b + \theta d(\alpha_k^i)^T b)$ 는 補助定理 2에 의해 無制限(unbounded)이다. 따라서 이 문제는 原實行不可能이다.

**정리 3 :**  $d(\alpha_k^i) = 0$ 이고  $x(\alpha_k^i) \geq 0$ 이면,  $x(\alpha_k^i)$ 는 原最適解이고  $\lambda^k$ 는 雙對最適解이다.

**증명 :**  $\alpha_k^i$ 를  $\alpha$ 로 表示하고,  $x$ 를  $x(\alpha_k^i)$ 에 속하지 않는 원소는 0이고  $x(\alpha_k^i)$ 에 속하는 원소는 그 대응하는



값을 갖는  $x(\alpha_k^i)$ 의 확장된 빼터라 하자.

$d(\alpha)=0$ 은  $b=A_{\alpha}x(\alpha)$ 를 의미하고,  $x(\alpha) \geq 0$ 이면 정리 1에 의해  $\lambda^{kT}b=\lambda^{kT}A_{\alpha}x(\alpha)=c_{\alpha}^Tx(\alpha)$ 이므로

$$\begin{pmatrix} \lambda^{kT}b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\alpha}^Tx(\alpha) \\ A_{\alpha}x(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^Tx \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^T \\ A \end{pmatrix}x, \quad x \geq 0$$

인解가 찾아진 것이고, 이는 最適定理 (ii)를 만족시켜 정리 1과 함께 最適解가 찾아진 것을 의미한다.

이상을 통하여 볼 때 이 解法의 주요특성은 單體法類가 頂邊(extreme edge)을 따라 頂點간을 움직이는 것과는 달리, 반드시 頂點일 必要가 없는 점 사이를 반드시 頂邊일 必要가 없는 경로를 따라 움직일 수 있는 所謂 非頂邊形解法(non-edge-following-algorithm)이라는 것이다.

### 3. 收斂性 및 摆動法

本研究의 解法은 單體法과 類似하게 特殊한 條件의 問題에 對해서는 주기현상(cycling)이 일어날 수 있다. 이 節에서는 이러한 주기현상이 일어나지 않는, 즉 收斂이 보장되는 하나의 충분조건을 제시하고, 그 조건이 만족되지 않을 경우에도 解法의 收斂性을 보장하게 해주는 摆動法(perturbation)을 소개하겠다.

#### 3-1. 收斂性 및 收斂條件

우선 주기현상이 일어나지 않기 위한 充分條件부터 提示하면,  $A_{\beta_k^0}$ 의 모든 列들이 서로 一次獨立이라는 것이다. 이 條件은  $\beta_k^0 = \alpha_k^0$ 를 의미하는 것이며  $\beta_k^i$ 는  $\beta_k^0$ 의 部分集合이므로  $\beta_k^i = \alpha_k^i$ 가 된다.

위 條件下에서 本 解法의 收斂性을 보이기 위해서는 다음의 事項을 보이면 될 것이다. 첫째  $d(\alpha_k^0)=0$ 이 되게 하는 指數集合  $\beta_k^0$ 은 有限個 存在하며, 그러한  $\beta_k^0$ 에 對한  $\lambda^{kT}b$ 는 유일하게 결정된다.

둘째  $\lambda^{kT}b$ 는 단순증가(strict increase)한다는 것이다.

$A_{\beta_k^0}$ 를  $B$ 로 表記하면(물론 이때  $\alpha_k^0 = \beta_k^0$ 이므로  $B = A_{\alpha_k^0}$ 이다),  $d(\alpha_k^0)=0$ 은  $b=B(B^TB)^{-1}Bb$ 가 되어  $b$ 가  $B$ 의 一次組合(linear combination)으로 表現됨을 의미하므로 그러한  $\beta_k^0$ 가 유한개 존재함은 명백하고,  $\lambda^{kT}b=\lambda^{kT}B(B^TB)^{-1}B^Tb=c_{\beta_k^0}(B^TB)^{-1}B^Tb$ 가 되어  $\beta_k^0$ 에 대한  $\lambda_k^Tb$ 는 有一하게決定된다.

또  $\lambda^{k+1T}b=(\lambda^k+\theta d(\alpha_k^i))^Tb=\lambda^{kT}b+\theta d(\alpha_k^i)^Tb$ 이고  $\theta > 0$ ,  $d^{kT}b > 0$ 이므로  $\lambda^{k+1T}b > \lambda^{kT}b$ 이다. 그러나 이때 문제가 되는 것이  $\lambda^k$ 에서  $\lambda^{k+1}$ 로 전환하는 단계 4로 갈 수가 있느냐 하는 것이다. 즉  $\beta_k^0, \beta_k^1, \dots$ 하는 식으로  $k$ 값의 변화가 없이  $i$ 값만 無限으로 커질 수는 없는

가 하는 문제이다. 이러한 주기현상을 구체적으로 설명하자면  $\beta_k^0$  안에 있는 指數중 일부가 消去됐다가 다시 첨가되는 과정을 反復하는 경우라 할 수 있다. 물론 이 경우  $\theta$ 는 계속 0이 되며  $\lambda^k$ 의 값은 변하지 않고 따라서  $\lambda^{kT}b$ 는 증가하지 않는다. 그러나 앞에서 말한 收斂條件이 만족되는 경우에는 이러한 현상이 일어나지 않을음을 증명할 수 있다. 이 節의 나머지에서 그것을 보이려 한다.

定理 1과  $\theta$ 의 定義에 의하면  $i=0$ 이면  $\theta > 0$ 이므로 흐름도를 보면  $i=1$ 이 되는 지점은 항상 指數들이 消去되는 단계 6임을 알 수 있다.

補助定理 3 : 收斂條件이 만족될 경우  $d(\alpha_k^0)=0$ 이면  $\alpha_k^1 \subset \alpha_k^0$ 를 만족하는 모든  $\alpha$ 에 대해  $d(\alpha) \neq 0$ 이다.

증명 :  $x(\alpha_k^0)$ 을 양 또는 영의 부분( $x_1$ )과 음의 부분( $x_2$ )으로 나누고,  $A_{\alpha_k^0}$ 를 이에 대응하는  $A_1$ 과  $A_2$ 로 나누자.  $d(\alpha_k^0)=0$ 은  $b=A_1x_1+A_2x_2$ 를 의미하고 또  $A_{\alpha_k^0}$ 가 一次獨立인 列들로 이루어졌으므로 위 등식을 만족하는  $x_1, x_2$ 는 유일하게 존재한다. 만약  $d(\alpha)=0$ 이라 가정하면  $b=A_1\bar{x}_1+A_2\bar{x}_2$ 를 만족하면서  $\bar{x}_2$ 중 최소한 하나의 원소가 0인  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ 가 존재하게 되어 모순(contradiction)이 생긴다.

補助定理 4\* :  $d=(I-A_1(A_1^TA_1)^{-1}A_1^T)b \neq 0$ ,  $b=A_1x_1+A_2x_2$ ,  $x_2 < 0$ 이면  $d^TA_2 \neq 0$ 이다.

증명 :  $A_2x_2=b-A_1x_1$ 이므로  $d^TA_2x_2=d^Tb-d^TA_1x_1$ 이다.

$$d^Tb=b^T(I-A_1(A_1^TA_1)^{-1}A_1^T)b \\ =b^T(I-A_1(A_1A_1^TA_1)^{-1}A_1^T)^2b=d^Td > 0$$

이고

$$d^TA_1x_1=b^T(I-A_1(A_1^TA_1)^{-1}A_1^T)A_1x_1 \\ =b^TA_1x_1-b^TA_1x_1=0$$

이므로,  $d^TA_2x_2 > 0$ 이다. 그런데  $x_2 < 0$ 이므로  $d^TA_2 \neq 0$ 이다.

定理 4 : 收斂條件이 만족될 때,  $\beta_k^0$ 의 크기를  $l_1$ ,  $\beta_k^1$ 의 크기를  $l_2$ 라 하면,  $d(\alpha_k^0)=0$ 이고  $x(\alpha_k^0) \neq 0$ 이면  $l_1-l_2$ 反復단계 내내에  $\theta > 0$ 인 단계가 존재한다.

증명 : 우선  $\beta_k^1 \subset \beta_k^0 \subset \beta_k^1$ 임을 보이자.

$i=1$ 일 때는 明確하다.

$\beta_k^1 \subset \beta_k^0 \subset \beta_k^1$ 라고 하면 補助定理 3에 의해  $d(\alpha_k^i) \neq 0$ 이므로  $\beta_k^i$ 에서 消去되는 指數는 없다. 따라서  $\beta_k^1 \subset \beta_k^{i+1} \subset \beta_k^1$ 이다. 補助定理 4에 의해

\*註) 이 補助定理의 表記法은 本論文의 다른 부문의 表記法과 무관함.

$$\{j \notin \beta_k^i \mid j \in \beta_k^0, d^k A_{\cdot j} > 0\} \subset \{j \notin \beta_k^i \mid j \in \beta_k^0\}$$

이므로  $\beta_k^{i+1} \subset \beta_k^0$ 이다. 만약  $\{j \in \beta_k^i \mid j \notin \beta_k^0, d^{kT} A_{\cdot j} > 0\}$ 이 空集合이면  $\theta > 0$ 이 되어  $\beta_k^{i+1}$ 은 정의되지 않는다. 즉  $\theta > 0$ 이 되는 단계가 존재하지 않는 한  $\beta_k^i \subset \beta_k^0 \subset \beta_k^{i+1}$ 이고  $d(\alpha_k^i) \neq 0$ 이다.

이제  $\theta > 0$ 인 단계가  $l_1 - l_2$  안에 存在하지 않는다 고 가정하면,  $i$ 가 1 증가하는 단계에서  $\beta_k^i$ 의 크기는 1 이상 증가하므로, 결국  $\beta_k^i = \beta_k^0$ 가 되어 補助定理 3에 모순이다 (contradiction).

정리 4는 주기현상이 일어나지 않고  $\lambda^k b$ 가 단순증가함을 보여 주었고, 이로써 本 解法의 收斂性이 證明되었다.

### 3-2. 摄動法

혼돈을 피하기 위하여 우선 本研究에서 提示하는 摄動法은 두 가지가 있음을 밝혀 두겠다. 그 첫째는 단계 1에서  $\beta_0^0$ 를 空集合으로 만들기 위한 것이고, 둘째는 收斂性 보장을 위한 것이다.

우선  $\beta_0^0$ 을 空集合으로 만들기 위해서는  $c_j = \lambda^{jT} A_{\cdot j}$ 인 指數  $j$ 들에 對하여  $c_j$ 에 임의의 작은 값  $\delta$ 를 더해주는 것이다. 이때  $\delta$ 는 收斂性을 위한 摄動法에 영향을 미치지 못할 만큼 작은 수이다. 물론 실제의 計算에 이 수치를 반영하는 것은 아니고 다만 變動된  $c_j$ 에 해당하는  $j$ 가  $\beta_k^i$ 에 침가되는 순간이나 變動되기 전의  $c_j$ 가  $\lambda^{iT} A_{\cdot j}$ 보다 커지는 순간 즉  $\theta d(\alpha_{k-1}^i)^T A_{\cdot j} < 0$ 인 순간에는 더 이상  $c_j$ 를 變動시킬 필요가 없으므로  $c_j$ 를 원래 상태로 되돌리기만 하므로 그  $c_j$ 가 변동이 되었는지 아닌지의 상세한 기억하면 되는 것이다. 이 첫번째의 摄動法이 定理 2의 結果를 유출할 수 있게 하는 것이다.

두 번째의 摄動法은 收斂條件이 만족되지 않을 경우, 즉  $k_0$ 反復단계에서  $d(\alpha_{k_0}^0) = 0$ ,  $\alpha_{k_0}^0 \not\equiv \beta_{k_0}^0$ 이어서 그  $k_0$ 에서  $k$ 값이 증가하지 못하고 주기현상이 일어날 가능성이 있을 때 적용되어 매 단계에서 미세한 값이라도  $\lambda^{kT} b$ 가 단순증가하게 한다.

이 摄動法의 적용時期는  $d(\alpha_{k_0}^i) = 0$ ,  $x(\alpha_{k_0}^i) \not\equiv 0$ 이어서  $\beta_{k_0}^0$ 를 축소시켜  $\beta_{k_0}^1$ 을 만들었을 때  $\beta_{k_0}^0 \not\equiv \alpha_{k_0}^0$ 일 때부터 몇 反復을 거쳐  $\lambda^{k_0+i} b$ 가 미세하게 변동된 값에 의한 단순증가가 아닌 실제의 증가를 일으켰을 때까지이다.

우선 摄動法의 첫 단계는  $\beta_{k_0}^0$ 을 축소시키기 직전에 (흐름도의 ↑)  $c$ 를

$$c_j^p = \begin{cases} c_j & j \in \beta_{k_0}^0 \sim \alpha_{k_0}^0 \\ c_j + \varepsilon^j & j \in \beta_{k_0}^0 \sim \alpha_{k_0}^0 \text{ (단 } \varepsilon \text{은 임의로 작은 값)} \end{cases}$$

와 같이  $c^p$ 으로 변동시키고  $\beta_{k_0}^{(p)} = \alpha_{k_0}^0$ 로 하여, 그 변동된  $c^p$ 과  $\beta_{k_0}^{(p)}$ 가 정리 1을 만족시키게 하고 다음에

증명하는 바와 같이 收斂條件을 만족하게 한다. 그리고 2節에서 제시된 解法의  $c$  대신  $c^p$ ,  $\beta_k^0$  대신  $\beta_k^{(p)}$ 를 적용시킨다.

補助定理 5:  $A_{\cdot \beta}$ 의 모든 列들이 서로 一次獨立이 아니라 하면 (단  $\beta \subset \beta_{k_0}^0$ )

모든  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ 에 대하여

$A_{\cdot \beta}^T \lambda = c_{\beta}^p$ 를 만족하는  $\lambda \in R^n$ 가 存在하지 않는  $\bar{\varepsilon} > 0$ 이 존재한다.

證明:  $A_{\cdot \beta}$ 를  $\alpha_{k_0}^0$ 에 대응하는  $A_1$ 과 그렇지 않은  $A_2$ 로 나누고, 그에 준하여  $c_{\beta}$ 를  $c_1, c_2$ 로 나눈다. 우선  $A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0$ ,  $x_2 \neq 0$ 인  $x_1, x_2$ 가 존재함을 보이자. 명백히  $A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0$ ,  $(x_1, x_2) \neq 0$ 인  $x_1, x_2$ 가 존재한다. 이 때  $x_2 = 0$ 이라 가정하면,  $A_1 x_1 = 0$ 인  $x_1 \neq 0$ 이 존재한다. 이는  $A_1$ 의 모든 列들이 一次獨立이라는데 모순이다.

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ 를 위와 같은  $x_1, x_2$ 중의 하나라 하자,  $\varepsilon$ 에 대한 等式,

$$(\bar{x}_1^T, \bar{x}_2^T) c_{\beta}^p = \bar{x}_1^T c_1 + \bar{x}_2^T c_2 + \bar{x}_2^T (\varepsilon^{j_1}, \varepsilon^{j_2}, \dots, \varepsilon^{j_l}) = 0$$

(단,  $l$ 은  $\bar{x}_2$ 의 차원이고, 모든  $j_i$ 는 서로 다른 값을 갖는다.)

은 有限한(finite) 解集合을 갖는다.  $\bar{\varepsilon}$ 를 그 解중 가장 작은 양의 것으로 정의하면, 모든  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ 에 대하여  $(\bar{x}_1^T, \bar{x}_2^T) c_{\beta}^p = 0$ 이 만족되지 않는다.

만약 어떤  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ 에 대하여  $A_{\cdot \beta}^T \lambda = c_{\beta}^p$ 인  $\lambda$ 가 존재한다고 가정하면,  $(\bar{x}_1^T, \bar{x}_2^T) c_{\beta}^p = (\bar{x}_1^T, \bar{x}_2^T) A_{\cdot \beta}^T \lambda = (\bar{x}_1^T A_1^T + \bar{x}_2^T A_2^T) \lambda = 0$ 이 되어 모순이다.

$\beta_{k_0}^{(0)(p)} = \alpha_{k_0}^0$ 로 하는 이유는 변형된 문제에 대하여 정리 1의 내용이 유효하게 하기 위한 것이다. 이 摄動法下에서 收斂性을 보이기 위해서는, 일단 摄動法이 적용되기 시작하면 有限反復단계이내에 最適解가 찾아지거나 雙對目的函數값이 증가하는 단계가 존재함을 보이면 될 것이다. 일단 섭동법이 적용되기 시작하면 쌍대목적함수값이 단순증가하기 전까지는  $\beta_{k_0}^0$ 에 속한지수만이 진입할 수 있다.

便宜上  $\beta_{k_0}^0$ 를  $\beta$ 로 표기하자.

$$\min c_{\beta} x \quad (p4)$$

$$\text{s.t. } A_{\cdot \beta} x = b \quad x \geq 0$$

가 최적解를 갖으면 그 최적解가 (p1)의 최적해이다. (최적정리 참조) 따라서 (p4)를 푸는 것은 (p1)을 푸는 것과 동일하다. 이 때 (p4)에 섭동법을 적용시키면 보조정리 5에 의해 收斂性이 보장된다. 또 (p4)가 실행불가능이면 위와 같은 이유로 有限反復단계이내에 (p4)가 실행불가능임이 밝혀진다. 이는 有限反復단계이내에  $d^T A_{\cdot \beta} < 0$ 인  $d$ 가 발견됨을 뜻하여, 쌍대목적함수가 단순증가함을 의미한다.

## 4. 幾何學的 解析

앞에서 說明한 解法을 좀더 명확히 하기 위해 그 幾何學的 의미를 몇개의 例와 함께 고려해 보자.

$$\begin{array}{ll} \min z & \\ \text{例 1) } & \text{s.t. } 2x_1 + 2x_2 - x_3 = z \\ & 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

이 문제를  $R^3$ 에 表現해 보면 <그림 2>와 같이 된다. 여기에서 條線은 需要線을 表示하고 빚금친 부분은  $G$ 를 의미한다. 그리고 이 문제는 需要線이  $G$ 에 속하는 部分中  $z$ 의 값이 가장 작은 點, 즉  $p$ 를 찾는 것이 된다[3, 5]. 이 例의 경우 本解法은 最適定理(i)을 만족시키는 超平面( $h_0$ )을 가지고 시작하여 最適定理 (i) (ii)를 同時에 만족시키는 超平面( $h_1$ )을 찾아내는 과정으로 說明될 수 있다.  $h_0$ 가 주어진 상태에서  $h_1$ 을 찾는 과정은  $h_0$ 를 需要線을 따라  $G$ 를 向하여 미는 것이라 할수 있다. 최소한 이 例의 경우 그러한 方法에 의해  $h_1$ 을 얻을 수 있을 것이다.

이 과정에 대한 좀 더 상세한 說明을 위하여 다음의 例를 고려해 보자.

$$\begin{array}{ll} \min z & \\ \text{例 2) } & \text{s.t. } 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = z \\ & x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ & -x_1 + 2x_3 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

이 문제를 앞에서와 같은 방법으로 表現해 보면  $R^3$ 에 <그림 3>과 같이 된다. 여기에서 찾으려고 하는 것은 需要線( $\gamma$ )과  $G$ 의 交점중의 하나인  $p$ 이다. 이를 위하여 이 解法은  $h^0$ 로부터 시작하여  $h_2$ 를 구하고 그 결과를 가지고 最適解를 나타내는  $p$ 를 찾는다(물론  $h_2$ 에서 실제로  $p$ 를 구하는 과정을 거치지 않고 最適解를 구한다). 最適定理 (i)을 만족시키는 超平面( $h_0$ )를  $\gamma$ 을 따라  $G$ 를 舊하여 밀면  $h_1$ 이 만들어질 것이다. 이때  $h_0$ 가 回轉하여  $h_1$ 이 된 다음 같은 方向으로 더 이상 回轉한다면 最適定理 (i)이 만족되지 않을 것이다.  $\theta$ 를 決定하는 것이 바로 이 과정에서 超平面이 더 이상 回轉하는 것을 막아주는 역할을 한다. 그리고 새로운 방향 벡터를 구하여 초평면을 계속 회전시킨다. 이때 그 回轉의 方向은  $\binom{c_3}{A_{3,1}}$ 를 그 超平面上에 포함시키는 것이 될 것이다. 다시 말하면 回轉에 의하여 생성되는 超平面을 表現하는 벡터  $(1, -\lambda^{2T})$ 가  $(1, -[\lambda^1 + \theta d(\alpha_1^0)]^T)$ 라 할 때 이때의 回轉方向을 表現하는 벡터인  $(0, d(\alpha_1^0)^T)$ 은  $(0, d(\alpha_1^0)^T) \binom{c_3}{A_{3,1}} = d(\alpha_1^0)^T A_{3,1} = 0$ 을 만족시킨다.

다는 것이다. 補助定理 1은 이것을 보여 주며, 幾何學的으로는 回轉方向벡터와 그 反復단계의  $\beta_k$ 에 해당하는  $\binom{c_j}{A_{j,1}}$ 는 서로 수직이라는 의미를 갖는다. 일단  $h_2$ 가 얻어진 다음  $d(\alpha_2^0) = 0$ 이 되고  $x(\alpha_2^0) \geq 0$ 이 되어  $x(\alpha_2^0)$ 는 最適解가 된다. 幾何學的으로  $d(\alpha_2^0) = 0, x(\alpha_2^0) \geq 0$ 라는 것은 需要線과  $h_2$ 의 交점인  $p$ 가  $\binom{c_1}{A_{1,1}}$ 과  $\binom{c_3}{A_{3,1}}$ 에 의해  $\binom{c_1 c_3}{A_{1,1} A_{3,1}} x, x \geq 0$ 의 형태로 表現可能함을 뜻하여  $p$ 가  $G$ 에 속함을 뜻하는 것이다. 만약 이때  $d(\alpha_2^0) = 0$ 이 나  $x(\alpha_2^0) \geq 0$ 이 아닐 경우, 즉 需要線이  $\gamma'$ 와 같이 되어  $\gamma'$ 과  $h_2$ 의 交점이  $p'$ 가 될 때,  $x(\alpha_2^0)$ 값 중 음수인 것 즉  $\binom{c_3}{A_{3,1}}$ 를  $\beta_2^0$ 로부터 제거시키고 超平面을 계속 回轉시킨다.

實行不可能성을 檢사하는 方法은 幾何學的으로 다음과 같이 說明될 수 있다. 이 例의 경우 需要線이  $\gamma'$ 일 때  $h^0$ 를  $\gamma'$ 를 따라 밀 경우  $h_2$ 는  $y_1$ 축과 평행이 될 때 까지 밀려갈 것이고 따라서 그 결과 만들어진 超平面은  $\gamma'$ 와  $G$ 를 分離시킬 것이다. 즉  $\gamma'$ 과  $G$ 는 서로 만나지 못하여 따라서 주어진 原問題는 實行不可能하다.

## 5. 他解法과의 比較

本研究에서 提示된 解法은 이용되는 概念이나 計算 과정으로 보아 雙對單體法, 原·雙對單體法 및 非線型 計劃法에 이용되는 Rosen의 傾斜投影法과 比較됨이 옳을 듯하다.

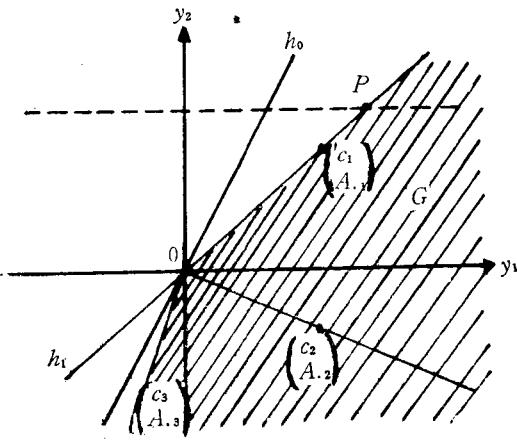
### 5-1. 雙對單體法과의 比較

雙對單體法과 이 解法은 雙對實行可能性과 相補的餘有性을 만족시키면서 原實行可能性이 만족될 때까지 反復반계를 계속한다는 點에서 그 유사성이 있다.

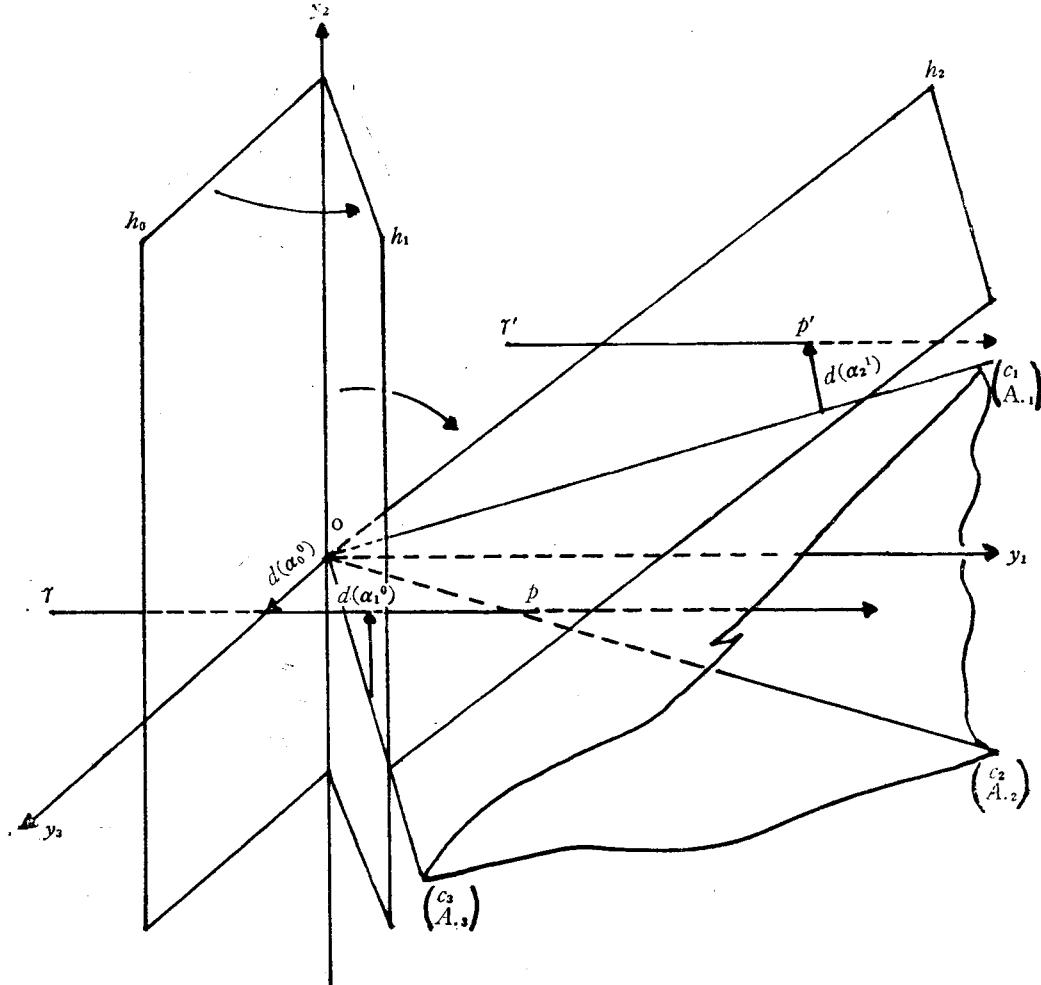
그러나 雙對單體法은 頂邊形(edge following)解法이고, 이 解法은 非頂邊形解法이란데 그 差異가 있다. 다시 말하면 雙對單體法은 하나의 頂點(extreme point)에서 頂邊을 따라 인접한 (adjacent) 頂點으로 이동하며 反復을 거듭하는 반면 本解法은 頂點일 必要가 없는 임의의 點에서 頂面(extreme face)를 가로질러 반드시 頂點일 必要가 없는 다른 點으로 이동해 가는 것이라 할 수 있다.

### 5-2. 原·雙對單體法과의 比較

반드시 基底解일 必要가 없는 雙對實行可能解에서 出發하여 雙對實行可能性과 相補的餘有性을 만족시키면서 原實行 possibility이 만족될 때 까지 頂邊을 따르지 않고 이동해 간다는 點과 原·雙對單體法에서 制限型原問題(Restricted Primal Problem)을 풀어서 方向벡터를 구한다는 點에서 두 解法의 類似性을 찾을 수 있을 것



〈그림 2〉



〈그림 3〉

이다.

그러나 이 두 解法의 制限型原問題는 그 目的函數가 서로 다르며 또한 그 제약식에 있어서도 조금의 차이가 있다. 특히 原・雙對單體法의 경우 制限型原問題를 풀 때 頂邊形解法인 單體法을 쓰는데 반해 本解法은 投影作業을 수행한다는 데 그 차이가 있다고 할 수 있다.

### 5-3. Rosen의 傾斜投影法과의 比較

本研究의 解法은 이 傾斜投影法에 가장 가까운 方法이라 볼 수 있겠다. 本解法은 주어진 原問題의 雙對型에 傾斜投影法을 適用하는 것과 概念上은 매우 유사하다. 實은 原・雙對單體法도 마찬가지로 解析될 수 있다. 이러한 의미에서 本研究의 解法을 傾斜投影法을 利用한 線型計劃法이라고 불러야 옳을지 모르겠다.

그러나 Rosen에 의하여 소개된 方法은 基本概要만을 提示했을 뿐, 線型計劃問題에 適用될 경우의 具體的인 計算過程은 提示되지 않았으며,  $A_{\beta_k}$ 가 一次獨立이 아닌 경우 그 解決方案이 提示되지 않았으며, 解法의 收斂性에 대한 證明이 되지 않고 있다.

本研究解法에서는 投影作業에서 進入ベ터 및 消去ベ터를 단계적으로 처리하여  $(I - A_{\alpha}(A_{\alpha}^T A_{\alpha})^{-1} A_{\alpha}^T)$  b 내의 逆行列은 別途의 逆行列計算 없이 最少의 積算을 하여 얻어지도록 되어 있으며,  $A_{\beta_k}$ 가 一次獨立이 아닌 경우 그 部分行列을 이용했으며, 解法의 收斂條件과 그 條件이 만족되지 않은 경우 解法이 收斂하게 만들기 위한 摄動法을 提示했다.

## 6. 計算上의 特性 및 例示

어떠한 解法이 提示될 경우, 그 解法의 最適解를 求하기까지 얼마나 많은 反復作業을 해야 하는가 하는 문제와 反復作業一回 수행시 計算量이 어떠한가 하는 것이 중요한 관심사가 된다. 本節에서는 本研究의 解法이 必要로 하는 每反復단계에서의 計算量과 反復回數에 관해 다루기로 하겠다.

每反復단계에서 必要되는 計算量을 檢討하기 전에 우선 每단계에서 逆行列을 구하는 方法에 대하여 알아보자. 이 解法의 每反復단계에서 列ベ터를 첨가 또는 消去시키는 작업을 하므로 다음의 方法을 이용하여 쉽게 計算할 수 있을 것이다.

行列  $B$ 의 逆行列  $B^{-1}$ 가 주어져 있을 때 여기에 列ベ터  $e$ 와 스칼라  $f$ 를 추가시킨  $\begin{pmatrix} B & e \\ e^T & f \end{pmatrix}$ 의 逆行列은  $v = B^{-1}e$ ,  $\alpha = 1/(f - e^T v)$ 라 할 때  $\begin{pmatrix} B^{-1} + \alpha vv^T & -\alpha v \\ -\alpha v^T & \alpha \end{pmatrix}$ 로 구

해지며,  $\begin{pmatrix} B & e \\ e^T & f \end{pmatrix}$ 의 逆行列이  $\begin{pmatrix} D & g \\ g^T & h \end{pmatrix}$ 로 주어진 경우  $B$ 의 逆行列은  $B^{-1} = D - gg^T/h$ 로 구해진다.

각 반복단계에서  $(A_{\beta_k}^T A_{\beta_k})^{-1}$ 가 주어진 상태에서

$$\begin{aligned} & ([A_{\beta_k}^T A_{\gamma}]^T [A_{\beta_k}^T A_{\gamma}])^{-1} \\ & = (A_{\beta_k}^T A_{\beta_k} \quad A_{\beta_k}^T A_{\gamma})^{-1} \\ & \quad (A_{\gamma}^T A_{\beta_k} \quad A_{\gamma}^T A_{\gamma})^{-1} \end{aligned}$$

를 구하거나 消去시키는 경우 그 반대의 과정을 구하는 것이므로 위 方法을 적용시키면 計算이 쉽게 될 것이다\*.

그 외에도 一次獨立性의 檢사가 바로 計算量을 必要로 하지 않는 등 計算上의 부담을 줄일 수 있는 여러 가지 방법들이 있으나 細部的 計算技法에 관한 것이므로 여기에서 언급하지는 않겠다.

이 解法의 各 反復단계에서의 計算量은  $\beta$ 의 크기에 좌우된다.  $\beta$ 의 크기가  $l$ 일 때의 꼽셈의 量은 大略  $5/2 l^2 + lm + mn$ 으로 나타나며, 이는 修正單體法(Revised Simplex Algorithm)의  $3m^2 + k; m, 1 \leq k \leq n-m$ 과 비교된다. 또한 첫  $m$ 번까지의 총 꼽셈량은 대략  $\frac{4}{3}m^3 + nm^2$ 으로 修正單體法의  $3m^3 + m \sum_{i=1}^m k_i, 1 \leq k_i \leq n-m$ 과 비교된다. 投影作業이 많은 計算이 必要할 것으로 예상되나, 앞에서 말한 바와 같은 計算의 단순화를 꾀하면 예상밖의 합리적인 計算量을 나타내었다. 물론  $\beta$ 의 크기가 커진 다음에는 計算量이 비교적 커서 計算의 후반부에 불리해지므로 문제의 성격에 따라 달라질 듯하다. 무작위로 작성된 문제들에 대한 계산 과정에서 단편적이나마 本解法의 性能 檢討를 시도하였다.

反復總回數에 대해서 理論的으로 明確한 結果를 얻지는 못했으나, 이 解法이 불록多面體의 頂邊뿐 아니라 必要時 頂面을 가로질러 가므로 總反復回數는 單體法類에 比해 일반적으로 적을 것으로 기대된다. 물론 문제에 따라 차이가 있겠으나 이러한 짐작(conjecture)은 25개의 例題를 통해 단편적으로나마 확인되었다.

참고로 무작위로 작성된 25개의 문제를 本研究의 解法과 修正單體法을 利用하여 比較하였고 추후 原・雙對單體法과도 比較할 예정이다. 〈表 1〉과 〈表 2〉는 CYBER 174-16을 이용한 위 比較의 結果이다.

물론 몇개의 例題에 대한 計算結果에 그 解法의 性能을 評價를 전적으로 의존할 수는 없지만 〈表 1〉과 〈表 2〉에 나타난 結果로는 本解法이 修正單體法에 비해 反復回數와 計算時間이 대체적으로 작았고 특히 문제의 크기가 커질수록 그 차이가 현격히 나타났다.

\*註) 여기서는 한개의 베터가 進入 또는 消去되는 경우만 說明되었으나 실제 여러개의 베터가 進入 또는 消去되는 경우에는 위 과정을 反復 적용함으로써 해결할 수 있을 것이다.

〈表 1〉 計算時間(修正單體法)  
本研究의 解法) 單位: sec

行의 類(n) 列의 類(m)	10	20	30	40	80
10	0.118	0.213	0.297	0.460	1.149
	0.137	0.241	0.448	0.657	0.881
20	0.652	0.854	2.583	2.020	9.009
	0.381	0.829	1.657	1.861	3.760
30	1.404	3.139	6.812	7.484	33.780
	1.246	3.609	2.692	3.982	13.968
40	2.920	7.086	12.182	16.355	53.874
	2.940	6.202	7.219	14.760	16.180
80	21.507	42.332	100.502	98.125	312.976
	11.853	35.735	63.138	57.595	99.616

〈表 2〉 反復回數(修正單體法)  
本研究의 解法)

列의 數 行의 數	10	20	30	40	80
10	34	27	41	37	112
	18	1	25	29	29
20	42	46	134	30	321
	15	30	44	39	52
30	48	93	191	189	646
	40	59	48	50	92
40	62	123	201	246	665
	54	57	71	98	82
80	121	228	511	456	1,399
	96	137	188	166	195

## 7. 結論

線型計劃法을 푸는 解法은 이미 單體法을 위시하여 상당히 開發되어 있으므로, 이 문제를 위한 보다나은 解法을 提示함은 매우 도전적이라고 보겠다. 문제는 이러한 先入觀에 重要한 數理計劃法의 한 분야인 線型計劃法의 解法에 對한 研究가 소강상태이었음을 부인할 수 없다는데 있다.

本研究에서는 임의의 雙對實行可能解에서 출발하여 雙對實行可能性과 相補的餘有性을 만족시키면서 原實行可能성이 만족될 때까지 反復 단계를 계속하는 非頂邊形解法을 提示하고, 그 解法이 收斂하기 위한 條件과 그 條件이 만족되지 않을 경우의 解決方案을 提示했다.

이 解法의 計算上 能率에 對한 理論的으로 明確한結果를 얻지는 못했지만 최소한 25개의 무작위로 작성된 문제에 대한 計算結果는 좋았다.

## 참 고 문 헌

- (1) Bazaraa, M.S., Nonlinear Programming, John Wiley & Sons (1979).
- (2) Cooper, L. and Kennington, J., "Non-extreme Point Solution Strategies for Linear Programs", Naval Research Logistics Quarterly, volume 26, No. 3, 1979.
- (3) Danzig, G.B., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press (1963).
- (4) Khachiyan, L.G., "A Polynomial Algorithm in Linear Programming", Dokl. Akad. Nauk SSSR. N.S. 244 : 5 (1979), 1093—1096.  
(English transl., Soviet Math. Dokl. 20 : 1 (1979), 191—194)
- (5) Murty, K.G., Linear and Combinatorial Programming, John Wiley & Sons (1976).
- (6) Rockafeller, R.T., Convex Analysis, Princeton University Press (1970).
- (7) Rosen, J.B., "The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Part I, Linear Constraints," SIAM J. Applied Mathematics 8, 1960, 181—217.